M.A. NAIMARK

THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES

M. NAÏMARK, A. STERN

THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Ce livre est destiné aux étudiants des universités et aux chercheurs — mathématiciens, physiciens ou chimistes — qui désirent étudier les fondements de la théorie des représentations des groupes.

Nous supposons que les notions de base de l'algèbre linéaire, de l'analyse et de la théorie des fonctions analytiques sont familières au lecteur. Toutes les autres connaissances indispensables à la compréhension de cet ouvrage sont exposées à l'endroit où elles sont nécessaires; parfois le lecteur est renvoyé à un ouvrage spécial, traitant en détail la question concernée.

Les deux premiers chapitres sont consacrés aux aspects algébriques de la théorie des représentations et aux représentations des groupes finis. Dans les chapitres suivants, nous exposons les fondements de la théorie des représentations des groupes topologiques, de la théorie des groupes de Lie, des algèbres de Lie et de leurs représentations.

Le plan de l'ouvrage permet au lecteur d'aborder progressivement les problèmes posés par cette théorie en ordre de difficulté croissante. D'autre part, les auteurs estiment que l'algèbre constitue la base de toute la théorie exposée.

Le volume restreint du livre nous a contraints à nous limiter à la théorie des représentations de dimension finie. Nous pensons exposer dans un autre ouvrage une théorie plus générale, englobant les représentations de dimension infinie.

Nous sommes profondément reconnaissants à A. Kirillov pour ses précieuses remarques.

Les auteurs

Mai, 1975

CHAPITRE PREMIER

FONDEMENTS ALGÉBRIQUES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Ce chapitre expose des notions et des propositions purement algébriques de la théorie des représentations et ne fait donc pas appel aux faits topologiques et analytiques. Strictement parlant, il aurait fallu ajouter, à chaque notion introduite au chapitre I, l'adjectif « algébrique », par exemple groupe algébrique, isomorphisme algébrique, équivalence algébrique, etc. Pour ne pas alourdir l'exposé, cet adjectif sera seulement sous-entendu dans le chapitre I, et n'apparaîtra dans les autres chapitres que dans les cas où un malentendu est à éviter.

§ 1. Notions fondamentales de la théorie des groupes

1.1. Définition des groupes. Un ensemble G est appelé *groupe*, si on y a défini le *produit* g_1g_2 de chaque couple d'éléments $g_1, g_2 \in G$, de manière à satisfaire aux conditions suivantes *):

a) $g_1g_2 \in G$, quels que soient $g_1, g_2 \in G$;

b) $(g_1g_2)\, g_3 = g_1\, (g_2g_3)$, quels que soient $g_1, g_2, g_3 \in G$;

c) il existe dans G un élément unique e tel que $eg = ge = g$ pour tout $g \in G$; on appelle *e élément neutre* (ou *unité*) du groupe G;

d) pour chaque élément $g \in G$, il existe un élément unique, désigné par g^{-1}, tel que $g^{-1}g = gg^{-1} = e$; on l'appelle *élément inverse* de g. Il est évident que g est l'élément inverse de g^{-1}, de sorte que $(g^{-1})^{-1} = g$.

Le groupe G est dit *commutatif* (ou *abélien*) si $g_1g_2 = g_2g_1$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$ et *non commutatif* dans le cas contraire. Dans le cas d'un groupe commutatif, on écrit également $g_1 + g_2$ à la place de g_1g_2, et l'on désigne alors l'élément neutre par 0. Avec ces notations, on dit que le groupe est donné en *notation additive*.

---

*) En principe on peut affaiblir ces conditions. Par exemple, dans la condition c) il suffit d'exiger l'*existence* de l'élément neutre seulement. Son unicité en découle. En effet, si e, e' sont des éléments neutres, alors $e'e = e'$ et $e'e = e$ et donc $e' = e$ (pour plus de détail, voir, par exemple A. Kurosh [1]). Ici, nous n'aurons pas besoin d'axiomes plus faibles.

Un groupe est appelé *fini* s'il a un nombre fini d'éléments; dans le cas contraire on l'appelle *infini*. Le nombre d'éléments d'un groupe fini G s'appelle *ordre*; on le désigne par $|G|$. Un groupe fini G, constitué des éléments $g_1, \ldots, g_m$, $m = |G|$, peut être défini par sa table de multiplication:

	g_1	g_2	$\cdots$	g_m
g_1	g_1g_1	g_1g_2	$\cdots$	g_1g_m
g_2	g_2g_1	g_2g_2	$\cdots$	g_2g_m
$\cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$
g_m	g_mg_1	g_mg_2	$\cdots$	g_mg_m,

dans laquelle le produit g_jg_k est écrit à l'intersection de la ligne de numéro j avec la colonne de numéro k. Cette table est appelée *table de Cayley* du groupe G.

EXEMPLES

1. L'ensemble $\mathbf{R}^1$ *) de tous les nombres réels est un groupe si l'on y définit le produit comme l'addition des nombres réels; ce groupe est appelé *groupe additif des nombres réels*. L'élément neutre de ce groupe est zéro, et l'élément inverse d'un nombre x est $-x$. On définit d'une manière analogue le *groupe additif* $\mathbf{C}^1$ *des nombres complexes*.

2. L'ensemble $\mathbf{R}^1_0$ de tous les nombres réels non nuls forme un groupe relativement à la multiplication usuelle des nombres. Ce groupe s'appelle *groupe multiplicatif* des nombres réels. L'élément neutre de ce groupe est le nombre 1, et l'élément inverse d'un nombre x est $1/x$. On définit de même le *groupe multiplicatif* $\mathbf{C}^1_0$ *des nombres complexes*.

3. L'ensemble $G_0 = \{1, i, -1, -i\}$, avec la multiplication usuelle, est un groupe.

Sa table de Cayley est de la forme

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1.

*) En général, $\mathbf{R}^1$ désignera par la suite le *groupe additif* des nombres réels, tandis que la lettre $\mathbf{R}$ sera employée chaque fois où l'ensemble des nombres réels est envisagé dans sa structure de *corps*.

4. Soit X un espace linéaire, G_X l'ensemble de tous les opérateurs linéaires dans X qui appliquent bijectivement X *sur* X. Définissons dans G_X la multiplication comme la composition des opérateurs. G_X devient alors un groupe. L'élément neutre sera ici l'opérateur unité 1 (i.e. l'opérateur tel que $1x = x$ pour tous les $x \in X$). L'élément inverse d'un opérateur A sera l'opérateur inverse A^{-1}. Si l'espace X est de dimension finie ($\dim X = n < \infty$), les opérateurs $A \in G_X$ dans X sont déterminés, pour une base fixe, par des matrices non dégénérées (i.e. à déterminant non nul) d'ordre n.

5. L'ensemble de toutes les matrices complexes d'ordre n, à déterminant non nul, est un groupe, si l'on y définit la multiplication des matrices de la manière usuelle; ce groupe est généralement désigné par $GL(n, \mathbf{C})$. L'élément neutre y sera la matrice unité, tandis que l'élément inverse d'une matrice a est la matrice inverse a^{-1}. On définit de même le groupe $GL(n, \mathbf{R})$ de toutes les matrices réelles d'ordre n à déterminant non nul. Pour $n \geqslant 2$ ces groupes sont non commutatifs.

6. Soit $SL(n, \mathbf{C})$ l'ensemble de toutes les matrices complexes d'ordre n à déterminant unité. Définissons dans $SL(n, \mathbf{C})$ le produit des matrices de la manière usuelle. Alors $SL(n, \mathbf{C})$ sera un groupe, parce que les déterminants se multiplient lorsqu'on fait le produit des matrices correspondantes. On définit d'une manière analogue le groupe $SL(n, \mathbf{R})$ de toutes les matrices réelles d'ordre n à déterminant unité.

7. Soit G_0' l'ensemble de toutes les rotations d'un carré $ABCD$ autour de son centre O qui font coïncider le carré avec lui-même. Il en existe précisément quatre *): la rotation α_0 d'angle 0°, la rotation α_1 de 90°, la rotation α_2 de 180° et la rotation α_3 de 270° (toutes se font dans le sens antihoraire); elles appliquent respectivement le point A sur A, B, C et D.

On appelle *produit* $\alpha\beta$ de deux rotations α, β la rotation obtenue en effectuant d'abord β et puis α. On vérifie facilement que, pour cette définition du produit, G_0' est un groupe d'ordre quatre.

8. L'ensemble $\mathbf{N}$ de tous les nombres entiers est un groupe, si l'on y définit la multiplication comme l'addition des entiers. Ce groupe s'appelle *groupe des nombres entiers*.

9. Soit $\mathbf{N}_p$ l'ensemble de tous les nombres entiers multiples de p, où p est un nombre naturel fixe; $\mathbf{N}_p = \{np,\ n \in N\}$. Définissons dans $\mathbf{N}_p$ la multiplication comme l'addition des nombres dans $\mathbf{N}_p$. Il est évident que $\mathbf{N}_p$ est un groupe.

10. Soit Ω_p l'ensemble de toutes les racines de degrés p de l'unité, où p est un nombre naturel fixe. Il est bien connu que cet ensemble est constitué par les nombres $e^{i2\pi k/p}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

*) Deux rotations sont considérées comme identiques lorsqu'elles aboutissent à une même position du carré.

Le produit des nombres de Ω_p sera défini comme le produit usuel. Il est alors évident que Ω_p est un groupe. Notons que $\Omega_4 = G_0$ (voir exemple 3).

Les groupes des exemples 1 à 3, 7 à 10 sont commutatifs. Les groupes des exemples 3, 7 sont finis d'ordre quatre, celui de l'exemple 10 est fini d'ordre p, les groupes des exemples 1, 2, 4 à 6, 8, 9 sont infinis.

1.2. Sous-groupes et classes d'équivalence associées. Un ensemble $H \subset G$ s'appelle *sous-groupe* du groupe G si $g_1, g_2 \in H$ implique $g_1 g_2^{-1} \in H$. En particulier, pour $g_1 = g_2$, nous obtenons $e \in H$, et donc $g_1, g_2 \in H$ implique que l'on a également $g_1^{-1} \in H$ et $g_1 g_2 \in H$. Par conséquent, avec la même définition de la multiplication que dans G, l'ensemble H est également un groupe.

Ainsi $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}_0^1$, $GL(n, \mathbf{R})$, $\mathbf{N}$ sont des sous-groupes de $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}_0^1$, $GL(n, \mathbf{C})$, $\mathbf{R}^1$ respectivement (voir les exemples 1, 2, 5, 8 ci-dessus): d'autre part $SL(n, \mathbf{C})$ et $SL(n, \mathbf{R})$ sont des sous-groupes de $GL(n, \mathbf{C})$ et de $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe de $SL(n, \mathbf{C})$ (voir les exemples 5, 6). Il est évident que le groupe donné G, de même que le sous-ensemble $\{e\}$ qui se réduit à l'élément neutre du groupe G, sont ses sous-groupes; on les appelle *sous-groupes triviaux* du groupe G; tous les autres sous-groupes de G (s'ils existent) sont appelés *sous-groupes non triviaux*.

Il est également évident que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes de G est également un sous-groupe de G; en particulier, l'intersection de tous les sous-groupes qui contiennent l'ensemble donné $S \subset G$ est un sous-groupe; c'est le sous-groupe minimal contenant S; on le désigne par $G(S)$.

I. *Soit H l'ensemble de tous les produits finis possibles des éléments $g_i \in S$ et des éléments inverses g_i^{-1}; alors $G(S) = H$.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que H est un sous-groupe contenant S; d'autre part, chaque sous-groupe contenant S contient H. Par conséquent, $G(S) = H$, puisque $G(S)$ est minimal.

Dans le cas où S se réduit à un seul élément g_0, le sous-groupe $G(g_0)$ est dit *cyclique*; il est évident que $G(g_0)$ est constitué par toutes les puissances g_0^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; certaines d'entre elles peuvent coïncider; si toutes ces puissances sont distinctes, on appelle g_0 *élément d'ordre infini*, et $G(g_0)$ *groupe cyclique d'ordre infini*. Si parmi ces éléments au moins deux coïncident, par exemple, $g_0^l = g_0^m$, avec $m > l$, alors $g_0^{m-l} = e$; dans ce cas, on appelle g_0 *élément d'ordre fini*. Le plus petit entier positif p pour lequel on a $g_0^p = e$ s'appelle *ordre de l'élément* g_0. Il est évident, que lorsque g_0 est d'ordre fini p, le groupe $G(g_0)$ est constitué par les éléments $e, g_0, g_0^2, \ldots, g_0^{p-1}$, qui sont tous distincts; $G(g_0)$ s'appelle alors *groupe cyclique d'ordre p*. Le groupe G est dit *cyclique*, s'il existe un élément $g_0 \in G$ tel que $G = G(g_0)$.

Soit H un sous-groupe du groupe G; chaque ensemble Hg_0 (i.e. l'ensemble de tous les éléments hg_0, $h \in H$) s'appelle *classe d'équivalence à droite du groupe G par le sous-groupe H*; d'une manière analogue on définit les *classes d'équivalence à gauche*. Chaque élément d'une classe d'équivalence s'appelle *représentant*; une classe de représentant g est désignée par $\{g\}$, ou bien $\tilde{g}$. Si g est un représentant de la classe Hg_0, alors $Hg = Hg_0$. En effet, $g = hg_0$ pour un certain $h \in H$ et donc $Hg_0 = H(hg_0) = (Hh)g_0 = Hg_0$. On peut donc déduire que *des classes d'équivalence à droite (à gauche) distinctes ne peuvent avoir d'éléments communs*. D'autre part, chaque élément $g \in G$ appartient à une classe d'équivalence à droite bien déterminée, à savoir la classe Hg. Par conséquent,

II. *L'ensemble des classes d'équivalence à droite du groupe G est une partition de ce groupe.*

Il est évident qu'il en va de même pour les classes d'équivalence à gauche.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence à droite du groupe G par le sous-groupe H, considérées chacune comme un seul élément, est appelé *espace quotient du groupe G par le sous-groupe H*; on le désigne par G/H. Le nombre d'élément dans G/H, s'il est fini, s'appelle *index du sous-groupe H* dans G; on le note généralement $|G/H|$. Si le groupe G est fini, alors H le sera aussi; le nombre d'éléments de chaque classe d'équivalence Hg est le même et coïncide avec $|H|$. D'où l'on conclut, à l'aide de II, que $|G| = |H|\,|G/H|$. Par conséquent,

III. *L'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini est un diviseur de l'ordre de ce groupe.*

EXEMPLES

1. Soient $G = \mathbf{R}^1$, $H = \mathbf{N}$ (voir les exemples 1 et 8 de 1.1), tandis que chaque classe $\tilde{g} \in \mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ est de la forme $\tilde{g}_\alpha = \{n + \alpha, n \in \mathbf{N}\}$, où α est un nombre fixe dans l'intervalle $0 \leqslant \alpha < 1$ pour chaque classe donnée; on appelle α la *partie fractionnaire* du nombre $n + \alpha$. Ainsi une classe de $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ se détermine uniquement par la partie fractionnaire d'un de ses représentants quelconques.

2. Soient $G = \mathbf{N}$; $H = \mathbf{N}_2$ (voir les exemples 8, 9 de 1.1), i.e. H est un sous-groupe de $\mathbf{N}$ constitué par tous les nombres pairs; $\mathbf{N}/H$ est alors constitué par deux éléments: $\tilde{g}_0 = H$, $\tilde{g}_1 = \{1 + h, h \in H\}$. Autrement dit, $\tilde{g}_0$ est l'ensemble de tous les nombres pairs, $\tilde{g}_1$, l'ensemble de tous les nombres impairs.

3. Soient $G = \mathbf{N}$, $H = \mathbf{N}_p$; $\mathbf{N}/H$ est alors constitué par p classes $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{p-1}$, où $\tilde{g}_k = \{k + h, h \in H\}$, $k = 0, 1, \ldots, p - 1$. Ces classes s'appellent *classes de résidus modulo p*.

1.3. Sous-groupe distingué; groupe quotient. On dit que le sous-groupe H du groupe G est *distingué*, si pour chaque élément $g \in G$

on a

$$gH = Hg, \tag{1.3.1}$$

i.e. pour chaque couple $g \in G$, $h_1 \in H$, il existe un élément $h_2 \in H$ tel que $gh_1 = h_2 g$. Il est clair que la relation (1.3.1) signifie que chaque classe d'équivalence à gauche gH coïncide avec la classe d'équivalence à droite Hg. Si le groupe G est commutatif, il est alors évident que chaque sous-groupe de G est distingué. Dans le cas général, il peut exister des sous-groupes qui ne le sont pas. Il est également évident que le groupe donné G, de même que l'ensemble $\{e\}$ se réduisant à l'élément neutre $e \in G$ sont des sous-groupes distingués de G. On les appelle *sous-groupes distingués triviaux* du groupe G, tandis que tous les autres sous-groupes distingués (s'ils existent) sont appelés *non triviaux*. Le groupe G est dit *simple*, s'il ne possède aucun sous-groupe distingué non trivial. Si H est un sous-groupe distingué dans G, alors on peut définir la multiplication dans l'espace quotient G/H de la manière suivante: on appelle *produit* $(Hg_1)(Hg_2)$ des classes Hg_1, Hg_2 la classe Hg_1g_2. Cette définition ne dépend pas du choix des représentants des classes Hg_1, Hg_2. En effet, si $g'_1 \in Hg_1$, $g'_2 \in Hg_2$, alors $g'_1 = h_1g_1$, $g'_2 = h_2g_2$, et en vertu de (1.3.1) on a $g_1h_2 = h'_2g_1$ pour un certain $h'_2 \in H$. D'où l'on tire $g'_1g'_2 = (h_1g_1)(h_2g_2) = h_1(g_1h_2)g_2 = h_1h'_2g_1g_2$; par conséquent $Hg'_1g'_2 = Hh_1h'_2g_1g_2 = Hg_1g_2$. On vérifie tout aussi facilement que le produit ainsi défini satisfait aux conditions a) à c) du nº 1.1, et l'élément neutre $\tilde{e}$ dans G/H sera $\tilde{e} = H$; par conséquent, pour cette définition du produit, G/H est un groupe. On l'appelle *groupe quotient du groupe G par le sous-groupe distingué H*; on le désigne toujours par G/H.

Exemples et exercices

1. Soient $G = GL(n, \mathbf{C})$, $H = SL(n, \mathbf{C})$ (voir l'exemple 5, nº 1.1); alors H est un sous-groupe distingué dans G. En effet, pour $g \in G$, $h \in H$ quelconques nous avons $\det(ghg^{-1}) = \det g \cdot \det h \cdot \det g^{-1} = \det h = 1$ et donc $ghg^{-1} \in H$.

Cherchons le groupe quotient G/H. Si g_1 et g_2 appartiennent à une même classe $\tilde{g} \in G/H$, alors $g_2 = hg_1$ et donc $\det g_2 = \det h \times \det g_1 = \det g_1$. Inversement, $\det g_2 = \det g_1$ implique $\det(g_2g_1^{-1}) = 1$, et par conséquent $g_2g_1^{-1} \in H$, i.e. g_2 et g_1 appartiennent à une même classe $\tilde{g} \in G/H$. La classe $\tilde{g}$ est donc bien déterminée par le nombre $\lambda_{\tilde{g}} = \det g$, où $g \in \tilde{g}$. Il découle de la définition du produit dans G/H que l'on a $\lambda_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2} = \det(g_1g_2) = \det g_1 \cdot \det g_2$, où $g_1 \in \tilde{g}_1$ et $g_2 \in \tilde{g}_2$, i.e. $\lambda_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2} = \lambda_{\tilde{g}_1} \cdot \lambda_{\tilde{g}_2}$. Il est évident que l'application $\tilde{g} \to \lambda_{\tilde{g}}$ est une bijection du groupe $G/H = GL(n, \mathbf{C})/SL(n, \mathbf{C})$ sur le groupe $\mathbf{C}_0^1$ (voir l'exemple 2, nº 1.1). D'une manière analogue, l'application

$g \to \lambda_{\tilde{g}} = \det g$ pour $g \in \tilde{g} \in GL(n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{R})$ est une bijection du groupe $GL(n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{R})$ sur le groupe $\mathbf{R}_0^1$ qui satisfait à la condition $\lambda_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2} = \lambda_{\tilde{g}_1}\lambda_{\tilde{g}_2}$.

2. Soient K_2 l'ensemble de toutes les matrices $k = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ \mu & \lambda \end{Vmatrix}$ et Z_2 l'ensemble de toutes les matrices $z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{Vmatrix}$, où λ, μ sont des nombres complexes et $\lambda \neq 0$. Alors K_2 est un sous-groupe dans $SL(2, \mathbf{C})$ et Z_2 un sous-groupe distingué dans K_2. Démontrer que

1) Z_2 est un sous-groupe distingué de K_2;

2) chaque élément $\tilde{k} \in K_2/Z_2$ se détermine uniquement par la donnée du nombre $\lambda_k = \lambda$, où $k = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ \mu & \lambda \end{Vmatrix} \in \tilde{k}$;

3) l'application $\tilde{k} \to \lambda_{\tilde{k}}$ est une bijection du groupe K_2/Z_2 sur le groupe $\mathbf{C}_0^1$ (voir l'exemple 2 de 1.1).

3. Soient $G = \mathbf{R}^1$, $H = \mathbf{N}$ (voir les exemples 1 et 8 de 1.1). Puisque $\mathbf{R}^1$ est commutatif, $\mathbf{N}$ sera un sous-groupe distingué dans $\mathbf{R}^1$; $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ est constitué par les classes $\tilde{g} = \{n + \alpha, n \in \mathbf{N}\}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ (voir l'exemple 1 de 1.2). Par définition de la multiplication dans $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$, on a

$$\tilde{g}_\alpha \tilde{g}_\beta = \{n + \alpha + \beta, \; n \in \mathbf{N}\} = \{n + \gamma, \; n \in \mathbf{N}\} = \tilde{g}_\gamma,$$

où $\gamma = [\alpha + \beta]$.

4. Soient $G = \mathbf{N}$, $H = \mathbf{N}_p$ (voir les exemples 8, 9 de 1.1); $\mathbf{N}$ est commutatif et par conséquent $\mathbf{N}_p$ est un sous-groupe distingué dans $\mathbf{N}$, tandis que $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p = \{\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{p-1}\}$ (voir l'exemple 3 de 1.2). Il découle de la définition de la multiplication dans $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p$ que $\tilde{g}_k\tilde{g}_l = \{k + l + pn, \; n \in \mathbf{N}\} = \{m + pn, \; n \in \mathbf{N}\} = \tilde{g}_m$, où m est le reste de la division du nombre $k + l$ par p. Le groupe $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p$ est appelé *groupe des résidus modulo p*.

1.4. Centre. L'ensemble de tous les éléments du groupe G qui sont permutables avec chaque élément de G s'appelle *centre* du groupe G; on le désigne par $Z(G)$. Ainsi, un élément g_0 de G appartient à $Z(G)$ si et seulement si on a $gg_0 = g_0g$, quel que soit $g \in G$. $Z(G)$ est un *sous-groupe du groupe G*.

En effet, $g_1, g_2 \in Z(G)$ implique $g_1g = gg_1$ et $g_2g = gg_2$ quel que soit $g \in G$. D'où l'on tire $g^{-1}g_2^{-1} = g_2^{-1}g^{-1}$ et puisque g^{-1} parcourt tout le groupe G, on a également $g_2^{-1} \in Z(G)$; donc pour chaque $g \in G$ on a $g_1g_2^{-1}g = g_1gg_2^{-1} = gg_1g_2^{-1}$; par conséquent $g_1g_2^{-1} \in Z(G)$.

Les éléments de $Z(G)$ sont permutables avec chaque élément de G; en particulier, ils sont permutables entre eux. Par conséquent,

$Z(G)$ est un *groupe commutatif*. Si le groupe G est lui-même commutatif, on a $Z(G) = G$. $Z(G)$ est un *sous-groupe distingué* du groupe G. En effet, pour chaque $g \in G$ nous avons $gZ(G) = Z(G)\,g$.

EXEMPLES ET EXERCICES

1. Soit $G = GL(n, \mathbf{C})$ (voir l'exemple 5 de 1.1). Cherchons $Z(G)$. Si $z \in Z(G)$, alors

$$gz = zg \text{ quel que soit } g \in G. \qquad (1.4.1)$$

Posons dans (1.4.1)

$$g = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

où $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, les λ_j sont tous distincts, tandis que les éléments situés en dehors de la diagonale sont nuls; nous obtenons $\lambda_j z_{jk} = \lambda_k z_{jk}$, et donc les $z_{jk} = 0$ pour $j \neq k$, i.e. z est une matrice diagonale. Posons également dans (1.4.1)

$$g = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

où tous les éléments non indiqués sont nuls; nous obtiendrons $z_{22} = z_{11}$. On démontre d'une manière analogue que $z_{jj} = z_{kk}$ pour tous les $j, k = 1, \ldots, n$, de sorte que $z = \lambda 1$, où $\lambda = z_{jj}$, $j = 1, \ldots, n$. Autrement dit, $Z(GL(n, \mathbf{C}))$ est constitué par les matrices de la forme $\lambda 1$, $\lambda \in \mathbf{C}_0^1$. D'une manière analogue, $Z(GL(n, \mathbf{R}))$ est constitué par matrices de la forme $\lambda 1$, $\lambda \in \mathbf{R}_0^1$.

2. Trouver les groupes quotients $GL(n, \mathbf{C})/Z(GL(n, \mathbf{C})$ et $GL(n, \mathbf{R})/Z(GL(n, \mathbf{R}))$.

1.5. Applications. Soient X et Y deux ensembles quelconques. Nous dirons qu'une *application* f de X dans Y (ou une fonction f sur X à valeurs dans Y) est donnée si l'on a fait correspondre à chaque point $x \in X$ un point $y \in Y$. On appelle alors le point y

image du point x par l'application f et l'on écrit $y = f(x)$. En général, l'ensemble de toutes les images des points de l'ensemble $M \subset X$ s'appelle *image* de l'ensemble M par l'application f; on la note $f(M)$. L'ensemble de tous les points $x \in X$ pour lesquels on a $f(x) \in \in N$, où $N \subset Y$, s'appelle *image inverse* (réciproque) de l'ensemble N par l'application f; on la note $f^{-1}(X)$. Ainsi, si l'image $f(X)$ de l'ensemble X est tout l'ensemble Y, on dit que f est une application de X *sur* Y, ou une *surjection*.

L'application f de l'ensemble X sur Y est dite *bijective*, si l'image inverse de chaque point $y \in f(X)$ est constituée par un seul point. L'application de X sur X pour laquelle chaque image coïncide avec son image inverse s'appelle application *identique*.

Soient f une application de X dans Y, et φ une application de Y dans Z; on appelle *produit* φf de l'application φ par l'application f l'application qu'on obtient en effectuant successivement d'abord l'application f et ensuite l'application φ *). Soit f une application de X dans Y. Une application φ de l'ensemble $f(X)$ dans X est dite *inverse* de f et est désignée par f^{-1}, si φf est l'application identique de X sur X. Dans ce cas les égalités $(\varphi f)(x) = x$, $(f\varphi f)(x) = f(x)$ impliquent que φ est l'application sur X et $f\varphi$ est l'identité sur $f(X)$; par conséquent, f, envisagée comme une application dans $f(X)$, est inverse de $\varphi = f^{-1}$.

I. *L'application inverse f^{-1} existe si et seulement si l'application f est bijective.*

En effet, la nécessité de la condition est évidente. Réciproquement, si l'application f est bijective, alors en faisant correspondre à chaque point $y \in f(X)$ son image inverse par l'application f, nous obtenons l'application f^{-1}.

Soient f une application de X dans Y, et Z un sous-ensemble de X; l'application φ de Z dans Y, déterminée par la formule $\varphi(z) = f(z)$ pour tous les $z \in Z$ est appelée *restriction* de l'application f sur Z; on la note $f|_Z$.

1.6. Homomorphismes et isomorphismes de groupes. Une application f du groupe G dans le groupe G' s'appelle *homomorphisme* de G dans G', si l'on a

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) \text{ quels que soient } g_1, g_2 \in G. \quad (1.6.1)$$

La condition (1.6.1) signifie que si f applique g_1 dans g_1' et g_2 dans g_2', alors f applique également g_1g_2 dans $g_1'g_2'$. L'image inverse $f^{-1}(e')$ de l'élément neutre e' du groupe G' par l'homomorphisme f du groupe G dans G' est appelé *noyau de l'homomorphisme* f et est désigné par Ker f. Si l'image de G par l'homomorphisme f du groupe G dans G' est le groupe tout entier G' (i.e. $f(G) = G'$), alors f s'appelle *homomorphisme du groupe G sur le groupe G'*.

*) L'application φf est parfois aussi désignée par $\varphi \circ f$.

I. *Si f est un homomorphisme du groupe G dans le groupe G', on a :*
1) *f (e) est l'élément neutre de G'* ;
2) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$;
3) *f applique chaque sous-groupe de G sur un sous-groupe de G'* ;
4) *f applique chaque sous-groupe distingué du groupe G sur un sous-groupe distingué du groupe f (G)* ;
5) Ker *f est un sous-groupe distingué du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. 1) Posons $\hat{e} = f(e)$ et désignons par e' l'élément neutre de G'. On a alors, en vertu de (1.4.1)

$$\hat{e}\hat{e} = f(e)\,f(e) = f(ee) = f(e) = \hat{e} = \hat{e}e'.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\hat{e}^{-1}$ à gauche; nous obtiendrons $\hat{e} = e'$. Ceci démontre l'assertion 1). L'assertion 2) découle immédiatement des relations $f(g)\,f(g^{-1}) = f(g^{-1})\,f(g) = f(gg^{-1}) = f(e) = e'$ et alors l'assertion 3) se déduit des relations

$$f(h_1)\,f(h_2)^{-1} = f(h_1h_2^{-1}) \in f(H).$$

Soit H un sous-groupe distingué du groupe G et $g' \in f(G)$; alors on a $g' = f(g)$ pour un certain $g \in G$ et donc

$$g'f(H) = f(g)\,f(H) = f(gH) = f(Hg) = f(H)\,f(g) = f(H)\,g',$$

ce qui démontre l'assertion 4).

Posons Ker $f = H$; alors $f(H) = e'$. Si l'on a $h_1, h_2 \in H$, alors $f(h_1) = e'$, $f(h_2) = e'$ et donc $f(h_1h_2^{-1}) = f(h_1)\,f(h_2)^{-1} = e'$ de sorte que $h_1h_2^{-1} \in H$; par conséquent H est un sous-groupe dans G.

Pour chaque $g \in G$ on a

$$f(gHg^{-1}) = f(g)\,f(H)\,f(g^{-1}) = f(g)\,e'\,[f(g)]^{-1} = e'.$$

D'où l'on tire $gHg^{-1} \subset H$ et $gH \subset Hg$. En substituant ici g^{-1} à g et en multipliant ensuite les deux membres de la relation obtenue par g à gauche et à droite, nous obtiendrons $Hg \supset gH$; donc $Hg = gH$ et l'assertion 5) est démontrée.

On peut construire un exemple d'un homomorphisme de la manière suivante. Soit H un sous-groupe distingué du groupe G. Faisons correspondre à chaque élément $g \in G$ la classe $\tilde{g} \in G/H$ qui contient g. De la définition même de la multiplication dans le groupe quotient G/H, on tire que l'application obtenue $g \to \tilde{g}$ est un homomorphisme du groupe G sur le groupe G/H. On l'appelle *homomorphisme canonique* (ou encore *naturel*) *du groupe G sur le groupe quotient G/H.*

Un homomorphisme bijectif sur son image s'appelle *monomorphisme.* Il est évident que les assertions de la proposition I sont vérifiées, en particulier, pour les monomorphismes.

II. *Un homomorphisme f est un monomorphisme si et seulement si* Ker $f = \{e\}$.

Démonstration. Si f est un monomorphisme, alors $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ en vertu de la bijectivité de f sur son image. Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ et $f(g_1) = f(g_2)$, on a $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) \times f(g_2)^{-1} = e$ et par conséquent $g_1 g_2^{-1} = e$, $g_1 = g_2$; donc f est une bijection sur son image.

L'application f du groupe G dans le groupe G' s'appelle *anti-homomorphisme*, si l'on a

$$f(g_1 g_2) = f(g_2) f(g_1) \text{ quels que soient } g_1, g_2 \in G,$$

et *anti-monomorphisme*, si en outre f est une bijection sur son image. En particulier, si $f(G) = G'$, alors f s'appelle *anti-homomorphisme* (respectivement *anti-isomorphisme*) *du groupe G sur G'*. On appelle $f^{-1}(e)$ *noyau* de l'anti-homomorphisme f.

Il est facile de vérifier que les propositions I et II restent vraies pour les anti-homomorphismes et les anti-isomorphismes. Deux groupes G et G' sont dits *isomorphes*, s'il existe un isomorphisme du groupe G sur G'. Dans certains cas, on n'a aucun intérêt à distinguer les éléments de deux groupes G, G' isomorphes et l'on identifie alors les éléments du groupe G avec leurs images par l'isomorphisme de G sur G'.

III. *Si f est un homomorphisme du groupe G sur le groupe G' et H est le noyau de cet homomorphisme, alors*:

1) *le groupe G' est isomorphe au groupe quotient G/H*;

2) $f = \psi\varphi$ *où φ est l'homomorphisme canonique du groupe G sur le groupe G/H, tandis que ψ est l'isomorphisme du groupe G/H sur le groupe G'.*

Démonstration. Définissons l'application ψ du groupe G/H sur le groupe G', en posant pour $\tilde{g} \in G/H$ et pour $g \in \tilde{g}$

$$\psi(\tilde{g}) = f(g). \tag{1.6.2}$$

Cette définition ne dépend pas du choix du représentant $g \in \tilde{g}$. En effet, si l'on a également $g_1 \in \tilde{g}$, alors $g_1 = gh$ pour un certain $h \in H$, et $f(g_1) = f(gh) = f(g) f(h) = f(g) e' = f(g)$.

D'autre part, en vertu de (1.6.2), nous avons pour $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in G/H$ et $g_1 \in \tilde{g}_1$, $g_2 \in \tilde{g}_2$

$$\psi(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) = f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = \psi(\tilde{g}_1) \psi(\tilde{g}_2)$$

et

$$\psi(G/H) = f(G) = G';$$

par conséquent ψ est un homomorphisme du groupe G/H sur G'. Trouvons $\operatorname{Ker} \psi$. Si $\tilde{g} \in \operatorname{Ker} \psi$, on a $\psi(\tilde{g}) = e'$; d'où l'on tire, en vertu de (1.6.2), $f(g) = e'$ pour $g \in \tilde{g}$. Cela signifie que l'on a $g \in H$; par conséquent, $\tilde{g} = H = \tilde{e}$. Ainsi $\operatorname{Ker} \psi = \{\tilde{e}\}$, de sorte qu'en

vertu de II, ψ est un isomorphisme de G/H sur G'. Nous avons donc démontré l'assertion 1).

Pour démontrer l'assertion 2), notons qu'en vertu de la définition de l'homomorphisme canonique on a $\varphi(g) = \tilde{g}$, et donc on peut écrire (1.6.2) sous la forme

$$\psi(\varphi(g)) = f(g)$$

de sorte que $\psi\varphi = f$.

L'isomorphisme du groupe G sur ce même groupe G est appelé *automorphisme du groupe* G. En guise d'exemple d'automorphisme du groupe G citons l'application

$$g \to f(g) = g_0^{-1} g g_0, \tag{1.6.3}$$

où g_0 est un élément fixe du groupe G. En effet,

$$f(g_1) f(g_2) = g_0^{-1} g_1 g_0 g_0^{-1} g_2 g_0 = g_0^{-1} g_1 g_2 g_0 = f(g_1 g_2)$$

et alors $g_0^{-1} g_1 g_0 = g_0^{-1} g_2 g_0$ implique $g_1 = g_2$.

L'automorphisme du groupe G donné par la formule (1.6.3) pour un certain $g_0 \in G$ est dit *intérieur*, tandis que tous les autres automorphismes sont dits *extérieurs*.

EXEMPLES ET EXERCICES

1. L'application $f: g \to \det g$ est un homomorphisme du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ sur le groupe $\mathbf{C}^1$ (voir les exemples 2 et 5 de 1.1), parce que $\det(g_1 g_2) = \det g_1 \det g_2$ et $\operatorname{Ker} f = SL(n, \mathbf{C})$. Le groupe quotient $\tilde{G} = GL(n, \mathbf{C})/SL(n, \mathbf{C})$ est isomorphe au groupe $\mathbf{C}_0^1$ et l'isomorphisme ψ du groupe $\tilde{G}$ sur $\mathbf{C}_0^1$ est déterminé par la formule $\psi: \tilde{g} \to \lambda_{\tilde{g}} = \det g$ pour $g \in \tilde{g}$ (voir l'exemple 1 de 1.3). Une assertion analogue est vraie pour $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ et $\mathbf{R}_0^1$. Vérifier que dans ces cas $f = \psi\varphi$.

2. Les groupes G_0 et G_0' (voir les exemples 3 et 7 de 1.1) sont isomorphes; l'isomorphisme correspondant est donné par l'application

$$f: 1 \to \alpha_0,\ i \to \alpha_1,\ -1 \to \alpha_2,\ -i \to \alpha_3.$$

3. Les groupes G_X et $GL(n, \mathbf{C})$ pour $\dim X = n$ (voir les exemples 4 et 5 de 1.1) sont isomorphes. Pour construire l'isomorphisme, il suffit de faire correspondre à chaque opérateur $A \in G$ la matrice correspondante (pour une base fixe de l'espace X).

4. L'intervalle $\mathcal{T}^1 = [0, 1)$ est un groupe si l'on y définit le produit des nombres $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^1$ comme $[\alpha + \beta]$. Ce groupe s'appelle *tore de dimension un*; on peut également considérer $\mathcal{T}^1$ comme le segment $[0, 1]$, les extrémités 0 et 1 étant identifiées. La relation $\tilde{g}_\alpha = \{n + \alpha, n \in \mathbf{N}\} \to \alpha$ est un isomorphisme du groupe $\mathbf{R}'/\mathbf{N}$ sur $\mathcal{T}^1$ (voir l'exemple 3 de 1.3); par conséquent $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ et $\mathcal{T}^1$ sont isomorphes.

5. Les groupes Ω_p et N/N_p (exemples 10 de 1.1 et 4 de 1.3) sont isomorphes. L'isomorphisme est donné par l'application

$$f:\ \tilde{g}_k = \{k + np,\ n \in \mathrm{N}\} \rightarrow e^{ik\pi/p}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

6. Soit g une matrice d'ordre n. Désignons par $\bar{g}$ la matrice dont les éléments sont les conjugués complexes des éléments correspondants de la matrice g, et par g' la matrice transposée de g, de sorte que $\bar{g} = (\bar{g}_{jk})$ et $g'_{jk} = g_{kj}$. Démontrer que les applications

$$g \rightarrow \bar{g} \quad \text{et} \quad g \rightarrow g'^{-1}$$

sont des automorphismes extérieurs des groupes $GL(n, \mathrm{C})$ et $SL(n, \mathrm{C})$.

1.7. Groupes de transformation. Soit X un ensemble quelconque. On appelle *transformation de l'ensemble* X toute bijection de l'ensemble X sur X. Le résultat de l'application de la transformation g à l'élément $x \in X$ sera désigné par xg ou bien gx, et l'application g elle-même est notée sous la forme $x \rightarrow xg$ ou respectivement $x \rightarrow gx$.

Dans le premier cas g s'appelle *transformation à droite* et dans le deuxième cas, *transformation à gauche*. En fait, les transformations à droite et à gauche, pour un même g, coïncident et ne diffèrent entre elles que par la notation. Par la suite il sera commode de se servir de deux formes de notation.

Si X est fini et consiste de n éléments, alors la transformation de l'ensemble X s'appelle *permutation de n éléments*. Dans ce cas, il est commode de numéroter par les nombres $1, 2, \ldots, n$, dans un ordre quelconque, les éléments de l'ensemble X. Alors la permutation est donnée dans la notation $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$, où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ est un nouvel ordre de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cette notation indique que la permutation donnée applique les éléments $1, 2, \ldots, n$ dans les éléments $k_1, k_2, \ldots, k_n$ respectivement. On appelle *produit* g_1g_2 *des transformations à droite* g_1 et g_2 la transformation que l'on obtient en appliquant successivement la transformation g_1 et ensuite la transformation g_2, de sorte que par définition

$$x(g_1g_2) = (xg_1)\,g_2. \tag{1.7.1a}$$

On appelle *produit* g_1g_2 *des transformations à gauche* la transformation obtenue en appliquant successivement d'abord la transformation g_2 et puis la transformation g_1, de sorte que par définition

$$(g_1g_2)\,x = g_1(g_2x). \tag{1.7.1b}$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble de toutes les transformations à droite de l'ensemble X, que nous désignerons par $G_r(X)$, est un groupe. L'élément neutre e dans $G_r(X)$ est l'application identique, i.e. l'application $x \rightarrow x$ qui laisse invariant chaque élément $x \in X$,

la transformation inverse g^{-1} de g étant déterminée par la condition $x'g^{-1} = x$ quand on a $xg = x'$.

D'une manière analogue on définit le groupe $G_l(X)$ de toutes les transformations à gauche de l'ensemble X. Il est évident que l'application identique $g \to g$ est un anti-isomorphisme du groupe $G_r(X)$ sur le groupe $G_l(X)$, ainsi que du groupe $G_l(X)$ sur le groupe $G_r(X)$. Si X est fini et est constitué par n éléments, alors $G_l(X)$ est le groupe de toutes les permutations de n éléments. On l'appelle *groupe symétrique* et on le désigne par S_n. Son ordre est égal au nombre de permutations de n éléments et par conséquent il est égal à $n!$. Par la suite, nous employerons le terme *transformation* pour désigner toujours une transformation à droite et nous écrirons aussi $G(X)$ à la place de $G_r(X)$.

Chaque sous-groupe G du groupe $G(X)$ s'appelle *groupe des transformations (à droite) de l'ensemble* X, et le couple (X, G) est *l'espace X à groupe de transformations G*; les éléments $x \in X$ sont dits *points* de l'espace X.

On introduit d'une manière analogue l'espace X à groupe de transformations à gauche.

Soit (X, G) un espace X à groupe de transformations G. Chaque ensemble $O_x = \{xg, g \in G\}$, où x est fixe, tandis que g varie sur tout le groupe G, est appelé *trajectoire*, ou *orbite*, relativement à G.

I. *Deux points $x_1, x_2 \in X$ appartiennent à une même orbite si et seulement si on a $x_2 = x_1 g$ pour un certain $g \in G$.*

En effet, si $x_2 = x_1 g$, alors x_2 et x_1 appartiennent à l'orbite qui contient x_1. Réciproquement, si x_2 et x_1 appartiennent à une même orbite, on a $x_1 = xg_1$, $x_2 = xg_2$ pour certains $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$ et donc $x_2 = x_1 g_1^{-1} g_2$.

Il découle de I que *les orbites forment une partition de l'espace X.*

L'espace X est appelé *transitif*, ou bien *homogène* relativement à G, s'il se réduit à une seule orbite. En vertu de I, cela signifie que pour chaque couple $x_1, x_2 \in X$, il existe un élément $g \in G$ tel que $x_2 = x_1 g$.

Dans le cas général, on peut considérer la restriction de chaque transformation g à une orbite fixe O_x; l'ensemble de ces restrictions sera à nouveau désigné par G. Alors O_x devient un espace transitif à groupe de transformations G et notre espace se décompose en sous-espaces transitifs disjoints à groupe de transformations G. Chaque groupe G peut être représenté de la manière suivante sous forme de groupe de transformations. Posons $X = G$ et à chaque élément $g_0 \in G$ faisons correspondre une transformation $\hat{g}_0$ de l'ensemble G suivant la formule

$$g \to g\hat{g}_0 = gg_0. \qquad (1.7.2)$$

La transformation (1.7.2) s'appelle *translation à droite* sur G. Désignons par $\hat{G}$ l'ensemble de toutes les translations à droite.

Les relations

$$g(\hat{g}_1\hat{g}_2) = (g\hat{g}_1)\,\hat{g}_2 = (gg_1)\,g_2 = g\,(g_1g_2) = g\,\widehat{(g_1g_2)}$$

impliquent que $\hat{G}$ est un groupe et que la correspondance $g \to \hat{g}$ est un homomorphisme du groupe G sur le groupe $\hat{G}$. Il est évident que cet homomorphisme est bijectif; la correspondance $g \to \hat{g}$ est un isomorphisme du groupe G sur le groupe $\hat{G}$, de sorte que:

II. *Chaque groupe G est isomorphe au groupe de toutes les translations à droite sur G.*

L'isomorphisme $g \to \hat{g}$ s'appelle *représentation régulière à droite* *) du groupe G. De la même manière que la représentation régulière à droite, on peut construire la *représentation régulière à gauche* du groupe G. A savoir, à chaque élément $g_0 \in G$ on fait correspondre une transformation à gauche $\check{g}_0$ de l'ensemble G suivant la formule

$$g \to \check{g}_0 g = g_0 g. \tag{1.7.3}$$

Cette transformation s'appelle *translation à gauche* sur G. Désignons par $\check{G}$ l'ensemble de toutes les translations à gauche sur G. Les relations

$$(\check{g}_1\check{g}_2)\,g = \check{g}_1(\check{g}_2 g) = g_1(g_2 g) = (g_1g_2)\,g = \widecheck{(g_1g_2)}\,g$$

et la bijectivité de l'application $g \to \check{g}$ impliquent que $\check{G}$ est un groupe et que la relation $g \to \check{g}$ est un isomorphisme du groupe G sur le groupe $\check{G}$. Cet isomorphisme s'appelle *représentation régulière à gauche* du groupe G. Si le groupe G est fini et est constitué par n éléments, alors $\check{g}$ est une transformation à gauche de l'ensemble fini G, i.e. une permutation de n éléments. Par conséquent, $\check{G}$ est un sous-groupe du groupe S_n. De là et de II on tire:

III. *Chaque groupe fini G est isomorphe à un certain sous-groupe du groupe symétrique S_n, où $n = |G|$.*

Un exemple important de groupe de transformations est l'ensemble de tous les automorphismes d'un groupe donné G. Ici $X = G$ et les transformations sont les automorphismes du groupe G. Si f_1, f_2 sont deux automorphismes du groupe G, alors, évidemment, $f_1f_2^{-1}$ est un automorphisme du groupe G. Par conséquent, l'ensemble de tous les automorphismes du groupe G est également un groupe. On l'appelle *groupe des automorphismes* du groupe G et on le désigne par $A(G)$. L'ensemble de tous les automorphismes intérieurs

$$a_{g_0}\colon\ g \to g_0^{-1} g g_0 \tag{1.7.4}$$

*) Par la suite (voir, par exemple, 1.3, chapitre II) ce terme sera employé dans un autre sens.

(que nous désignerons par $A_i(G)$) est un sous-groupe du groupe $A(G)$. En effet,

$$g(a_{g_1}a_{g_2}) = (ga_{g_1})a_{g_2} = g_2^{-1}(g_1^{-1}gg_1)g_2 = (g_1g_2)^{-1}g(g_1g_2) = ga_{g_1g_2},$$

et donc la correspondance $g \rightarrow a_g$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe $A(G)$. Par conséquent, $A_i(G)$ est un sous-groupe de $A(G)$ en vertu de I, nº 1.6 ; on appelle $A_i(G)$ *groupe des automorphismes intérieurs* du groupe G. Chaque orbite de G relativement à $A_i(G)$ est constituée par des éléments de la forme $g^{-1}g_0g$, où g_0 est fixe, tandis que g parcourt tout le groupe G. Deux éléments g_1 et g_2 appartiennent à une même orbite, si est seulement si

$$g_2 = g^{-1}g_1g \tag{1.7.5}$$

pour un certain $g \in G$ (voir I). Les éléments g_1 et g_2 qui satisfont à la condition (1.7.5) pour un certain $g \in G$ sont dits *conjugués*. L'ensemble de tous les éléments du groupe G, conjugués d'un élément fixe (et par conséquent conjugués entre eux) s'appelle *classe d'éléments conjugués*. Il découle des raisonnements précédents que *les orbites dans G relativement à $A_i(G)$ coïncident avec les classes des éléments conjugués dans G.*

Calculons le noyau Ker a de l'homomorphisme $g \rightarrow a_g$. L'élément g_0 du groupe G appartient à Ker a, si et seulement si a_{g_0} est l'application identique, i.e. $ga_{g_0} = g$ quel que soit $g \in G$. En vertu de (1.7.4), cela signifie que l'on a $g_0^{-1}gg_0 = g$, i.e. $gg_0 = g_0g$ quel que soit $g \in G$. Par conséquent, *le noyau de l'homomorphisme $g \rightarrow a_g$ coïncide avec le centre $Z(G)$ du groupe G.*

En outre:

IV. *Le sous-groupe H du groupe G est un sous-groupe distingué du groupe G, si et seulement si H est invariant relativement à tous les automorphismes intérieurs a_g, $g \in G$.*

En effet, si H est un sous-groupe distingué, alors $Hg = gH$ et donc $g^{-1}Hg = H$, i.e. est invariant relativement à tous les a_g, $g \in G$. Inversement, si H est invariant relativement à tous les a_g, $g \in G$, alors $g^{-1}Hg \subset H$ quel que soit $g \in G$. En substituant ici g^{-1} à g et multipliant les relations obtenues $gHg^{-1} \subset H$ à gauche par g^{-1} et à droite par g, nous obtenons $H \subset g^{-1}Hg$. Par conséquent, $H = g^{-1}Hg$, $gH = Hg$, de sorte que H est un sous-groupe distingué du groupe G.

Aussi les sous-groupes distingués sont-ils également appelés *sous-groupes invariants.*

Exemples et exercices

1. Soient X un cercle, Γ^1 l'ensemble de toutes les rotations du cercle X ; deux rotations ne sont pas considérées comme distinctes si elles aboutissent à une même position du cercle donné. Il est évident que chaque rotation $\gamma \in \Gamma^1$ se détermine par l'angle φ de rota-

tion du cercle X, et l'on peut supposer que $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. L'angle φ déterminé par la condition $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi + 2\pi n$, où $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant \leqslant \varphi < 2\pi$, correspond au produit $\gamma = \gamma_1\gamma_2$. Le groupe de transformations Γ^1 s'appelle *groupe des rotations du cercle*. Il est évident que le cercle X est homogène relativement à Γ^1. Le groupe Γ^1 est isomorphe au tore $\mathcal{T}^1$ (voir l'exemple 4 de 1.6) et leur isomorphisme f est donné par la formule

$$f:\ \varphi \to \alpha = \frac{1}{2\pi}\varphi.$$

2. Soient $X = (-\infty, +\infty)$, S l'ensemble de toutes les transformations à gauche

$$s:\ x \to sx = ax + b \tag{1.7.6}$$

de l'espace $(-\infty, +\infty)$, où a, b sont des nombres réels et $a > 0$; on voit facilement que S est un groupe; S contient deux sous-groupes: le groupe S^1 de toutes les transformations s_b: $x \to s_b x = = x + b$ et le groupe S^2 de toutes les transformations $s_a : x \to \to s_a x = ax$; par ailleurs S^1 est un sous-groupe distingué de S. Le groupe S est appelé *groupe des transformations linéaires de la droite* (plus exactement, groupe des transformations linéaires de la droite qui conserve l'orientation), S^1 est le *groupe des translations de la droite*, et enfin S^2 est le *groupe des homothéties de la droite*. X est homogène relativement à S^1 et donc à plus forte raison relativement à S.

Exercice. Calculer le groupe quotient S/S^1.

3. Soit Π^1 le plan complexe auquel le point à l'infini a été adjoint, F^1 l'ensemble de toutes les transformations à droite f: $z \to z' = = fz$ données par la formule

$$\begin{cases} z' = (az+b)/(cz+d) & \text{si } z \neq \infty \text{ et } z \neq -d/c, \\ z' = \infty & \text{si } z = -d/c, \\ z' = a/c & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

telles que

$$ad - bc \neq 0.$$

On voit facilement que F^1 est un groupe et que Π^1 est homogène relativement à F^1; on appelle F^1 *groupe des transformations rotationnelles du plan* Π^1.

4. Désignons par $\mathbf{C}^n$ l'ensemble de tous les systèmes $x = = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où l'on a $x_j \in \mathbf{C}^1$, $j = 1, \ldots, n$, et par G^n l'ensemble de toutes les transformations linéaires à gauche $g : x \to gx$

de l'espace $X = \mathbf{C}^n$, où

$$(gx)_j = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}x_k, \tag{1.7.7}$$

de déterminant $\det(g_{lk}) \neq 0$. On voit facilement que G^n est un groupe isomorphe au groupe $GL(n, \mathbf{C})$ et que $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ est homogène relativement à G^n.

5. Une permutation $s \in S_n$ (où S_n est le groupe symétrique) s'appelle *cycle* si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_{l-1} & k_l \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_l & k_1 \end{pmatrix}, \tag{1.7.8}$$

où tous les $k_1, \ldots, k_l$ sont distincts, i.e. si s applique k_1 sur k_2, k_2 sur $k_3, \ldots, k_{l-1}$ sur k_l et k_l sur k_1 et laisse invariants tous les nombres parmi $1, 2, \ldots, n$ s'ils diffèrent de $k_1, k_2, \ldots, k_l$; les $k_1, k_2, \ldots, k_l$ sont appelés *éléments* et le nombre l *longueur* du cycle. Un cycle de la forme (1.7.8) est désigné en abrégé par $(k_1, k_2, \ldots, k_l)$, sa longueur est l. Un cycle (k_1, k_2) de longueur 2 s'appelle *transposition* des éléments k_1, k_2. Montrer que:

a) Chaque permutation $s \in S_n$ se décompose en un produit de transpositions, les nombres des transpositions pour s donné étant toujours pair ou toujours impair, quelle que soit la décomposition. Une permutation s est dite *paire*, si elle se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions, et *impaire* si elle se décompose en un produit d'un nombre impair de transpositions.

b) L'ensemble P_n de toutes les permutations paires $s \in S_n$ est un sous-groupe distingué dans S_n; calculer le groupe quotient S_n/P_n. Le groupe P_n est appelé *groupe alterné*.

c) Chaque permutation $s \in S_n$ se décompose d'une manière unique en un produit de cycles sans éléments communs (l'ordre dans le produit ne joue aucun rôle, puisque les cycles sans éléments communs sont permutables). Deux permutations s, $s' \in S_n$ sont conjuguées si et seulement si les ensembles de longueurs des cycles qui figurent dans le produit sont les mêmes pour s et pour s'.

6. Ecrire pour le groupe S_3 la table de Cayley et toutes les classes des éléments conjugués.

7. Trouver toutes les classes des éléments conjugués pour les groupes $GL(n, \mathbf{C})$ et $SL(n, \mathbf{C})$.

1.8. Réalisation canonique d'un espace homogène. Il existe une méthode simple pour construire un espace homogène: il faut procéder de la manière suivante. Soit G un groupe et H son sous-groupe. Introduisons la notation $\widetilde{G} = G/H$ et faisons correspondre à chaque élément g_0 de G la transformation $\overline{g}_0$ de l'espace $\widetilde{G}$ déterminée

par la formule *)

$$\{g\}\,\bar{g}_0 = \{gg_0\}, \qquad (1.8.1)$$

où $\{g\}$, $\{gg_0\}$ sont les classes d'équivalence à droite du groupe G par le sous-groupe H à représentants g et gg_0 (voir 1.2). On vérifie facilement que l'application $g \to \bar{g}$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe $G(\tilde{G})$; par conséquent, l'image $\bar{G}$ du groupe G par cette application est un groupe (voir I de 1.6). Nous obtenons ainsi un espace $\tilde{G}$ à groupe de transformations $\bar{G}$. Cet espace est homogène relativement à $\bar{G}$. En effet, pour deux points donnés $\{g_1\}$, $\{g_2\}$, posons $g_0 = g_1^{-1}g_2$; alors

$$\{g_1\}\,\bar{g}_0 = \{g_1g_0\} = \{g_1g_1^{-1}g_2\} = \{g_2\},$$

de sorte que $\tilde{G} = G/H$ est un *espace homogène à groupe de transformations* $\bar{G}$. Si, en particulier, $H = \{e\}$, alors $\tilde{G} = G$, et nous obtenons la représentation régulière à droite $g \to \hat{g}$ du groupe G. Soit H_0 le noyau de l'homomorphisme $g \to \bar{g}$. En vertu de I de 1.6, H_0 est un sous-groupe distingué du groupe G. Par définition, H_0 est justement constitué par les éléments $g_0 \in G$ pour lesquels $\bar{g}_0$ est la transformation identique, i.e. pour lesquels $Hgg_0 = Hg$, quel que soit $g \in G$, ce qui est équivalent à la relation

$$gg_0g^{-1} \in H \text{ quels que soient } g \in G. \qquad (1.8.2)$$

En posant dans (1.8.2) $g = e$, nous concluons que $g_0 \in H$; par conséquent,

$$H_0 \subset H. \qquad (1.8.3)$$

Si $g_1 \in H_0$ et $g_2 \in H_0$, alors, en vertu de (1.8.2), nous avons $gg_1g^{-1} \in H$ et $gg_2g^{-1} \in H$ pour tous $g \in G$; donc $gg_1g_2^{-1}g^{-1} = (gg_1g^{-1}) \times (gg_2g^{-1})^{-1} \in H$, d'où l'on tire $g_1g_2^{-1} \in H_0$. Cela signifie que H_0 est un sous-groupe du groupe H. Ainsi, *le noyau de l'homomorphisme* $g \to \bar{g}$ *est un sous-groupe du groupe* H, *et même un sous-groupe distingué du groupe* G. Réciproquement, soit H_1 un sous-groupe du groupe H et en même temps un sous-groupe distingué du groupe G. Alors $gH_1g^{-1} \subset H_1 \subset H$ quels que soient $g \in G$ et donc $H_1 \subset H_0$. Par conséquent:

---

*) L'application $\bar{g}_0$ définie par la formule (1.8.1) est bijective et son image sera $\tilde{G}$, de sorte que $\bar{g}_0$ est une transformation. En effet, si $\{g_1\}\,\bar{g}_0 = \{g_2\}\,\bar{g}_0$, i.e. $\{g_1g_0\} = \{g_2g_0\}$, alors $g_1g_0 = hg_2g_0$ pour un certain $h \in H$. D'où l'on tire $g_1 = hg_2$, i.e. $\{g_1\} = \{g_2\}$. D'autre part, si $\{g_1\}$ est un élément quelconque de $\tilde{G}$, alors pour $g = g_1g_0^{-1}$ on a $\{g\}\,\bar{g}_0 = \{gg_0\} = \{g_1g_0^{-1}g_0\} = \{g_1\}$, de sorte que $\bar{g}_0$ applique $\tilde{G}$ sur $\tilde{G}$.

I. *Le noyau de l'homomorphisme $g \to \bar{g}$ est le sous-groupe maximal du groupe H qui est en même temps un sous-groupe distingué du groupe G.*

D'où l'on conclut:

II. *L'homomorphisme $g \to \bar{g}$ est un isomorphisme si et seulement si le groupe G ne contient aucun sous-groupe qui diffère de $\{e\}$ et qui soit en même temps un sous-groupe distingué du groupe G.*

Montrons maintenant que la méthode de construction d'un espace homogène décrite ci-dessus est dans un certain sens universelle. Soient X un espace homogène quelconque à groupe de transformations G et x_0 un point donné de l'espace X. Désignons par H l'ensemble de toutes les transformations h du groupe G qui laissent invariant le point x_0, de sorte que

$$x_0 h = x_0. \tag{1.8.4}$$

Il est évident que H est un sous-groupe du groupe G; on l'appelle *sous-groupe stationnaire* du point x_0. Puisque X est homogène, tout point $x \in X$ s'obtient de x_0 à l'aide d'une certaine transformation $g \in G$: $x = x_0 g$. Si g_1, g_2 sont deux transformations de ce genre, de sorte que $x = x_0 g_1$ et $x = x_0 g_2$, alors $x_0 g_2 = x_0 g_1$ et donc $x_0 g_2 g_1^{-1} = x_0$. Cela signifie que $g_2 g_1^{-1} \in H$, i.e. $g_2 \in H g_1$, et par conséquent g_1 et g_2 appartiennent à une même classe d'équivalence à droite du groupe G par H. Inversement, si g_1 et g_2 appartiennent à une même classe d'équivalence à droite par H, alors $g_2 = h g_1$ pour un certain $h \in H$; donc, en vertu de (1.8.4), $x_0 g_2 = x_0 h g_1 = x_0 g_1$, i.e. g_1 et g_2 appliquent x_0 dans un même point x. Nous avons donc établi la bijectivité de l'application f: $x \to \tilde{g}$ entre les points $x \in X$ et les classes d'équivalence à droite de G par H, i.e. les points $\tilde{g}$ de l'espace quotient $\tilde{G} = G/H$. La classe d'équivalence à droite $\tilde{g}$ qui correspond au point x est constituée par les transformations g pour lesquelles

$$x_0 g = x. \tag{1.8.5}$$

Trouvons les images des transformations g par l'application f. Soit $\{g\}$ l'image de $x \in X$ par f, de sorte que $x_0 g = x$. Alors $x g_0 = x_0 g g_0$, et par conséquent l'image du point $x g_0$ par f est la classe $\{g g_0\} = \{g\}\, \bar{g}_0$; ainsi, *l'application f envoie g_0 dans la transformation $\bar{g}_0$ de l'espace $\tilde{G} = G/H$.*

Soient H_1 un sous-groupe du groupe H et en même temps un sous-groupe distingué du groupe G, et $g_1 \in H_1$. Alors nous avons, en vertu de I, $\bar{g}_1 = e$, i.e. $\{g g_1\} = \{g\}$ pour chaque $g \in G$; en appliquant les deux parties de cette relation à l'élément x_0 et en posant $x_0 g = x$, nous obtenons $x g_1 = x$, quels que soient $x \in X$. Cette dernière relation signifie que $g_1 = e$, puisque G est un groupe de trans-

formations. Ainsi $H_1 = \{e\}$, et la correspondance $g \to \bar{g}$ est un isomorphisme en vertu de II. Nous avons donc démontré l'assertion suivante :

III. *Soient X un espace homogène à groupe de transformations G, H le groupe stationnaire d'un point fixe $x_0 \in X$ et f l'application qui fait correspondre à chaque point $x \in X$ la classe d'équivalence à droite $\tilde{g} = \{g\} \in G/H$ de tous les éléments g de G pour lesquels $x_0 g = x$. Alors f est une bijection de X sur G/H, et elle applique chaque transformation g_0 dans la transformation $\bar{g}_0$ déterminée par la formule*

$$\{g\}\,\bar{g}_0 = \{gg_0\} \tag{1.8.6}$$

de sorte que

$$f\,\{xg\} = f\,(x)\,\bar{g}. \tag{1.8.7}$$

L'application $g \to \bar{g}$ obtenue est un isomorphisme du groupe G sur le groupe $\bar{G}$ de toutes les transformations $\bar{g}$.

En général, on identifie les points $x \in X$ avec les classes correspondantes $f\,(x) \in G/H$. Alors, en vertu de la proposition III, X coïncide avec G/H, les transformations g avec les transformations $\bar{g}$ et le groupe G avec le groupe $\bar{G}$. Cette identification s'appelle *réalisation canonique* de l'espace homogène X à groupe de transformations G, et le couple lui-même $(G/H, \bar{G})$ *modèle canonique* de l'espace homogène.

Les raisonnements ci-dessus nous amènent à la définition suivante.

Deux espaces homogènes à groupe de transformations (X, G), (X', G') sont dits *équivalents* s'il existe : a) un isomorphisme φ: $g \to g'$ du groupe G sur le groupe G' ; b) une bijection f: $x \to x'$ de l'espace X sur X', tels que $x \to x'$ implique $xg \to x'g'$, i.e. tels que

$$f\,(xg) = f\,(x)\,\varphi\,(g). \tag{1.8.8}$$

On vérifie facilement que la relation d'équivalence ainsi définie satisfait à tous les axiomes des relations d'équivalence.

La proposition III signifie que *chaque espace homogène (X, G) est équivalent à un certain modèle canonique.*

IV. *Deux espaces homogènes (X, G), (X', G') sont équivalents si et seulement si on peut trouver :*

1) *un isomorphisme φ: $g \to g'$ du groupe G sur le groupe G' ;*

2) *des points $x_0 \in X$, $x'_0 \in X'$ tels que φ applique le sous-groupe stationnaire H du point x_0 sur le sous-groupe stationnaire H' du point x'_0.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient (X, G), (X', G') deux espaces homogènes équivalents et supposons que f, φ satisfont aux conditions

a), b). Soit x_0 un point fixe de X ; posons $x'_0 = f(x_0)$. Alors $x'_0 \in X'$. Soient H et H' les groupes stationnaires des points x_0 et x'_0. Alors φ applique H sur H'. En effet, $g \in H$ implique $x_0 g = x_0$, d'où l'on tire, en vertu de (1.8.8), $f(x_0) = f(x_0 g) = f(x_0)\varphi(g)$, i.e. $x'_0 = x'_0\varphi(g)$. Cela signifie que $\varphi(g) \in H'$. Réciproquement, $\varphi(g) \in H'$ implique $x'_0 = x'_0\varphi(g)$, i.e. $f(x_0) = f(x_0)\varphi(g) = f(x_0 g)$. D'où l'on tire $x_0 = x_0 g$ en vertu de la bijectivité de l'application f, i.e. $g \in H$. Nous avons donc démontré que φ, x_0, x'_0 vérifient les conditions 1), 2).

Inversement, supposons qu'il existe des φ, x_0, x'_0 satisfaisant aux conditions 1), 2). Construisons l'application f de l'espace X sur X' en posant pour $x = x_0 g$

$$f(x) = f(x_0 g) = x'_0\,\varphi(g). \tag{1.8.9}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de l'élément $g \in G$ pour lequel $x = x_0 g$. En effet, si l'on a également $x = x_0 g_1$ alors $g_1 = hg$, où $h \in H$, et donc

$$x'_0\varphi(g_1) = x'_0\varphi(hg) = x'_0\varphi(h)\,\varphi(g) = x'_0\varphi(g),$$

puisque $\varphi(h) \in H$. Il est également facile de montrer que f est une application bijective de X sur X'. Il découle de (1.8.9) que la condition (1.8.8) est satisfaite ; donc (X, G) et (X', G') sont équivalents.

Remarque. Une réalisation canonique analogue à III existe également pour un espace homogène à groupe G de transformations à gauche. Dans ce cas G/H désigne l'espace des classes d'équivalence à gauche par H, où H est le sous-groupe stationnaire défini d'une manière tout à fait analogue ; la transformation g_0 est appliquée par cette réalisation dans la transformation

$$\overline{g}_0 : \{g\} \to \{g_0 g\}.$$

Exemples et exercices

1. Soient Π^2 l'ensemble de tous les couples $z = \{z_1, z_2\}$, $z_1, z_2 \in \Pi^1$, et F^2 l'ensemble de toutes les applications $f: z \to z' = \{z'_1, z'_2\}$, où

$$\begin{aligned} &z'_i = (az_i + c)/(bz_i + d) && \text{si } z_i \neq \infty \text{ et } z_i \neq -d/b, \\ &z'_i = a/b && \text{si } z_i = \infty, \\ &z'_i = \infty && \text{si } z_i = -d/b,\ i = 1,\ 2;\ ad - bc \neq 0. \end{aligned} \tag{1.8.10}$$

On vérifie facilement que F^2 est un groupe, de sorte que Π^2 est un espace à groupe de transformations F^2. Trouver toutes les orbites de Π^2 relativement à F^2.

2. Soit Π'^2 l'ensemble de tous les couples $z = \{z_1, z_2\}$, $z_1, z_2 \in \Pi^1$ qui vérifient la condition $z_1 \neq z_2$, tandis que F^2 est constitué par les restrictions des transformations f (voir (1.8.10) ; elles seront toujours désignées par f) à l'ensemble Π'^2. Supposons en plus que $\widetilde{\Pi}'^2$

est l'ensemble de tous les couples $x = (z, \zeta)$, $z, \zeta \in \Pi^1$, $\zeta \neq \infty$, et $\widetilde{F}^2$ est l'ensemble de toutes les transformations $\widetilde{f}: x \to x' = \{z', \zeta'\}$, où

$$z' = (az + c)/(bz + d) \quad \text{si } z \neq \infty,\ z \neq -d/c,$$
$$z' = a/b \quad \text{si } z = \infty,$$
$$z' = \infty \quad \text{si } z = -d/b,$$
$$\zeta' = (bz + d)^2\, \zeta + b\,(bz + d).$$

Démontrer que:

1) Π'^2 est homogène relativement à F^2 et $\widetilde{\Pi}'^2$ l'est relativement à $\widetilde{F}^2$;

2) (Π'^2, F^2) et $(\widetilde{\Pi}'^2, \widetilde{F}^2)$ sont équivalents.

Trouver l'isomorphisme φ et l'application f qui envoient (Π'^2, F^2) sur $(\widetilde{\Pi}'^2, \widetilde{F}^2)$.

I n d i c a t i o n. Envisager l'application $\varphi: f \to \widetilde{f}$ où f et $\widetilde{f}$ correspondent aux mêmes a, b, c, d, et les groupes stationnaires des points $z_0 \in \Pi'^2$, $x_0 \in \widetilde{\Pi}'^2$, où $z_0 = (0, \infty)$, $x_0 = (0, 0)$.

1.9. Produit direct de groupes. On appelle *produit direct* des groupes $G_1, \ldots, G_n$ l'ensemble de tous les systèmes $g = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n$ dans lequel la multiplication est donnée par la formule

$$gg' = \{g_1g_1', g_2g_2', \ldots, g_ng_n'\}$$
$$\text{pour } g = \{g_1, \ldots, g_n\},\ g' = \{g_1', \ldots, g_n'\}. \tag{1.9.1}$$

Avec cette définition du produit on vérifie facilement que G est un groupe, l'élément neutre de G est $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, où $e_1, \ldots, e_n$ sont les éléments neutres de $G_1, \ldots, G_n$. Le produit direct des groupes $G_1, \ldots, G_n$ est désigné par $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$. L'application $g_1 \to \{g_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est un monomorphisme du groupe G_1 dans $G = G_1 \times \ldots \times G_n$; par conséquent, on identifie souvent g_1 avec $\{g_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Alors G_1 peut être envisagé comme un sous-groupe de G, et par des identifications analogues on peut envisager $G_2, \ldots, G_n$ comme étant des sous-groupes de G. Pour cette identification, chaque élément $g \in G$ se met de manière unique sous la forme

$$g = g_1g_2 \ldots g_n, \quad g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n, \tag{1.9.2}$$

où

$$g_jg_k = g_kg_j, \qquad j \neq k, \tag{1.9.3}$$

i. e. chaque $g_j \in G_j$ est permutable avec chaque $g_k \in G_k$ pour $j \neq k$. Inversement, s'il existe dans un certain groupe G des sous-groupes $G_1, \ldots, G_n$ qui vérifient les conditions (1.9.2), (1.9.3) alors on ap-

pelle G *produit direct des sous-groupes* $G_1, \ldots, G_n$ et l'on écrit

$$G = G_1 \times \ldots \times G_n. \qquad (1.9.4)$$

Ainsi la notation (1.9.4) possède deux significations différentes qui coïncident si l'on fait les identifications indiquées.

Si l'on a $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, où $G_1, \ldots, G_n$ sont des sous-groupes de G, alors il est facile de voir que chacun des sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ est un sous-groupe distingué de G.

EXEMPLES

1. Soit $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathbf{C}^1$ (voir l'exemple 1 de 1.1); alors $G_1 \times \ldots \times G_n$ est l'ensemble de tous les systèmes $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$, le produit de deux systèmes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ étant par définition $\{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n\}$. Le groupe $G_1 \times \ldots \times G_n$ est alors appelé *groupe complexe vectoriel de dimension n*; on le désigne par $\mathbf{C}^n$. On définit d'une manière analogue le *groupe vectoriel réel* $\mathbf{R}^n$ *de dimension n*. Seulement dans le cas de $\mathbf{R}^n$ les nombres x_j et x'_j sont réels. Le groupe $\mathbf{C}^n$ est isomorphe au groupe $\mathbf{R}^{2n}$ (démontrer!).

2. Soit $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathbf{C}'_0$ (voir l'exemple 2 de 1.1). Alors $G_1 \times \ldots \times G_n$ est l'ensemble de tous les systèmes $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_j \in \mathbf{C}'_0$, le produit de deux systèmes $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ étant $\{x_1x'_1, \ldots, x_nx'_n\}$. Dans ce cas le groupe $G_1 \times \ldots \times G_n$ est désigné par $\mathbf{C}^n_0$. On définit $\mathbf{R}^n_0$ d'une manière analogue.

3. Soit $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathcal{T}^1$ (voir l'exemple 4 de 1.6), alors $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ est l'ensemble de tous les systèmes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1)$, et le produit de deux systèmes $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ est $\{[x_1 + x'_1], \ldots, [x_n + x'_n]\}$. Dans ce cas $G_1 \times \ldots \times G_n$ s'appelle *tore de dimension n*; on le désigne par $\mathcal{T}^n$.

§ 2. Notions fondamentales et premiers théorèmes de la théorie des représentations

2.1. Définition d'une représentation. Soient G un groupe et X un espace linéaire complexe non nul. On appelle *représentation du groupe G dans l'espace X* toute application T qui fait correspondre à chaque élément g du groupe G un opérateur linéaire $T(g)$ de l'espace X *) de manière à satisfaire aux conditions

1) $T(e) = 1$, où 1 est l'opérateur identique dans X;

2) $T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$.

L'espace X est appelé *espace de représentation*, et les opérateurs $T(g)$, *opérateurs de représentation*. Les propriétés 1) et 2) impliquent

*) C'est-à-dire que $T(g)$ est une application linéaire de l'espace X dans X.

que $T(g^{-1})\, T(g) = T(g^{-1}g) = T(e) = 1$ et d'une manière analogue $T(g)\, T(g^{-1}) = 1$. Par conséquent, *chaque opérateur $T(g)$ est une bijection de X sur X et*

$$T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}. \tag{2.1.1}$$

Par conséquent, la propriété 2) signifie que *la représentation dans l'espace X est un homomorphisme du groupe G dans le groupe G_X* (i.e. dans le groupe de tous les opérateurs linéaires sur X qui appliquent bijectivement X sur X; voir l'exemple 4 de 1.1), et cette propriété peut être considérée comme une nouvelle définition de la représentation (voir I de 1.6).

Soient T une représentation du groupe G dans l'espace linéaire X et H un sous-groupe du groupe G. En envisageant les opérateurs $T(g)$ seulement pour $g = h \in H$, nous obtenons une représentation $T|_H$ du groupe H. On l'appelle *restriction de la représentation T au sous-groupe H*. Le sous-espace $M \subset X$ est *invariant relativement à la représentation T*, s'il est invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$ de cette représentation. Supposons que le sous-espace $M \subset X$ est invariant relativement à la représentation T du groupe G dans X. En considérant les restrictions des opérateurs $T(g)$ à M, nous obtenons une représentation du groupe G dans M. On l'appelle *restriction de la représentation T à M* et on la désigne par $T|_M$. En outre, les opérateurs $T(g)$ induisent des opérateurs $\tilde{T}(g)$ dans l'espace quotient $\tilde{X} = X/M$ et l'on vérifie aisément que la correspondance $g \to \tilde{T}(g)$ satisfait aux conditions 1), 2) de la définition d'une représentation. Par conséquent, cette correspondance définit une représentation, désignée par $\tilde{T}$, dans X/M. La représentation $\tilde{T}$ est dite représentation *induite* par T dans l'espace quotient X/M. Une représentation est dite *de dimension finie* si l'espace X de la représentation est de dimension finie; elle est *de dimension infinie* dans le cas contraire. Si X est de dimension finie, alors sa dimension dim X s'appelle *dimension* (ou aussi *degré*) *de la représentation T*; on la désigne par n_T. Si T est de dimension finie et $n_T = n$, alors, en choisissant dans X une base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, nous pouvons définir les opérateurs $T(g)$ par des matrices de degré n:

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t_{11}(g) & \ldots & t_{1n}(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1}(g) & \ldots & t_{nn}(g) \end{matrix} \right\|. \tag{2.1.2}$$

Cela signifie que

$$T(g)\, e_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)\, e_j. \tag{2.1.3}$$

Les conditions 1) et 2) s'écrivent alors sous la forme

$$t(e) = 1, \quad t(g_1 g_2) = t(g_1)\, t(g_2), \tag{2.1.4}$$

ou, de façon détaillée,

$$t_{jk}(e) = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

et

$$t_{jk}(g_1 g_2) = \sum_{s=1}^{n} t_{js}(g_1)\, t_{sk}(g_2). \tag{2.1.6}$$

La matrice $t(g)$ est appelée *matrice de la représentation* T, et les fonctions $t_{jk}(g)$, *éléments matriciaux* de la représentation T relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$. Réciproquement, supposons qu'une fonction matricielle $g \to t(g)$ d'ordre n fixe est donnée sur le groupe G et qu'elle satisfait aux conditions (2.1.4). Dans l'espace numérique $\mathbf{C}^n$ faisons correspondre à chaque $g \in G$ un opérateur $T(g)$ de matrice $t(g)$ de sorte que

$$T(g):\ x_j \to x'_j = \sum_{k=1}^{n} t_{jk}(g)\, x_k \tag{2.1.7}$$

pour $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbf{C}^n$. Il découle de (2.1.4) que l'application $g \to T(g)$ est une représentation du groupe G. Par conséquent, une représentation de dimension finie peut être également considérée comme une fonction matricielle $g \to T(g)$ qui satisfait aux conditions (2.1.4); en particulier, une représentation unidimensionnelle peut être assimilée à une fonction numérique $g \to T(g)$ qui satisfait aux conditions (2.1.4). Si le groupe G lui-même est constitué par des matrices g d'un ordre fixe n, par exemple $GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C})$ (exemples 5 et 6 de 1.1), alors une des représentations les plus simples s'obtient en posant $T(g) = g$. Cette représentation s'appelle représentation *identique*.

Une représentation dans l'espace X est dite *irréductible*, si X ne possède pas de sous-espace différent de (0) et de X tout entier, qui soit invariant relativement aux opérateurs de représentation; dans le cas contraire, la représentation est dite *réductible*.

Il est évident qu'une représentation unidimensionnelle est toujours irréductible; nous verrons plus loin qu'il existe des groupes qui possèdent des représentations multidimensionnelles, et même de dimension infinie, qui sont irréductibles.

On obtient la représentation la plus simple en posant $T(g) = 1$ pour chaque $g \in G$; on l'appelle *représentation unité*. Dans le cas d'une représentation unité T dans X chaque sous-espace $M \subset X$ est invariant relativement à T et par conséquent la représentation unité est irréductible seulement lorsqu'elle est de dimension 1.

I. *Soit* T *une représentation dans un espace de dimension finie* X; *il existe dans* X *un sous-espace* M, $M \neq (0)$, *tel que la restriction de la représentation* T *à* M *est irréductible.*

D é m o n s t r a t i o n. Si T est elle-même irréductible, alors l'assertion est triviale et $M = X$. Supposons que T est réductible. Il existe alors dans X un sous-espace $M_1 \neq (0)$, $M_1 \neq M$, invariant relativement à T. Considérons la restriction de T à M_1. Si cette restriction est irréductible, alors l'assertion est démontrée et on peut poser $M = M_1$. Par contre, si cette restriction est réductible, il doit exister alors un sous-espace $M_2 \subset M_1$, $M_2 \neq (0)$, $M_2 \neq M_1$, invariant relativement à T. Puisque $\dim X > \dim M_1 > \dim M_2 > > \ldots$, on obtiendra après un nombre fini d'étapes (n'excédant pas $\dim X$) un sous-espace invariant M_k, sur lequel la restriction de la représentation T est irréductible.

Exemples et exercices

1. Soit $G = \mathbf{R}^1$ (voir l'exemple 1 de 1.1). Pour chaque nombre complexe fixe k la fonction $\alpha \to e^{k\alpha}$ sur $\mathbf{R}^1$ satisfait aux conditions (2.1.4) et définit donc une représentation unidimensionelle du groupe $\mathbf{R}^1$.

D'une manière analogue, la fonction $z = x + iy \to e^{ik_1x}e^{ik_2y}$ sur $\mathbf{C}^1$ (voir l'exemple 1 de 1.1) définit une représentation unidimensionnelle du groupe $\mathbf{C}^1$, quels que soient les nombres complexes fixes k_1 et k_2.

2. Démontrer que les fonctions (voir l'exemple 2 de 1.1):

a) $a \to e^{k(\ln|a|)}(\text{sign } a)^{\varepsilon}$ sur $\mathbf{R}_0^1$, quels que soient le nombre complexe fixe k et le nombre $\varepsilon = 0$ ou 1;

b) $z \to e^{k \ln|z|}(\arg z)^n$ sur $\mathbf{C}_0^1$, quels que soient le nombre complexe fixe k et le nombre entier n, définissent une représentation unidimensionnelle des groupes $\mathbf{R}_0^1$ et $\mathbf{C}_0^1$ respectivement.

3. La fonction $\varphi \to e^{in\varphi}$ sur le groupe Γ^1 des rotations du cercle (voir l'exemple 1 de 1.6) pour chaque n entier fixe définit une représentation unidimensionnelle du groupe Γ^1.

4. Démontrer que les représentations identiques des groupes $GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ sont irréductibles.

5. Démontrer que: a) la fonction matricielle $\alpha \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}$ définit une représentation T réductible de dimension 2 du groupe $\mathbf{R}^1$; b) il existe un sous-espace unidimensionnel M et un seul invariant relativement à T. Trouver ce sous-espace M et démontrer que: c) la restriction de T à M est la représentation unité; d) la représentation $\tilde{T}$ dans l'espace quotient par M, induite par la représentation T, est une représentation unité.

2.2. Equivalence. Deux représentations T, S du groupe G dans les espaces X et Y sont dites *équivalentes* (ce qu'on note $T \sim S$) s'il existe un opérateur linéaire A de X dans Y qui applique bijectivement X sur Y et satisfait à la condition

$$AT(g) = S(g)A \quad \text{quels que soient} \quad g \in G. \qquad (2.2.1)$$

En particulier, on peut avoir $Y = X$, de sorte que l'on peut parler de représentations équivalentes d'un même espace. La condition (2.2.1) signifie que $AT(g)x = S(g)Ax$ quels que soient $x \in X$, $g \in G$, i.e. si A applique x dans y (i.e. $Ax = y$), alors A applique également $T(g)x$ dans $S(g)y$ (i.e. $AT(g)x = S(g)y$). Il est évident que la condition (2.2.1) peut être écrite sous la forme

$$T(g) = A^{-1}S(g)A \quad \text{quels que soient } g \in G. \tag{2.2.2}$$

On vérifie facilement que la notion d'équivalence des représentations introduite ci-dessus satisfait à tous les axiomes des relations d'équivalence. La non-équivalance de deux représentations T et S est notée $T \nsim S$.

I. *Si X est de dimension finie et $n_T = n$, alors l'équivalence de S et T implique que l'on a aussi $n_S = n$ et que les éléments matriciaux des représentations S et T coïncident si les bases dans X et Y sont choisies de manière appropriée.*

En effet, si $e_1, \ldots, e_n$ est une base quelconque dans X, alors, en posant $f_j = Ae_j$, $j = 1, \ldots, n$, nous obtiendrons une base de Y. En appliquant aux deux membres de l'égalité (2.1.3) l'opérateur A, et en utilisant la condition (2.2.1) on obtient

$$S(g)f_k = S(g)Ae_k = AT(g)e_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)Ae_j = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)f_j.$$

Réciproquement, si $n_T = n_S = n$ et $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ sont des bases dans X et Y telles que les éléments matriciaux de T et S coïncident relativement à ces bases, alors, en posant $A(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = c_1f_1 + \ldots + c_nf_n$ (où $c_1, \ldots, c_n$ sont des nombres complexes quelconques), nous obtiendrons un opérateur A qui applique bijectivement X sur Y et satisfait à la condition (2.2.1).

En particulier, *des représentations unidimensionnelles équivalentes se définissent par une même fonction numérique $t(g)$.*

II. *Si $S \sim T$ et T est irréductible, alors S l'est aussi.*

Cette assertion découle directement des définitions de l'irréductibilité et de l'équivalence, et sera laissée au lecteur en guise d'exercice.

Lemme 1 (lemme de Schur). *Soient T et S des représentations irréductibles du groupe G dans les espaces X et Y respectivement et supposons que A est un opérateur de X dans Y qui satisfait à la condition*

$$AT(g) = S(g)A \quad \textit{quels que soient } g \in G. \tag{2.2.3}$$

Alors ou bien A applique bijectivement X sur Y et donc $T \sim S$, ou bien $A = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $L = AX$; alors L est un sous-espace de Y. Il est invariant relativement à tous les $S(g)$, puisqu'en vertu de (2.2.3) on a $S(g)Ax = AT(g)x \in AX = L$ quels que soient $g \in G$, $x \in X$. Mais alors l'irréductibilité de S implique ou bien que $L = (0)$ ou bien que $L = Y$. Dans le premier cas $A = 0$. Considérons le cas où $L = Y$. Alors A applique X sur Y. Démontrons que A est bijectif. Posons $M = \{x : Ax = 0\}$; il suffit de démontrer que $M = (0)$. Remarquons pour cela que M est invariant relativement à T. En effet, $x \in M$ implique $Ax = 0$. Mais alors d'après (2.2.3), on a $AT(g)x = S(g)Ax = S(g)0 = 0$, de sorte que $T(g)x \in M$ également. En vertu de l'irréductibilité de la représentation T, on conclut que soit $M = (0)$, soit $M = X$. Mais le deuxième cas est impossible, puisqu'il signifie que $Y = L = AX = (0)$. Ceci achève la démonstration du lemme.

LEMME 2. *Soit T une représentation irréductible de dimension finie du groupe G dans l'espace X. Alors chaque opérateur linéaire B dans l'espace X qui est permutable à tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$, est de la forme $B = \lambda 1$, où λ est un nombre.*

D é m o n s t r a t i o n. Par hypothèse,

$$BT(g) = T(g)B \quad \text{quels que soient} \quad g \in G. \tag{2.2.4}$$

Puisque B est un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie, il possède au moins une valeur propre λ. Posons $A = B - \lambda 1$; alors A n'est pas une bijection sur X. D'autre part, il découle de (2.2.4) que l'on a $AT(g) = T(g)A$ pour tous les $g \in G$, i.e. A satisfait à la condition (2.2.3) pour $S(g) = T(g)$, $Y = X$. Puisque A n'est pas bijectif, en vertu du lemme 1 on a $A = 0$, i.e. $B - \lambda 1 = 0$, $B = \lambda 1$.

Donnons une autre démonstration du lemme 2, sans nous servir du lemme 1. Soit de nouveau λ une valeur propre de l'opérateur B. Posons $L = \{x : x \in X : Bx = \lambda x\}$; ici $L \neq 0$, puisque λ est une valeur propre de l'opérateur B. En outre L est invariant relativement à T. En effet, si $x \in L$, alors $Bx = \lambda x$. D'où l'on tire $BT(g)x = T(g)Bx = T(g)\lambda x = \lambda T(g)x$ de sorte que l'on a également $T(g)x \in L$. En vertu de l'irréductibilité de la représentation T, on peut conclure que $L = X$, i.e. $Bx = \lambda x$ sur tout l'espace X, $B = \lambda 1$.

COROLLAIRE. *Toute représentation irréductible de dimension finie d'un groupe commutatif est unidimensionnelle.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit T une représentation irréductible d'un groupe commutatif G dans un espace de dimension finie X. Alors, quels que soient g_0, $g \in G$, on a $T(g_0)T(g) = T(g_0 g) = T(gg_0) = T(g)T(g_0)$, i.e. chaque opérateur $T(g_0)$ est permutable avec tous les $T(g)$, de sorte que $T(g_0) = \lambda(g_0)1$ d'après

le lemme 2. Si dim $X > 1$, chaque sous-espace de X sera invariant relativement à tous les opérateurs $T(g) = \lambda(g)\,1$, ce qui est contraire à l'irréductibilité de la représentation T ; par conséquent, dim $X = 1$.

Ainsi, une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe commutatif est unidimensionnelle, et donc elle se définit par une fonction numérique $t(g)$ qui satisfait aux conditions

$$t(e) = 1, \quad t(g_1 g_2) = t(g_1)\, t(g_2). \tag{2.2.5}$$

Toute fonction numérique donnée sur un groupe commutatif G et vérifiant les conditions (2.2.5) s'appelle *caractère* sur le groupe G.

EXEMPLES ET EXERCICES

1. Démontrer que chaque représentation de dimension finie d'un groupe commutatif contient un sous-espace invariant de dimension 1.

2. Soit $G = S_3$ et supposons que la représentation $g \to T(g)$ du groupe G dans $\mathbf{C}^3$ est définie par la règle suivante : si $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ ((i, j, k) est une permutation des nombres 1, 2, 3), alors $T(g)\,e_1 = e_i$, $T(g)\,e_2 = e_j$, $T(g)\,e_3 = e_k$. Trouver des sous-représentations irréductibles de la représentation T.

3. Démontrer que chaque représentation irréductible d'un groupe cyclique G d'ordre n à l'élément générateur a est de la forme $T_m(a^k) = e^{2\pi mki/n}$, où $m = 0, 1, \ldots, n-1$ ($T_m(a^k)$ est l'opérateur de multiplication par le nombre $e^{2\pi mki/n}$ dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}$ de dimension 1).

2.3. Représentations adjointes. Soient X, Y deux espaces linéaires. On appelle *forme bilinéaire* sur le couple X, Y la fonction numérique sur $X \times Y : \{x, y\} \to (x, y)$ qui satisfait aux conditions suivantes *)

1) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$,

2) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y)$,

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

4) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$,

quels que soient $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ et le nombre α. En particulier, Y peut coïncider avec X, et l'on peut alors envisager une forme bilinéaire sur X. Si (x, y) est une forme bilinéaire sur un

*) Nous nous écartons ici de la terminologie usuelle, selon laquelle on appelle forme bilinéaire une fonction (x, y) qui satisfait aux conditions 1), 3), 4) et, à la place de la condition 2), à la condition 2′) : $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$. Ainsi, N. B o u r b a k i [1] appelle une fonction (x, y) qui satisfait à nos conditions 1) à 4), *forme sesquilinéaire*.

couple d'espaces linéaires X, Y, on dit alors que le vecteur $x \in X$ est *orthogonal à* $y \in Y$ *relativement à* (x, y) si $(x, y) = 0$, et on le note $x \perp y$. Deux ensembles $E \subset X$ et $E_1 \subset Y$ sont dits *orthogonaux relativement à* (x, y) et l'on écrit $E \perp E_1$, si chaque vecteur de E est orthogonal à chaque vecteur de E_1. En outre, si E un sous-ensemble de X, alors l'ensemble de tous les $y \in Y$ orthogonaux à E, est dit *supplémentaire orthogonal de E dans Y* relativement à (x, y); on le désigne par $E^{\perp}_{(x,y)}$ ou en abrégé $E^{\perp}$, s'il est clair de quelle forme il s'agit. On définit d'une manière analogue le supplémentaire orthogonal $E_1^{\perp}$ à $E_1 \subset Y$ dans X relativement à (x, y). Il découle des propriétés 1) à 4) que $E^{\perp}$ et $E_1^{\perp}$ sont des sous-espaces respectivement dans Y et X.

Le couple X, Y muni d'une forme bilinéaire (x, y) est dit *en dualité relativement à la forme* (x, y), si en plus des conditions 1) à 4) on a

5) *si* $(x_0, y) = 0$, *alors* $x_0 = 0$ *pour tout* $y \in Y$;

6) *si* $(x, y_0) = 0$, *alors* $y_0 = 0$ *pour tout* $x \in X$.

La condition 5) signifie que $Y^{\perp}_{(x,y)} = (0)$, et la condition 6) que $X^{\perp}_{(x,y)} = (0)$. Si (x, y) est une forme bilinéaire sur le couple X, Y, alors la fonction $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$ est une forme bilinéaire sur le couple Y, X.

On peut donc conclure:

I. *Si le couple* X, Y *est en dualité relativement à la forme* (x, y), *alors le couple* Y, X *est en dualité relativement à la forme* $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$.

Considérons en guise d'exemple le cas des espaces X et Y de dimension finie. Supposons que $\dim X = m$, $\dim Y = n$ et soient $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_m$ des bases de X et Y respectivement. Alors pour $x \in X$, $y \in Y$ on a

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k, \tag{2.3.1}$$

où ξ_j, η_k sont des nombres; de là et des propriétés 1) à 4) on déduit que

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \overline{\eta}_k, \tag{2.3.2}$$

où $a_{jk} = (e_j, f_k)$. Réciproquement, pour un choix arbitraire des nombres a_{jk}, les formules (2.3.1), (2.3.2) définissent une forme bilinéaire sur le couple X, Y. Les nombres

$$a_{jk} = (e_j, f_k) \tag{2.3.3}$$

s'appellent *coefficients de la forme* (x, y) *relativement aux bases* $e_1, \ldots, e_m$; $f_1, \ldots, f_n$.

Voyons maintenant à quelles conditions le couple X, Y est en dualité relativement à la forme (2.3.2).

Posons $y_0 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^0 f_k$. La condition 6) signifie que l'égalité

$$\sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \overline{\eta}_k^0 \Big) \xi_j = 0 \text{ quels que soient } \xi_j \tag{2.3.4}$$

implique $\eta_k^0 = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Mais (2.3.4) est équivalente à un système d'équations homogènes

$$\sum_{k=0}^{n} a_{jk} \overline{\eta}_k^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.3.5}$$

Par conséquent, la condition 6) signifie que le système (2.3.5) possède seulement la solution triviale. Pour cela il faut et il suffit que le rang de la matrice

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{2.3.6}$$

soit non inférieur à n, en particulier on doit avoir $m \geqslant n$. En changeant les rôles de x et y dans ce raisonnement et en appliquant la condition 5), nous concluons que l'on doit avoir également $n \geqslant m$. Ainsi $n = m$ et det $a \neq 0$. Mais dans ce cas on peut simplifier l'expression (2.3.2). En effet, choisissons dans Y une nouvelle base $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ suivant les formules $f'_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} f_j$, où

$$\overline{b} = \begin{Vmatrix} \overline{b}_{11} & \ldots & \overline{b}_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \overline{b}_{n1} & \ldots & \overline{b}_{nn} \end{Vmatrix}$$

est la matrice inverse de a; elle existe puisque det $a \neq 0$. Alors les coefficients de la forme (x, y) relativement aux bases $e_1, \ldots, e_n$; $f'_1, \ldots, f'_n$ seront

$$a'_{jk} = (e_j, f'_k) = \Big(e_j, \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k} f_\nu\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} (e_j, f_\nu) \overline{b}_{\nu k} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu} \overline{b}_{\nu k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

et donc $(x, y)=\sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta'_j}$, où les η'_j sont les coordonnées du vecteur y dans la base $f'_1, \ldots, f'_k$. Nous avons démontré l'assertion suivante :

II. *Pour que deux espaces X, Y de dimension finie soient en dualité il faut et il suffit que* $\dim X = \dim Y$. *Dans ce cas la forme* (2.3.2) *ne détermine la dualité du couple X, Y pour $n = m = \dim X = \dim Y$ que si son déterminant est nul.*

Pour un choix approprié des bases $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_n$, l'expression (2.3.2) *pour la forme (x, y) s'écrit*

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k}, \tag{2.3.7}$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sont les coordonnées des vecteurs x et y relativement à ces bases.

Revenons au cas général. Soient X, Y des espaces linéaires en dualité relativement à la forme (x, y), et soient T, S des représentations du groupe G respectivement dans X et Y. La représentation S est dite *adjointe à la représentation T relativement à* (x, y), si l'on a

$$(T(g)\, x,\ S(g)\, y) = (x, y) \text{ quels que soient } g \in G,\ x \in X,\ y \in Y. \tag{2.3.8}$$

III. *La condition* (2.3.8) *est équivalente à la condition*

$$(T(g^{-1})\, x,\ y) = (x,\ S(g)\, y) \text{ quels que soient } g \in G,\ x \in X,\ y \in Y. \tag{2.3.9}$$

Pour la démonstration, il suffit de remplacer dans (2.3.8) x par $T(g^{-1})\, x$ et de remarquer que $T(g)$ est une bijection de X sur X.

IV. *Si X et Y sont en dualité relativement à la forme (x, y), T est une représentation dans X et il existe dans Y une représentation adjointe à T relativement à (x, y), alors cette représentation est unique.*

Démonstration. Soient S et S' des représentations dans Y adjointes à T relativement à (x, y). Alors en vertu de (2.3.9) on a $(T(g^{-1})\, x, y) = (x, S(g)\, y)$ et $(T(g^{-1})\, x, y) = (x, S'(g)\, y)$ et donc $0 = (x, (S(g) - S'(g))\, y)$ quels que soient $g \in G$, $x \in X$, $y \in Y$. De là et de la condition 6) de 2.3 on tire $(S(g) - S'(g))\, y = 0$, quels que soient $y \in Y$, $g \in G$; par conséquent, $S(g) = S'(g)$ et $S = S'$.

Nous déduisons ensuite de I que:

V. *Si S est adjoint à T relativement à (x, y), alors T est adjoint à S relativement à* $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$.

Considérons plus en détail le cas des espaces X, Y de dimension finie. Supposons que la représentation S dans l'espace Y est

adjointe à la représentation T dans l'espace X relativement à la forme (x, y). Choisissons dans X et Y des bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ (où $n = \dim X = \dim Y$) de manière à satisfaire aux relations (2.3.7) (voir II) et donc

$$(e_j, f_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases} \qquad (2.3.10)$$

Soient $t_{jk}(g)$, $s_{jk}(g)$ les éléments matriciaux des représentations T et S relativement aux bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ respectivement, de sorte que

$$T(g)\, e_j = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\, e_\nu, \qquad S(g)\, f_k = \sum_{\mu=1}^{n} s_{\mu k}(g)\, f_\mu \qquad (2.3.11)$$

(voir (2.1.3)). En vertu des propriétés 1) à 4) de la forme (x, y), la condition (2.3.9) est équivalente au système de relations

$$(T(g^{-1})\, e_j, f_k) = (e_j, S(g)\, f_k), \quad j, k = 1, \ldots, n, \qquad (2.3.12)$$

qui se réduisent, en vertu de (2.3.10) et (2.3.11), aux relations

$$t_{kj}(g^{-1}) = \overline{s_{jk}(g)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \quad n = \dim X = \dim Y. \qquad (2.3.13)$$

Ainsi:

VI. *Deux représentations T et S de dimension finie dans les espaces X et Y sont adjointes relativement à une certaine forme (x, y), si et seulement si leurs éléments sont liés par les relations* (2.3.13), *les bases dans X et Y étant choisies de manière appropriée.*

Il découle de VI:

VII. *Si X et Y sont des espaces de dimension finie, en dualité relativement à la forme (x, y) et si une représentation T du groupe G dans Y est donnée, alors il existe dans Y une représentation unique S du groupe G adjointe à la représentation T.*

Démonstration. L'unicité de S a été démontrée dans IV; démontrons son existence. Posons $n = \dim X = \dim Y$ et choisissons des bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans X et Y de manière à satisfaire à (2.3.7). Soient $t_{jk}(g)$ les éléments matriciaux de la représentation T par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$ et $t(g)$ la matrice correspondante. Définissons l'opérateur $S(g)$ dans Y à l'aide des éléments matriciaux $s_{jk}(g)$ relativement à la base $f_1, \ldots, f_n$, en posant

$$s_{jk}(g) = \overline{t_{kj}(g^{-1})}, \quad j, k = 1, \ldots, n; \qquad (2.3.14)$$

soit $s(g)$ la matrice de l'opérateur $S(g)$. Les relations (2.3.14) signifient que $s(g) = t(g^{-1})^*$, où $*$ désigne la matrice conjuguée hermitienne.

Démontrons que l'application $g \to S(g)$ définit une représentation du groupe G dans Y. En effet,

$$s(e) = t(e)^* = 1^* = 1, \quad s(g_1g_2) = t((g_1g_2)^{-1})^* =$$
$$= t(g_2^{-1}g_1^{-1})^* = (t(g_2^{-1})\, t(g_1^{-1}))^* = s(g_1)\, s(g_2).$$

D'où l'on tire

$$S(e) = 1, \quad S(g_1g_2) = S(g_1)\, S(g_2).$$

Enfin, les relations (2.3.14) sont équivalentes aux relations (2.3.13); par conséquent S est adjoint à T relativement à (x, y).

VIII. *Soient deux représentations T et S de dimension finie adjointes; T est irréductible si et seulement si S est irréductible.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient X et Y les espaces des représentations T et S, de sorte que X et Y sont en dualité relativement à une certaine forme (x, y) et $\dim X = \dim Y$. Soit M un sous-espace de Y, invariant relativement à S. Posons $L = M^{\perp}$. Il est évident que L est un sous-espace de X; en outre, L est invariant relativement à T. En effet, si $x \in L$, on a $(x, y) = 0$ quel que soit $y \in M$ et donc également $(x, S(g^{-1})\, y) = 0$ pour tous les $y \in M$, puisque par hypothèse M est invariant relativement à S. Mais alors, en vertu de (2.3.9), nous avons pour tous les $y \in M$

$$(T(g)\, x, y) = (x, S(g^{-1})\, y) = 0$$

et donc également $T(g)\, x \in L$.

Supposons maintenant que T est irréductible; alors ou bien $L = (0)$, ou bien $L = X$. Dans le premier cas, on a pour X et M la condition 5) de la définition de la dualité (voir p. 39) et il est évident que l'on a également la condition 6), de sorte que X et M sont en dualité relativement à (x, y); d'après II ceci est impossible lorsque $\dim M < \dim Y = \dim X$, i.e. lorsque $M \neq Y$. Dans le deuxième cas, si $y \in M$, alors $(x, y) = 0$ quel que soit $x \in X$, d'où l'on tire à l'aide de la condition 6) que $y = 0$; par conséquent, $M = (0)$. Ainsi, si T est irréductible, il n'existe pas dans Y de sous-espaces invariants relativement à S autres que $M = (0)$ ou $M = Y$. Par conséquent, S est irréductible. En changeant les rôles de T et S dans le raisonnement précédent, on déduit que l'irréductibilité de S implique celle de T.

REMARQUE. D'une manière analogue à ce qui précède, on peut introduire la dualité relativement à une forme (x, y) qui satisfait aux conditions 1), 3), 4) et en outre, à la condition 2') à la place de la condition 2), i.e. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ (voir la note au bas de la page 40). Une représentation S dans l'espace X est dite *contragrediente* à la représentation T dans l'espace Y relativement à une forme (x, y) définie comme ci-dessus, si l'on a $(T(g)\, x, S(g)\, y) = (x, y)$ quels que soient $g \in G$, $x \in X$, $y \in Y$. Toutes les propositions de 2.3

restent vraies pour les représentations contragredientes, mais les formules (2.3.2), (2.3.7), (2.3.9), (2.3.13) doivent être remplacées respectivement par les formules

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \eta_k, \tag{2.3.2'}$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \tag{2.3.7'}$$

$$(T(g)\, x, y) = (x, S(g^{-1})\, y), \tag{2.3.9'}$$

$$t_{kj}(g) = s_{jk}(g^{-1}) \tag{2.3.13'}$$

et toutes les démonstrations de 2.3 peuvent être répétées presque mot pour mot pour cette nouvelle forme (x, y).

EXEMPLES

1. Soient T une représentation de dimension finie du groupe G dans l'espace vectoriel X, S une représentation du groupe G dans l'espace Y, adjointe à la représentation T. Montrer que l'espace vectoriel $L \subset X$ est invariant relativement à T si et seulement si le sous-espace $M = L^{\perp} \subset Y$ est invariant relativement à la représentation S. (Indication: voir la démonstration de VIII.)

2. Démontrer que chaque représentation de dimension n d'un groupe commutatif contient un sous-espace invariant de dimension $n - 1$.

3. Trouver la représentation, adjointe à la représentation unidimensionnelle T du groupe G.

4. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence des représentations T et T^*, où T est une représentation unidimensionnelle du groupe G, tandis que T^* est la représentation adjointe à T.

5. Soient G un groupe de matrices, et T sa représentation identique. Dire si la relation $T \sim T^*$ est vraie (T^* étant la représentation adjointe à T) lorsque G est le groupe:

a) $GL(n, \mathbf{R})$; b) $SL(n, \mathbf{R})$; c) $U(n)$; d) $O(n)$; e) $SU(n)$; f) $SO(n)$.

2.4. Somme directe de représentations. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ des espaces linéaires et $X = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_m$ leur somme directe, de sorte que chaque vecteur x de X se met uniquement sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_m$, où $x_k \in X_k$ (voir, par exemple , A. Kurosh [1]). Supposons donnée dans chaque X_k une représentation T^k d'un même groupe G. Définissons l'opérateur linéaire $T(g)$ dans X en posant

$$T(g)(x_1 + \ldots + x_m) = T^1(g)\, x_1 + \ldots + T^m(g)\, x_m. \tag{2.4.1}$$

Il est évident que

$$T(e) = 1, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2),$$

de sorte que l'application $g \to T(g)$ est une représentation du groupe G dans l'espace X. La représentation T dans l'espace $X = X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_m$ définie par la formule (2.4.1) s'appelle *somme directe des représentations* $T^1, \ldots, T^m$; on la désigne par $T^1 \dotplus \ldots \dotplus T^m$. Il est évident que chaque X_k est un sous-espace de X, invariant relativement à T, et la restriction de T à X_k est T^k.

Considérons plus en détail le cas où les espaces X_k, $k = 1, \ldots, m$, sont de dimension finie. Soit $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ une base de X_k et soient $t_{jl}^k(g)$, $j, l = 1, \ldots, n_k$ les éléments matriciaux de la représentation T^k relativement à cette base; soit $t^k(g)$ la matrice correspondante. Alors la réunion de toutes ces bases est une base dans $X = X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_m$ et en vertu de (2.4.1) et (2.1.3)

$$T(g) e_j^k = T^k(g) e_j^k = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}^k(g) e_\nu^k.$$

Par conséquent, si l'on dispose les bases $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ par ordre de croissance de l'indice k, la matrice de l'opérateur $T(g)$ relativement à la base obtenue de l'espace X sera

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t_{11}^1(g) & \ldots & t_{1n_1}^1(g) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_1 1}^1(g) & \ldots & t_{n_1 n_1}^1(g) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & t_{11}^2(g) & \ldots & t_{1n_2}^2(g) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & t_{n_2 1}^2(g) & \ldots & t_{n_2 n_2}^2(g) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & t_{11}^m(g) & \ldots & t_{1n_m}^m(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & t_{n_m 1}^m(g) & \ldots & t_{n_m n_m}^m(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.4.2}$$

ou, dans une notation plus concise,

$$t(g) = \begin{Vmatrix} t^1(g) & & & \\ & t^2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^m(g) \end{Vmatrix}, \qquad (2.4.3)$$

où les éléments non indiqués sont tous nuls. Ainsi,

I. *Soit T la somme directe des représentations $T^1, \ldots, T^m$ dans les espaces $X_1, \ldots, X_m$ de dimension finie. Si $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ est une base de X^k, alors, en disposant ces bases par ordre croissant de l'indice k, on obtiendra une base de $X = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_m$ pour laquelle la matrice de l'opérateur $T(g)$ aura la forme quasidiagonale* (2.4.3), *et les matrices $t^k(g)$ des représentations X^k relativement aux bases $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ se disposeront le long de la diagonale.*

Revenons au cas général. Une représentation T dans l'espace X est dite *complètement réductible*, si T est la somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles. On dit également que T *se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.* Nous n'excluons pas ici le cas où la somme directe est constituée par un terme unique, en ce sens les représentations irréductibles sont également considérées comme complètement réductibles. La représentation T est appelée *multiple de la représentation irréductible* T^1, ce que l'on écrit $T = nT^1$, si elle est la somme de n représentations qui sont toutes équivalentes à une même représentation irréductible T^1. En général, si une représentation complètement réductible T est la somme directe de représentations irréductibles, parmi lesquelles n_1 sont équivalentes à T^1, n_2 équivalentes à $T^2, \ldots, n_p$ équivalentes à T^p et il n'y a aucune autre représentation irréductible, on écrit alors

$$T = n_1T^1 \dot{+} n_2T^2 \dot{+} \ldots \dot{+} n_pT^p$$

et l'on dit que T^j *participe à* (ou *est contenu dans*) T avec multiplicité n_j $(j = 1, \ldots, p)$.

On comprend sans peine qu'il existe des représentations réductibles (et même de dimension finie) qui ne soient pas complètement réductibles. Il suffit de considérer la représentation de dimension 2 $\alpha \to T(\alpha)$ du groupe $\mathbf{R}^1$ (voir l'exemple 1 de 2.1) dans l'espace $X = \mathbf{C}^2$, qui a pour matrice

$$t(\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \qquad (2.4.4)$$

Les conditions 1), 2) de la définition d'une représentation sont ici satisfaites puisque

$$t(0)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},$$

$$t(\alpha_1)\,t(\alpha_2)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ \alpha_1 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & 0\\ \alpha_2 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ \alpha_1+\alpha_2 & 1\end{Vmatrix}=t(\alpha_1+\alpha_2).$$

Puisque cette représentation est de dimension 2, chacun de ses sous-espaces invariants non triviaux, différents de (0) et de l'espace tout entier, est unidimensionnel. Soit M un tel sous-espace unidimensionnel et $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ un vecteur de M. Puisque M est invariant, on a $t(\alpha)\,x=\lambda(\alpha)\,x$, où $\lambda(\alpha)$ est une fonction numérique, i.e. en vertu de (2.4.4), on a

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \alpha\xi_1+\xi_2\end{Vmatrix}=\lambda(\alpha)\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}. \qquad (2.4.5)$$

Mais (2.4.5) signifie que

$$\xi_1=\lambda(\alpha)\,\xi_1, \quad \alpha\xi_1+\xi_2=\lambda(\alpha)\,\xi_2. \qquad (2.4.6)$$

Il découle de la première relation (2.4.6) que l'on a soit $\xi_1=0$, soit $\lambda(\alpha)=1$. Mais le deuxième cas nous ramène à nouveau au premier, puisque la deuxième relation (2.4.6) implique alors $\alpha\xi_1+\xi_2=\xi_2$, et donc $\alpha\xi_1=0$ quel que soit α, de sorte que $\xi_1=0$. Ainsi, l'unique sous-espace non trivial invariant de la représentation donnée est $M=\left\{\begin{Vmatrix}0\\ \xi\end{Vmatrix},\ \xi\in C^1\right\}$, donc cette représentation ne peut être une somme directe de représentations irréductibles.

Pour effectuer une décomposition d'une représentation complètement réductible il est souvent utile de se servir de la proposition suivante:

II. *Soit T une représentation du groupe G dans l'espace X, et soit $M_1, M_2, M_3, \ldots$ une suite de sous-espaces de X qui satisfait aux conditions suivantes*:

1) *chaque M_k est invariant relativement à T*;

2) *les restrictions T^j de la représentation T à M_k sont irréductibles.*

Alors on peut choisir dans la suite $M_1, M_2, M_3, \ldots$ des sous-espaces $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots$ tels que:

a) *$M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots$ sont linéairement indépendants*;

b) $\sum\limits_j M_{k_j}=\sum\limits_k M_k$.

En particulier, si $\sum\limits_k M_k=X$, alors on a également $\sum\limits_j M_{k_j}=X$.

D é m o n s t r a t i o n. Construisons M_{k_j} par récurrence. Posons $k_1 = 1$, de sorte que $M_{k_1} = M_1$. Supposons que nous avons déjà construit des espaces linéairement indépendants $M_{k_1}, \ldots$ $\ldots, M_{k_n}$ qui satisfont à la condition

$$M_{k_1} \dot{+} \ldots \dot{+} M_{k_n} = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \ldots \dot{+} M_{k_n} \tag{2.4.7}$$

et considérons le sous-espace $M = (M_1 \dot{+} \ldots \dot{+} M_{k_n}) \cap M_k$ pour $k > k_n$. Il est invariant relativement à T et contenu dans M_k. D'après la condition 2) on a soit $M = (0)$, soit $M = M_k$. Si le premier cas a lieu pour un certain $k > k_k$, nous pouvons poser k_{n+1} égal au plus petit de ces k. Si par contre pour tous les $k > k_n$, on a

$$M_k \subset M_{k_1} \dot{+} \ldots \dot{+} M_{k_n} \quad \text{pour} \quad k > k_n,$$

et alors en vertu de (2.4.7) on obtient $M_{k_1} \dot{+} \ldots \dot{+} M_{k_n} = \sum\limits_k M_k$.

Exemples et exercices

1. Démontrer que la représentation T (voir l'exercice 2 à la page 38) peut être décomposée en une somme directe de deux représentations irréductibles.

2. Démontrer que pour qu'une représentation T puisse être décomposée en une somme directe des représentations $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$, il faut et il suffit que la représentation adjointe T^* soit décomposable en une somme directe des représentations $T^{(1)*}$ et $T^{(2)*}$.

3. Démontrer qu'une représentation de dimension finie d'un groupe commutatif fini se décompose en une somme directe de représentations unidimensionnelles.

2.5. Somme semi-directe (enlacement) de représentations. On appelle une représentation T du groupe G dans l'espace X *somme semi-directe* (ou *enlacement*) des représentations T^k dans les espaces X_k, $k = 1, \ldots, m$, et l'on écrit $T = T^1 \to T^2 \to T^3 \to \ldots \to T^m$, s'il existe dans X un système de sous-espaces $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ $\ldots \subset M_m = X$ invariants relativement à T, tel que la restriction de T à M_1 est équivalente à T^1, la représentation $\tilde{T}^2$, engendrée par la représentation T sur M_2/M_1 (voir 2.2) est équivalente à T^2, la représentation $\tilde{T}^3$ induite par la représentation T sur M_3/M_2 est équivalente à $T^3, \ldots$, la représentation $\tilde{T}^m$ induite par la représentation T sur X/M_{m-1} est équivalente à T^m.

Il est évident que lorsque T est la somme directe des représentations $T^1, \ldots, T^m$ (i.e. $T = T^1 + \ldots + T^m$), alors T est également une somme semi-directe de ces représentations (i.e. $T =$ $= T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$); en guise de sous-espaces $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_m$ on peut prendre $M_1 = X_1$, $M_2 = X_1 \dot{+} X_2, \ldots, M_m =$ $= X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_m = X$. La réciproque est généralement fausse.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la représentation T de l'exemple donné à la fin de 2.4. En vertu de (2.4.4) cette représentation est définie par la formule

$$T(\alpha)\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \alpha\xi_1+\xi_2\end{Vmatrix}. \qquad (2.5.1)$$

Dans l'espace X de cette représentation il existe un seul sous-espace non trivial invariant $M=\left\{\begin{Vmatrix}0\\ \xi_2\end{Vmatrix};\ \xi_2\in \mathbf{C}^1\right\}$; pour $\xi=\begin{Vmatrix}0\\ \xi_2\end{Vmatrix}\in M$ on a

$$T(\alpha)\,\xi=\xi,$$

i.e. $T(\alpha)\equiv 1$ sur M. Chaque vecteur $\tilde{\xi}$ de l'espace quotient $\mathbf{C}^2/M$ est l'ensemble de tous les $\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}$, où ξ_1 est fixe, tandis que ξ_2 parcourt tout le $\mathbf{C}^1$. Ceci étant, on déduit de (2.5.1) que la représentation $\tilde{T}$ induite dans $\mathbf{C}^2/M$ par la représentation T se détermine par la formule $\tilde{T}(\alpha)\equiv 1$. Par conséquent, la représentation donnée T *est la somme semi-directe de deux représentations unité du groupe* $\mathbf{R}^1$, *sans être leur somme directe.*

Considérons le cas des sommes semi-directes des représentations de dimension finie $T^1, \ldots, T^m$. Soit $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ une base dans X_k et soient $t_{j\nu}^k(g)$ les éléments matriciaux de la représentation T^k relativement à cette base ($k=1, \ldots, m$). Par hypothèse, la représentation $\tilde{T}^k$ induite par la représentation T dans $\tilde{X}_k=M_k/M_{k-1}$ ($k=1, \ldots, m$, $\tilde{X}_1=M_1$) est équivalente à la représentation T^k; par conséquent (voir I de 2.2), on peut choisir une base $\tilde{f}_1^k, \ldots$ $\ldots, \tilde{f}_{n_k}^k$ dans $\tilde{X}_k$ de manière à ce que les éléments matriciaux de la représentation T^k relativement à cette base coïncident avec $t_{j\nu}^k(g)$. Soient $f_1^k, \ldots, f_{n_k}^k$ les éléments de M_k qui sont des représentants des classes $\tilde{f}_1^k, \ldots, \tilde{f}_{n_k}^k$ pour $k\geqslant 2$, et $f_1=\tilde{f}_1^1, \ldots, \tilde{f}_{n_1}^1=$ $=\tilde{f}_{n_1}^1$. Alors tous les f_ν^k, $\nu=1, \ldots, n_k$; $k=1, \ldots, m$, forment une base dans X. En effet, soit $x\in X$ et supposons que $\tilde{x}$ est l'image de l'élément x par l'application canonique $X\to X/M_{m-1}$. Alors $x\in\tilde{x}$. Puisque $\tilde{f}_1^m, \ldots, \tilde{f}_{nm}^m$ est une base dans X/M_{m-1}, on a $\tilde{x}=\alpha_1^m\tilde{f}_1^m+\ldots$ $\ldots+\alpha_{nm}^m\tilde{f}_{nm}^m$ pour certains nombres $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_{nm}^m$. D'où l'on tire $x=\alpha_1^m f_1^m+\ldots+\alpha_n^m f_{nm}^m+y_{m-1}$, où $y_{m-1}\in M_{m-1}$. En appliquant le raisonnement précédent à y_{m-1} et à M_{m-1}/M_{m-2} (à la place de x et X/M_{m-1}), nous voyons que $y_{m-1}=\alpha_1^{m-1}f_1^{m-1}+\ldots+\alpha_{nm-1}^{m-1}f_{nm-1}^{m-1}+$ $+y_{m-2}$, où $y_{m-2}\in M_{m-2}$. En répétant ce raisonnement, nous ob-

tiendrons en un nombre fini d'étapes la relation

$$x=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_j^k f_j^k.$$

Il reste à démontrer que les f_j^k, $j=1, \ldots, n_k$; $k=1, \ldots, m$, sont linéairement indépendants. Soit

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_j^k f_j^k=0 \qquad (2.5.2)$$

et il faut démontrer que tous les α_j^k sont nuls.

En appliquant aux deux membres de (2.5.2) l'application canonique $X \to X/M_{m-1}$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n_m}\alpha_j^m \tilde{f}_j^m=0. \qquad (2.5.3)$$

Puisque $\tilde{f}_j^m$, $j=1, \ldots, n_m$, est une base dans X/M_{m-1}, on peut déduire de (2.5.3) que $\alpha_j^m=0$, $j=1, \ldots, n_m$. On peut donc écrire (2.5.2) sous la forme

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_j^k f_j^k=0. \qquad (2.5.4)$$

En appliquant maintenant à (2.5.4) l'application canonique $M_{m-1} \to M_{m-1}/M_{m-2}$ et en reprenant le raisonnement précédent, nous obtenons également que $\alpha_j^{m-1}=0$, $j=1, \ldots, n_{m-1}$. Après un nombre fini de telles étapes, nous démontrerons que tous les α_j^k sont nuls.

Ainsi, tous les f_ν^k forment une base dans X. Disposons les f_ν^k de la manière suivante :

$$f_1^1, \ldots, f_{n_1}^1;\quad f_1^2, \ldots, f_{n_2}^2;\quad \ldots;\quad f_1^m, f_2^m, \ldots, f_{n_m}^m, \qquad (2.5.5)$$

et trouvons la matrice $t(g)$ de l'opérateur $T(g)$ relativement à cette base. Par hypothèse, les éléments matriciaux de la restriction de la représentation T à M_1 relativement à la base $f_1^1, \ldots, f_{n_1}^1$ coïncident avec $t_{jk}^1(g)$, de sorte que

$$T(g)f_k^1=\sum_{j=1}^{n_1}t_{jk}^1(g)f_j^1. \qquad (2.5.6)$$

Ensuite les éléments matriciaux de la représentation T^2 relativement à la base $\tilde{f}_1^2, \ldots, \tilde{f}_{n_2}^2$ coïncident avec $t_{jk}^2(g)$, de sorte que

$$\tilde{T}(g)\tilde{f}_k^2=\sum_{j=1}^{n_2}t_{jk}^2(g)\tilde{f}_j^2,$$

d'où l'on tire

$$T(g)\, f_k^2 = \sum_{j=1}^{n_2} t_{jk}^2(g)\, f_j^2 + y_1, \qquad y_1 \in M_1. \tag{2.5.7}$$

En reprenant ce raisonnement nous obtenons qu'en général

$$T(g)\, f_k^\nu = \sum_{j=1}^{n_\nu} t_{jk}^\nu(g)\, f_j^\nu + y_{\nu-1},$$

où

$$y_{\nu-1} \in M_{\nu-1}, \quad \nu = 1, \ldots, m, \quad y_0 = 0. \tag{2.5.8}$$

Mais cela signifie que la matrice $t(g)$ de l'opérateur $T(g)$ relativement à la base (2.5.5) est de la forme

$$t(g) = \\ = \begin{Vmatrix} t_{11}^1(g) & \ldots & t_{1n_1}^1(g) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_1 1}^1(g) & \ldots & t_{n_1 n_1}^1(g) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & * & t_{11}^2(g) & \ldots & t_{1n_2}^2(g) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \ldots & * & t_{n_2 1}^2(g) & \ldots & t_{n_2 n_2}^2(g) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \ldots & * & * & \ldots & * & \ldots & t_{11}^m(g) & \ldots & t_{1n_m}^m(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \ldots & * & * & \ldots & * & \ldots & t_{n_m 1}^m(g) & \ldots & t_{n_m n_m}^m(g) \end{Vmatrix}, \tag{2.5.9}$$

où $*$ désigne certains éléments matriciaux, ou, dans une notation plus concise

$$t(g) = \begin{Vmatrix} t^1(g) & & & \\ * & t^2(g) & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \ldots & t^m(g) \end{Vmatrix}, \tag{2.5.10}$$

où $t^k(g)$ est la matrice de la représentation T^k relativement à la base $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$, est $*$ désigne toujours certaines matrices (qui dépendent généralement de g) et tous les éléments non indiqués sont nuls.

Ainsi :

I. *Si l'on a* $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$, *où les* $T^1, \ldots, T^m$ *sont de dimension finie, alors on peut choisir une base dans l'espace de la représentation* T *de manière à ce que la matrice de* T *relativement*

à cette base soit de la forme (2.5.10), *où* $t^k(g)$ *sont les matrices des représentations* T^k, $k = 1, \ldots, m$, et $*$ *désigne certaines matrices, tandis que tous les éléments non indiqués sont nuls.*

Dans le cas d'une somme directe de représentations, la base peut être choisie de manière à ce que toutes les matrices désignées par un astérisque soient nulles (voir I de 2.4). Dans le cas général des sommes semi-directes de représentations, on n'arrive pas à le faire (voir l'exemple précédent).

Remarque. D'une manière analogue à la somme semi directe $T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$ introduite ci-dessus, on peut aussi définir la somme semi-directe $T^1 \leftarrow T^2 \leftarrow \ldots \leftarrow T^m$. C'est ainsi que l'on appelle la représentation T, s'il existe dans l'espace X de cette représentation des sous-espaces $M_m \subset M_{m-1} \subset \ldots \subset M_1 = M$ invariants relativement à T et tels que la restriction de la représentation T à M_m est équivalente à T^m, tandis que la représentation $\tilde{T}^k$, induite par la représentation T dans M_k/M_{k+1}, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, est équivalente à T^k. Il est évident que cette somme semi-directe diffère de la somme semi-directe $T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$ par la numération des sous-espaces invariants seulement. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que $T = T^1 \leftarrow T^2 \leftarrow \ldots$ $\ldots \leftarrow T^m$ implique, pour un choix approprié de la base, que la matrice $t(g)$ de la représentation T s'écrit sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} t^1(g) & * & \ldots & * \\ & t^2(g) & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & t^m(g) \end{matrix} \right\|, \qquad (2.5.11)$$

où $t^1(g), t^2(g), \ldots, t^m(g)$ sont les matrices des représentations $T^1, T^2, \ldots, T^m$.

Exemples et exercices

1. Démontrer que la somme semi-directe des représentations $\left\| \begin{matrix} T^{(1)}(g) & A(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{matrix} \right\|$ est décomposable en une somme directe si et seulement s'il existe un opérateur linéaire A de l'espace de la représentation $T^{(2)}$ dans l'espace de la représentation $T^{(1)}$ qui satisfait, pour un certain nombre λ, à l'égalité $T^{(1)}(g)\,Y - YT^{(2)}(g) = \lambda A(g)$, quel que soit $g \in G$.

2. Montrer qu'une représentation de dimension finie d'un groupe fini n'est jamais une somme semi-directe non triviale de représentations unidimensionnelles.

3. Montrer que la somme semi-directe des représentations irréductibles de dimensions finies non équivalentes $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ n'est en général pas décomposable en une somme directe des représentations $T^{(1)}$, $T^{(2)}$.

2.6. Produit tensoriel de représentations de dimension finie. Soient T^1, T^2 des représentations du groupe G dans des espaces de dimension finie X_1, X_2. On appelle *produit tensoriel* $T^1 \otimes T^2$ *des représentations* T^1, T^2, une représentation T dans l'espace $X = X_1 \otimes X_2$ (voir Zamanski [1]) telle que les opérateurs $T(g)$ sur les vecteurs $x_1 \otimes x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \subset X_2$ sont donnés par la formule

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g)x_1 \otimes T^2(g)x_2. \tag{2.6.1}$$

Remarquons tout d'abord que la formule (2.6.1) définit complètement l'opérateur $T(g)$, et ensuite que l'application $g \to T(g)$ est effectivement une représentation, puisque

$$T(e)(x_1 \otimes x_2) = T^1(e)x_1 \otimes T^2(e)x_2 = x_1 \otimes x_2, \tag{2.6.2a}$$

$$\begin{aligned} T(g_1g_2)(x_1 \otimes x_2) &= T^1(g_1g_2)x_1 \otimes T^2(g_1g_2)x_2 = \\ &= T^1(g_1)T^1(g_2)x_1 \otimes T^2(g_2)T^2(g_2)x_2 = \\ &= T(g_1)(T^1(g_2)x_1 \otimes T^2(g_2)x_2) = T(g_1)T(g_2)(x_1 \otimes x_2), \end{aligned} \tag{2.6.2b}$$

d'où l'on déduit que $T(e) = 1$, $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$. Soient $n_1 = \dim X_1$ et $n_2 = \dim X_2$, et supposons que $e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1$ et $e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2$ sont des bases de X_1 et X_2. En posant

$$e_{jk} = e_j^1 \otimes e_k^2, \tag{2.6.3}$$

nous obtiendrons alors une base e_{jk}, $j = 1, \ldots, n_1$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n_2$, dans $X_1 \otimes X_2$. Les éléments de cette base étant déterminés par un indice composé, comprenant deux nombres j, k, les éléments matriciaux de la représentation $T^1 \otimes T^2$ auront pour indice deux indices composés, c'est-à-dire les quatre nombres j, k, μ, ν. Désignons par $t_{\mu\nu jk}(g)$ les éléments matriciaux de la représentation $T = T^1 \otimes T^2$ relativement à la base $e_{jk} = e_j^1 \otimes e_k^2$. Pour les calculer, remarquons qu'en vertu de (2.6.1) et (2.6.2) on a

$$\begin{aligned} T(g)e_{jk} &= T^1(g)e_j^1 \otimes T^2(g)e_k^2 = \Big(\sum_{\mu=1}^{n_1} t_{\mu j}^1(g)e_\mu^1\Big) \otimes \Big(\sum_{\nu=1}^{n_2} t_{\nu k}^2(g)e_\nu^2\Big) = \\ &= \sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t_{\mu j}^1(g)t_{\nu k}^2(g)(e_\mu^1 \otimes e_\nu^2) = \sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t_{\mu j}^1(g)t_{\nu k}^2(g)e_{\mu\nu} \end{aligned}$$

et donc

$$t_{\mu\nu jk}(g) = t_{\mu j}^1(g)t_{\nu k}^2(g). \tag{2.6.4}$$

On détermine d'une manière analogue le produit tensoriel d'un nombre fini quelconque de représentations de dimension finie. On appelle *produit tensoriel* $T^1 \otimes T^2 \otimes \ldots \otimes T^m$ *des représentations de dimension finie* $T^1, \ldots, T^m$ *du groupe* G *dans les espaces* $X_1, \ldots$ $\ldots, X_m$, une représentation T dans l'espace $X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots$

$\ldots \otimes X_m$ dont les opérateurs $T(g)$ prennent sur les vecteurs $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_m \in X_m$, les valeurs données par la formule

$$T(g)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) = T^1(g)\, x_1 \otimes \ldots \otimes T^m(g)\, x_m. \quad (2.6.5)$$

En reprenant les raisonnements précédents nous obtenons:

I. *Soient* $T^1, \ldots, T^m$ *des représentations du groupe* G *dans les espaces* $X_1, \ldots, X_m$ *de dimensions finies* $n_1, \ldots, n_m$, *et* $f_1^k, \ldots, f_{n_k}^k$ *une base dans* X_k; *soient* $t_{\nu j}^k(g)$ *les éléments matriciaux de la représentation* T^k *relativement à cette base* ($k = 1, \ldots, m$). *Alors les éléments matriciaux* $t_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m j_1 j_2\ldots j_m}(g)$ *du produit tensoriel* $T = T^1 \otimes \ldots \otimes T^m$ *des représentations* $T^1, \ldots, T^m$ *sont données par la formule*

$$t_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m j_1 j_2\ldots j_m}(g) = t^1_{\nu_1 j_1}(g)\, t^2_{\nu_2 j_2}(g) \ldots t^m_{\nu_m j_m}(g). \quad (2.6.6)$$

EXEMPLES ET EXERCICES

1. Soient χ_1, χ_2 des caractères du groupe G. Montrer que $(\chi_1 \otimes \chi_2)(g) = \chi_1(g)\, \chi_2(g)$.

2. Soient $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ des représentations de dimension finie du groupe G dans les espaces X et Y respectivement. Soit L l'espace linéaire de toutes les applications linéaires A de l'espace linéaire Y' (adjoint à Y) dans l'espace X. Définissons dans L la représentation $g \to S(g)$ en posant $S(g)A = T^{(1)}(g)\, A\, (T^{(2)}(g))'$ pour tous les $A \in L$. Démontrer que la représentation S est équivalente au produit tensoriel $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$.

3. Démontrer que la représentation unité du groupe G est une sous-représentation du produit tensoriel des représentations irréductibles de dimension finie $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ du groupe G si et seulement si $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ sont adjointes.

2.7. Représentations de dimension finie d'un produit direct de groupes. Soient $G = G_1 \times G_2$ le produit direct des groupes G_1 et G_2, T^1 la représentation de dimension finie du groupe G_1 dans l'espace X_1 et T^2 la représentation de dimension finie du groupe G_2 dans l'espace X_2. A partir de ces deux représentations on peut construire une représentation T du groupe G dans l'espace $X = X_1 \otimes X_2$, en posant

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)\, x_1 \otimes T^2(g_2)\, x_2 \quad \text{pour} \quad g = g_1 \times g_2. \quad (2.7.1)$$

On vérifie facilement que l'application $g \to T(g)$ est une représentation du groupe G. On la désigne par $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$. Considérons le cas $G_2 = G_1$ où T^1 et T^2 sont des représentations d'un même groupe G_1. Le groupe G contient le sous-groupe G_0 constitué par tous les $g = g_1 \times g_1$, $g_1 \in G_1$, qui est évidemment isomorphe au groupe G_1.

Par conséquent, la restriction de la représentation $T_{G_1}^1 \otimes T_{G_2}^2$ au groupe G_0 est une représentation du groupe G_1. D'autre part, (2.7.1) implique

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)\, x_1 \otimes T^2(g_1)\, x_2 \quad \text{pour} \quad g = g_1 \times g_1 \in G_0, \qquad (2.7.2)$$

ce qui donne, en comparant avec (2.6.1):

I. *La restriction de la représentation $T_{G_1}^1 \otimes T_{G_2}^2$ du groupe $G \times G$ au groupe G_0 de tous les $g_1 \times g_1$, $g_1 \in G_1$, coïncide avec le produit tensoriel $T^1 \otimes T^2$ des représentations T^1, T^2 du groupe G.*

Il est évident que la proposition I reste vraie pour un produit direct $G = G \times \ldots \times G$ d'un nombre quelconque de copies du groupe G. Dans ce cas le rôle du groupe G_0 est joué par tous les $g_1 \times g_1 \times \ldots \times g_1$, $g_1 \in G_1$.

II. *Chaque représentation unidimensionnelle*

$$g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n \to f(g_1, g_2, \ldots, g_n), \quad g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n, \qquad (2.7.3)$$

du produit direct $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ des groupes $G_1, \ldots, G_n$ se définit par la formule

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f_1(g_1)\, f_2(g_2) \ldots f_n(g_n), \qquad (2.7.4)$$

où

$$g_j \to f_j(g_j), \quad g_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.7.5)$$

*sont des représentations unidimensionnelles des groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Réciproquement, chaque fonction $f(g_1, \ldots, g_n)$ de la forme (2.7.4), où $g_j \to f_j(g_j)$, $g_j \in G_j$, sont des représentations unidimensionnelles des groupes $G_1, \ldots, G_n$, détermine une représentation unidimensionnelle du groupe G. La représentation f est unitaire *) si et seulement si chacune des représentations f_j, $j = 1, \ldots, n$, est unitaire.*

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$f_1(g_1) = f(g_1, e_2, \ldots, e_n),\ f_2(g_2) = f(e_1, g_2, e_3, \ldots, e_n), \ldots$$
$$\ldots, f_n(g_n) = f(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, g_n), \qquad (2.7.6)$$

où e_j est l'élément neutre de G_j. Alors

$$f_1(e_1) = f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

et pour $g_1, g_1' \in G_1$ on a

$$f_1(g_1 g_1') = f(g g_1', e_2, \ldots, e_n) =$$
$$= f(g_1, e_2, \ldots, e_n)\, f(g_1', e_2, \ldots, e_n) = f_1(g_1)\, f_1(g_1'),$$

*) La définition d'une représentation unitaire est donnée plus loin dans 2.8.

et par conséquent $g_1 \to f_1(g_1)$ est une représentation unidimensionnelle du groupe G. On démontre d'une manière analogue que chaque $g_j \to f_j(g_j)$, $g_j \in G_j$, est une représentation unidimensionnelle du groupe G_j. En outre,

$$f_1(g_1) f_2(g_2) \ldots f_n(g_n) = \\ = f(g_1, e_2, \ldots, e_n) f(e_1, g_2, \ldots, e_n) \ldots f(e_1, \ldots, e_{n-1}, g_n) = \\ = f(g_1, g_2, \ldots, g_n).$$

Ceci démontre la première assertion de la proposition II; la réciproque est évidente. Le fait que la représentation (2.7.3) est unitaire entraîne $|f(g_1, \ldots, g_n)| = 1$, d'où l'on tire, en vertu de (2.7.6), que

$$|f_1(g_1)| = 1, \ldots, |f_n(g_n)| = 1. \tag{2.7.7}$$

La réciproque découle de (2.7.4) et (2.7.7).

III. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe $G = G_1 \times G_2$ est équivalente au produit tensoriel des représentations irréductibles T_1 et T_2 des groupes G_1 et G_2 respectivement, et en même temps T_1 et T_2 sont des sous-représentations des restrictions de la représentation T aux groupes $G_1 \approx G_1 \times \{e_2\}$ et $G_2 \approx \{e_1\} \times G_2$ respectivement, où e_1, e_2 sont les éléments neutres des groupes G_1 et G_2.*

Démonstration. Soient T_1, T_2 des représentations des groupes G_1 et G_2; le lecteur vérifiera sans difficulté que la représentation $T = T_1 \otimes T_2$ du groupe $G = G_1 \times G_2$ est irréductible si et seulement si T_1 et T_2 sont irréductibles. Montrons que toute représentation irréductible T du groupe $G_1 \times G_2$ dans un espace E (de dimension finie) est équivalente à une représentation de la forme $T_1 \times T_2$, où T_1 et T_2 sont des représentations irréductibles des groupes G_1 et G_2 respectivement. Soient S_1, S_2 des représentations dans l'espace E des groupes G_1 et G_2 respectivement, définies par les formules $S_1(g_1) = T((g_1, e_2))$, $S_2(g_2) = T((e_1, g_2))$. Soit T_1 la restriction de la représentation S_1 à un sous-espace E_1 invariant et irréductible relativement à la représentation S_1. Soit x un vecteur non nul du sous-espace E_1. Désignons par E_2 le sous-espace de E constitué par des combinaisons linéaires finies des vecteurs de la forme $S_2(g_2)x$, $g_2 \in G_2$. Le sous-espace E_2 est invariant relativement à la représentation S_2; désignons par T_2 la restriction de la représentation S_2 au sous-espace E_2. Définissons l'application A du produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ dans E de la manière suivante. Soit $x_1 \otimes x_2 \in E_1 \otimes E_2$; alors on peut représenter x_1 et x_2 sous la forme

$$x_1 = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p T_1(g_1^{(p)}) x, \quad x_2 = \sum_{q=1}^{n} \mu_q T_2(g_2^{(q)}) x, \text{ où } g_1^{(p)} \in G_1, \ g_2^{(q)} \in G_2,$$

où λ_p, μ_q sont des nombres. Posons

$$A(x_1 \otimes x_2) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \lambda_p \mu_q T((g_1^{(p)}, g_2^{(q)}))\, x.$$

Puisque $(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2) = (g_1, g_2)$ dans $G_1 \times G_2$, on a

$$S_1(g_1) S_2(g_2) y = S_2(g_2) S_1(g_1) y = T((g_1, g_2)) y \qquad (2.7.8)$$

quels que soient $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $y \in E$.

En se servant des relations (2.7.8) et de la définition des représentations T_1 et T_2, le lecteur pourra vérifier sans difficulté que l'application A est définie correctement et peut être prolongée par linéarité à une application de $E_1 \otimes E_2$ dans E, et l'on a $A(T_1(g_1) x_1 \otimes T_2(g_2) x_2) = T(g_1, g_2) A(x_1 \otimes x_2)$ quels que soient $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$; l'application A est un opérateur qui réalise l'équivalence des représentations T et $T_1 \otimes T_2$. Puisque T est irréductible, la représentation T_2 l'est aussi.

2.8. Représentations unitaires. Une forme bilinéaire (x_1, x_2) sur un espace linéaire X est dite *hermitienne* si l'on a $(x_2, x_1) = \overline{(x_1, x_2)}$; une forme bilinéaire hermitienne (x_1, x_2) sur X est dite *non négative* si l'on a $(x, x) \geqslant 0$ pour tous les $x \in X$, elle est dite *positive* si l'on a $(x, x) > 0$ pour $x \neq 0$. Une forme bilinéaire positive sur X s'appelle aussi *produit scalaire sur* X. Un espace linéaire X, muni d'un produit scalaire, est appelé *espace préhilbertien.* Un espace préhilbertien de dimension finie s'appelle *espace euclidien.* Si X est un espace préhilbertien, alors (x, y) désignera toujours (si le contraire n'est pas indiqué) le produit scalaire donné sur X; par orthogonalité sur X on entend l'orthogonalité relativement à (x, y). Il est évident qu'un espace préhilbertien X est en dualité avec lui-même relativement à (x, y) (voir 2.3). Un opérateur linéaire A dans un espace préhilbertien X est dit *unitaire*, si A applique bijectivement X sur X et si l'on a

$$(Ax, Ay) = (x, y) \text{ quel que soient } x, y \in X. \qquad (2.8.1)$$

La représentation T du groupe G dans un espace préhilbertien X est dite *unitaire*, si tous les opérateurs de la représentation sont unitaires. Puisque les opérateurs de la représentation dans X appliquent toujours bijectivement X sur X (voir 2.1), on trouve en vertu de (2.8.1) que l'*unitarité de la représentation T est équivalente à la condition*

$$(T(g) x, T(g) y) = (x, y) \text{ pour tous les } g \in G, x, y \in X. \qquad (2.8.2)$$

En comparant (2.8.2) et (2.3.8) on peut conclure:

I. *Si la représentation T dans un espace préhilbertien X est unitaire, elle est adjointe à elle-même relativement à (x, y).*

Ensuite, en raisonnant comme on l'avait fait pour obtenir (2.3.9), on voit que la condition (2.8.2) est équivalente à la condition suivante:

$$(T(g^{-1})x, y) = (x, T(g)y) \text{ pour tous les } g \in G,\ x, y \in X. \tag{2.8.3}$$

II. *Si T est une représentation unitaire du groupe G dans un espace préhilbertien X et M est invariant relativement à T, alors $M^{\perp}$ est également invariant relativement à T.*

Démonstration. Soit $y \in M^{\perp}$. Pour chaque $x \in M$ on a également $T(g^{-1})x \in M$, puisque M est invariant relativement à T et donc $y \perp T(g^{-1})x$. Mais alors, en vertu de (2.8.3)

$$(x, T(g)y) = (T(g^{-1})x, y) = 0;$$

et donc $T(g)y \perp M$, $T(g)y \in M^{\perp}$. Cela signifie que $M^{\perp}$ est invariant relativement à T.

Si X est un espace euclidien et $\dim X = n$, alors on peut choisir dans X une base $e_1, \ldots, e_n$ qui satisfait aux conditions

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k. \end{cases} \tag{2.8.4}$$

Une telle base est dite *orthonormée*. Soient $t_{jk}(g)$ les éléments matriciaux de la représentation T pour cette base. La condition (2.8.2) d'unitarité est équivalente aux conditions

$$(T(g)e_j, T(g)e_k) = (e_j, e_k) = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k. \end{cases} \tag{2.8.5}$$

Mais en vertu de (2.1.3) et (2.8.4) on a

$$(T(g)e_j, T(g)e_k) = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)e_{\nu}, \sum_{\mu=1}^{n} t_{\mu k}(g)e_{\mu}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu, \mu=1}^{n} t_{\nu, j}(g)\overline{t_{\mu k}(g)}(e_{\nu}, e_{\mu}) = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\overline{t_{\nu k}(g)};$$

par conséquent la condition (2.8.2) est équivalente aux conditions

$$\sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\overline{t_{\nu k}(g)} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k, \\ 0 \text{ si } j \neq k. \end{cases} \tag{2.8.6}$$

Il est évident que la condition (2.8.3) signifie

$$t^{*}(g)\,t(g) = 1, \tag{2.8.7}$$

où $t^*(g)$ est une matrice conjuguée hermitienne à $t(g)$ (voir 2.3); la matrice t qui satisfait à la condition $t^*t = 1$ est dite *unitaire*; ainsi:

III. *La matrice d'une représentation unitaire de dimension finie relativement à une base orthonormée est unitaire.*

La relation (2.8.6) signifie que

$$t^*(g) = (t(g))^{-1}. \tag{2.8.8}$$

D'autre part, $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$, et donc $(t(g))^{-1} = t(g^{-1})$. Par conséquent, on peut écrire (2.8.8) sous la forme

$$t(g^{-1}) = t^*(g) \tag{2.8.9}$$

ou, en éléments matriciaux,

$$t_{jk}(g^{-1}) = \overline{t_{kj}(g)}. \tag{2.8.10}$$

IV. *Soient T une représentation unitaire dans l'espace euclidien X, M un sous-espace de X invariant relativement à T, et P un projecteur *) orthogonal de X sur M. Alors P est permutable avec tous les $T(g)$, $g \in G$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in X$. Alors $Px \in M$; par conséquent, on a aussi $T(g)Px \in M$ puisque M est invariant. On obtient donc $PT(g)Px = T(g)Px$ quel que soit $x \in X$, i.e.

$$PT(g)P = T(g)P. \tag{2.8.11}$$

En substituant g^{-1} à g dans (2.8.11) et en prenant en considération les égalités $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1} = T^*(g)$, on obtient $PT^*(g)P = T^*(g)P$. Mais alors $(PT^*(g)P)^* = (T^*(g)P)^*$, i.e. $PT(g)P = PT(g)$. Si l'on compare la dernière égalité avec (2.8.11), on obtient $T(g)P = PT(g)$, ce qu'il fallait démontrer.

V. *Une représentation unitaire T dans un espace euclidien X est irréductible si et seulement si chaque opérateur $A \in L(X)$, permutable avec tous les $T(g)$, est un multiple de l'opérateur unité: $A = \lambda 1$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit T une représentation irréductible et supposons que A de $L(X)$ est permutable avec tous les $T(g)$; alors $A = \lambda 1$ en vertu du lemme 2 de 2.2. Réciproquement, supposons que chaque opérateur A de $L(X)$, permutable avec tous les $T(g)$, est multiple de l'opérateur unité, et supposons que M est un sous-espace de X invariant relativement à T, tandis que P est un projecteur dans X appliquant X sur M. Mais alors P est permutable avec tous les $T(g)$ en vertu de IV et donc par hypothèse, $P = \lambda 1$. Mais cette dernière égalité n'est possible que lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, i.e. lorsque $P = 0$ ou $P = 1$, i.e. pour $M = (0)$ ou $M = X$. Cela signifie que T est irréductible.

*) Rappelons qu'on appelle *projecteur* tout opérateur P vérifiant la condition $P^2 = P$; il est dit *projecteur sur M* si $PX = M$.

Deux représentations T, S du groupe G dans des espaces préhilbertiens X, Y sont dites *unitairement équivalentes*, s'il existe un opérateur linéaire A de X dans Y, qui satisfait aux conditions suivantes:

$$A \text{ est une bijection de } X \text{ sur } Y; \tag{2.8.12}$$

$$(Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2) \text{ quels que soient } x_1, x_2 \in X; \tag{2.8.13}$$

$$AT(g) = S(g)A \text{ quels que soient } g \in G. \tag{2.8.14}$$

Ainsi, l'équivalence unitaire diffère de l'équivalence simple par le fait qu'on ajoute encore la condition (2.8.13) stipulant l'isométrie de l'opérateur A.

VI. *Si deux représentations unitaires T, S d'un groupe G dans des espaces euclidiens sont équivalentes, elles sont également unitairement équivalentes.*

Démonstration. Soit A un opérateur linéaire de X dans Y qui satisfait aux conditions (2.8.12) et (2.8.14). Alors $A = UB$, où B est un opérateur hermitien dans X qui applique bijectivement X sur X, tandis que U applique isométriquement X sur Y (voir Gantmaher [1]), de sorte que

$$(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2). \tag{2.8.15}$$

En substituant $A = UB$ dans (2.8.14) on obtient

$$UBT(g) = S(g)UB. \tag{2.8.16}$$

En substituant g^{-1} à g dans (2.8.16) et en prenant en considération l'égalité $T(g^{-1}) = T^*(g)$, on arrive à $UBT^*(g) = S^*(g)UB$; par conséquent $(UBT^*(g))^* = (S^*(g)UB)^*$, i.e.

$$T(g)BU^{-1} = BU^*S(g). \tag{2.8.17}$$

Ce qui entraîne, en vertu de (2.8.16),

$$T(g)B^2 = T(g)BU^*UB = BU^*S(g)UB = BU^*UBT(g) = \\ = B^2T(g).$$

Ainsi B^2, et donc B, est permutable avec tous les $T(g)$. Mais alors (2.8.11) peut s'écrire sous la forme

$$UT(g)B = S(g)UB. \tag{2.8.18}$$

En multipliant les deux membres de (2.8.18) à droite par B^{-1}, nous obtenons l'égalité $UT(g) = S(g)U$, qui signifie avec (2.8.15) que T et S sont unitairement équivalents.

VII. *Deux représentations unitaires T, S d'un groupe G dans des espaces euclidiens X, Y sont équivalentes si et seulement si on peut trou-*

ver dans X et Y des bases orthonormées relativement auxquelles les éléments matriciaux des représentations T et S coïncident.

D é m o n s t r a t i o n. Si T et S sont équivalentes alors, en vertu de VI, elles sont également unitairement équivalentes. Soit A un opérateur de X dans Y satisfaisant aux conditions (2.8.13), (2.8.14) et supposons que $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée quelconque de X. Posons $f_1 = Ae_1, \ldots, f_n = Ae_n$; alors, en vertu de (2.8.12), (2.8.13), $f_1, \ldots, f_n$ est une base orthonormée de Y. En nous servant ensuite de la condition (2.8.14) et en reprenant le raisonnement employé dans la démonstration de la proposition I de 2.2, nous déduisons que les éléments matriciaux des représentations T et S relativement aux bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ coïncident. La réciproque découle de I de 2.2.

Nous aurons également besoin de la proposition simple suivante.

VIII. *Si X est un espace euclidien et M son sous-espace différent de X, alors $M^\perp \neq (0)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $\dim X = n$, $\dim M = m$. Puisque $M \neq X$, on a $m < n$. Supposons que $e_1, \ldots, e_n$ est une base dans X et $f_1, \ldots, f_m$ une base dans M. Choisissons un élément $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \neq 0$ et $x \in M^\perp$; pour cela il suffit d'avoir $(x, f_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, ou de manière plus détaillée:

$$\alpha_1 (e_1, f_k) + \ldots + \alpha_n (e_n, f_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (2.8.19)$$

Mais (2.8.19) est un système de m équations homogènes relativement à $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, avec $m < n$, donc (2.8.19) possède une solution non triviale $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$. En posant $x = \alpha_1^0 e_1 + \ldots + \alpha_n^0 e_n$, nous obtiendrons un vecteur $x \neq 0$, $x \in M^\perp$; par conséquent, $M^\perp \neq (0)$.

Une représentation T dans l'espace X est dite *équivalente à une représentation unitaire*, s'il existe dans X un produit scalaire (x, y) relativement auquel T est unitaire.

IX. *Si une représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire, elle est complètement réductible.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit T une représentation dans l'espace X et supposons que (x, y) est un produit scalaire relativement auquel T est unitaire. En vertu de I de 2.1, il existe dans X un sous-espace $M_1 \neq (0)$, invariant relativement à T, sur lequel la restriction de T est irréductible. Si $M_1 = X$, la proposition IX est démontrée. Lorsque $M_1 \neq X$, alors on a $M_1^\perp \neq (0)$ en vertu de IV et $M_1^\perp$ est invariant relativement à T en vertu de II. En appliquant à nouveau I de 2.1 à la restriction de T à $M_1^\perp$, nous trouvons qu'il existe dans $M^\perp$ un sous-espace M_2 invariant relativement à T, sur lequel la restriction de T est irréductible. Par construction $M_2 \subset M_1^\perp$ et donc $M_2 \perp M_1$. Il est évident que $M_1 + M_2$ est invariant relativement à T. Si $M_1 + M_2 = X$, la proposition IX est démontrée, mais si $M_1 + M_2 \neq X$, on applique à nouveau le raisonnement précédent en

remplaçant M_1 par $M_1 + M_2$. Mais puisque X est de dimension finie, après un nombre fini de telles étapes, nous aboutissons à l'égalité $X = M_1 + \ldots + M_k$, où $M_1, \ldots, M_k$ sont des sous-espaces orthogonaux entre eux, invariants relativement à T, et tels que la restriction de T sur chacun d'eux est irréductible.

REMARQUE. Dans la démonstration précédente, nous avons établi le fait que la représentation donnée est décomposable en représentations irréductibles. La recherche pratique d'une telle décomposition peut présenter de sérieuses difficultés, et s'avère être une des questions les plus importantes de la théorie des représentations de dimension finie.

2.9. Caractères d'une représentation de dimension finie. Rappelons que l'on appelle *trace* tr a d'une matrice $a = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, la somme de ses éléments diagonaux

$$\operatorname{tr} a = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{2.9.1}$$

I. *La trace* tr a *possède les propriétés suivantes*:

$$\begin{aligned} &1)\ \operatorname{tr}(\alpha a) = \alpha \operatorname{tr}(a),\\ &2)\ \operatorname{tr}(a+b) = \operatorname{tr} a + \operatorname{tr} b,\\ &3)\ \operatorname{tr} 1 = n,\\ &4)\ \operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba),\\ &5)\ \operatorname{tr}(b^{-1}ab) = \operatorname{tr} a, \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

si b^{-1} existe. Ici α est un nombre, a, b sont des matrices d'un même ordre, et n est l'ordre de la matrice 1.

Démonstration. Les propriétés 1) à 3) sont évidentes; la propriété 4) découle des égalités

$$\operatorname{tr}(ab) = \sum_{j=1}^{n} (ab)_{jj} = \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}b_{kj} = \\ = \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{kj}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (ba)_{jj} = \operatorname{tr}(ba), \tag{2.9.3}$$

où n est l'ordre des matrices a et b. Maintenant la propriété 5) découle de 4). En effet, $\operatorname{tr}(b^{-1}ab) = \operatorname{tr}(bb^{-1}a) = \operatorname{tr} a$.

II. *La trace d'une matrice est égale à la somme de toutes ses valeurs propres où chaque valeur propre figure autant de fois qu'est sa multiplicité dans l'équation caractéristique de cette matrice.*

Démonstration. Il est bien connu (voir, par exemple, I. Guelfand [1]) que chaque matrice a peut être représentée sous la forme $a = b^{-1}a_1b$, où a_1 est la forme *de Jordan* de la matrice

a:

$$a_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & 1 & & & & & \\ & & \cdot & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \lambda_r & & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & & & & \cdot & \lambda_r \end{Vmatrix},$$

les valeurs propres de la matrice étant disposées le long de la diagonale, chacune un nombre de fois égal à sa multiplicité dans l'équation caractéristique de la matrice a, tandis que les endroits laissés vides sont occupés par des zéros. Ce qui démontre, conjointement avec la propriété 5, la proposition II.

Soient maintenant X un espace linéaire de dimension finie, $n = \dim X$, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de X. Chaque opérateur linéaire A dans X est déterminé par sa matrice $a = (a_{jk})$ relativement à cette base. On appelle *trace* tr A *de l'opérateur* A la trace de la matrice. Cette définition ne dépend pas du choix de la base. En effet, lorsqu'on passe de la base $e_1, \ldots, e_n$ à une autre base, $f_1, \ldots, f_n$, la matrice de l'opérateur A se transforme dans la matrice $b^{-1}ab$, où b est la matrice de transformation de la base $e_1, \ldots, e_n$ dans la base $f_1, \ldots, f_n$. En vertu de la propriété 5), la trace restera invariante.

III. *Soient A un opérateur linéaire dans un espace X de dimension finie, M un sous-espace de X invariant relativement à A, et P un projecteur (pas nécessairement orthogonal) de X sur M, et enfin A_M la restriction de l'opérateur A à M. Alors*

$$\operatorname{tr}(A_M) = \operatorname{tr}(AP). \tag{2.9.4}$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$N = (1 - P)X. \tag{2.9.5}$$

Soient $e_1, \ldots, e_m$ une base dans M et $e_{m+1}, \ldots, e_n$ une base dans N. Il découle de la définition du projecteur que $e_1, \ldots, e_n$ est une base dans X. On a alors, en vertu de (2.9.5) et par définition d'un projecteur,

$$APe_k = \begin{cases} Ae_k = A_M e_k & \text{pour } k = 1, \ldots, m, \\ 0 & \text{pour } k = m+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.9.6}$$

et par conséquent la matrice a de l'opérateur AP relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$ est de la forme

$$a = \left\| \begin{matrix} a_m & 0 \\ * & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad (2.9.7)$$

où a_m est la matrice de l'opérateur A_M pour la base $e_1, \ldots, e_m$. Ceci implique (2.9.4).

On appelle *caractère* $\chi_T(g)$ d'une représentation de dimension finie T la trace de l'opérateur $T(g)$ de cette représentation:

$$\chi_T(g) = \operatorname{tr}(T(g)). \qquad (2.9.8)$$

Si aucune confusion n'est possible, on écrit $\chi(g)$ à la place de $\chi_T(g)$.

Ainsi, en vertu de (2.9.1) et (2.9.2),

$$\chi_T(g) = t_{11}(g) + t_{22}(g) + \ldots + t_{nn}(g), \qquad (2.9.9)$$

où les $t_{jk}(g)$ sont les éléments matriciaux de la représentation T relativement à une certaine base, et n est la dimension de cette représentation. Si le groupe G est commutatif et T est unidimensionnel, alors $\chi_T(g)$ coïncide avec le caractère sur le groupe G (voir 2.2).

IV. *Le caractère d'une représentation de dimension finie possède les propriétés suivantes:*

a) *les caractères des représentations équivalentes coïncident;*

b) *un caractère est constant sur chaque classe d'éléments conjugués;*

c) *si T et S sont adjointes, on a $\chi_S(g) = \overline{\chi_T(g^{-1})}$;*

d) *si T est unitaire, on a $\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}$;*

e) *le caractère d'une somme semi-directe, en particulier d'une somme directe, d'un nombre fini de représentations est égal à la somme des caractères de ces représentations;*

f) *le caractère du produit tensoriel d'un nombre fini de représentations est égal au produit des caractères de ces représentations.*

Démonstration. Supposons que les représentations T et S dans les espaces X et Y sont équivalentes. En vertu de I de 2.2, on peut choisir des bases dans X et Y de manière à ce que les éléments matriciaux de T et S coïncident relativement à ces bases. D'où l'on déduit, en attirant (2.9.9), la propriété a) *).

Si g_2 et g_1 sont conjugués, alors $g_2 = g^{-1}g_1g$ pour un certain $g \in G$ (voir (1.7.5)). D'où l'on tire à l'aide de la propriété 5):

$$\chi(g_2) = \chi(g^{-1}g_1g) = \operatorname{tr}(T(g^{-1}g_1g)) = \\ = \operatorname{tr}((T(g))^{-1}T(g_1)\,T(g)) = \operatorname{tr}(T(g_1)) = \chi(g_1).$$

*) Nous verrons par la suite que la réciproque est également vraie dans nombre de cas.

Si S et T sont adjointes, alors, pour un choix approprié de bases, on a

$$s_{jk}(g) = \overline{t_{kj}(g^{-1})}$$

(voir (2.3.13)). D'où

$$\chi_S(g) = s_{11}(g) + \ldots + s_{nn}(g) = \overline{t_{11}(g^{-1})} + \ldots + \overline{t_{nn}(g^{-1})} = \overline{\chi_T(g^{-1})}.$$

La propriété d) découle maintenant de la propriété c), puisque l'unitarité de T entraîne que cette représentation est adjointe à elle-même (voir I de 2.8) et donc $\chi_T(g) = \overline{\chi_T(g^{-1})}$. D'où l'on tire

$$\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}.$$

Supposons que $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$; alors, pour une base appropriée, la matrice $t(g)$ de la représentation T aura la forme

$$\left\| \begin{matrix} t^1_{11}(g) & \ldots & t^1_{1n_1}(g) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^1_{n_11}(g) & \ldots & t^1_{n_1n_1}(g) & 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \ldots & * & * & & * & t^m_{11}(g) & \ldots & t^m_{1n_m}(g) \\ * & \ldots & * & * & & * & t^m_{n_m1}(g) & \ldots & t^m_{n_mn_m}(g) \end{matrix} \right\|,$$

où $t^k_{j\nu}$ sont les éléments matriciaux de la représentation T^k, $k = 1, \ldots, n$ (voir (2.5.9)). D'où l'on tire

$$\chi_T(g) = t^1_{11}(g) + \ldots + t^1_{n_1n_1}(g) + t^2_{11}(g) + \ldots + t^2_{n_2n_2}(g) + \ldots$$
$$\ldots + t^m_{11}(g) + \ldots + t^m_{n_mn_m}(g) =$$
$$= \chi_{T^1}(g) + \chi_{T^2}(g) + \ldots + \chi_{T^m}(g). \qquad (2.9.10)$$

En particulier, (2.9.10) est vérifié pour $T = T^1 \dot{+} \ldots \dot{+} T^m$. Enfin, supposons que $T = T^1 \otimes T^2$ et soient X_1, X_2 les espaces des représentations T^1, T^2 et $e^1_1, \ldots, e^1_{n_1}$; $e^2_1, \ldots, e^2_{n_2}$ des bases dans X_1, X_2. Alors les éléments matriciaux de la représentation T relativement à la base $e_{jk} = e^1_j \otimes e^2_k$ seront de la forme

$$t_{\mu\nu jk}(g) = t^1_{\mu j}(g)\, t^2_{\nu k}(g)$$

(voir (2.6.4)), en particulier les matrices diagonales seront

$$t_{jkjk}(g) = t^1_{jj}(g)\, t^2_{kk}(g)$$

et donc

$$\chi_{T^1 \otimes T^2}(g) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} t^1_{jj}(g)\, t^2_{kk}(g) = \sum_{j=1}^{n_1} t^1_{jj}(g) \sum_{k=1}^{n_2} t^2_{kk}(g) = \chi_{T^1}(g)\, \chi_{T^2}(g).$$

En appliquant un raisonnement analogue à la formule (2.6.6), nous obtenons

$$\chi_{T^1\otimes\ldots\otimes T^m}(g)=\chi_{T^1}(g)\ \ldots\ \chi_{T^m}(g). \tag{2.9.11}$$

Exemples et exercices

1. Trouver les représentations irréductibles des groupes S_3, S_4, P_3 et P_4 et calculer leurs caractères.

2. Donner des exemples de représentations non équivalentes d'un groupe (infini) qui possèdent des caractères égaux.

2.10. Opérateurs d'entrelacement. Soient T, S des représentations du groupe G dans les espaces X et Y. Un opérateur linéaire A de X dans Y s'appelle *opérateur d'entrelacement* entre T et S, si

$$AT(g)=S(g)A \quad \text{quel que soit } g\in G. \tag{2.10.1}$$

En particulier, si l'on a $X=Y$ et $T=S$, alors la formule (2.10.1) se met sous la forme

$$AT(g)=T(g)A \text{ quel que soit } g\in G \tag{2.10.2}$$

et l'on dit alors que A est *permutable* avec la représentation T (comparer avec (2.2.3)).

La notion d'opérateur d'entrelacement généralise celle d'équivalence des représentations. En effet, si A est un opérateur d'entrelacement entre T et S qui applique bijectivement X sur Y, alors les représentations T et S sont équivalentes (voir 2.2).

L'ensemble des opérateurs linéaires A d'entrelacement entre T et S est désigné par Hom (T, S) ou bien $\mathrm{Hom}_G\,(T, S)$.

I. Hom (T, S) *est un sous-espace linéaire de l'espace des opérateurs linéaires de* X *dans* Y.

En effet, $A_1, A_2\in$ Hom (T, S) entraîne

$$(A_1+A_2)\,T(g)=A_1T(g)+A_2T(g)=$$
$$=S(g)A_1+S(g)A_2=S(g)(A_1+A_2)$$

quel que soit $g\in G$, i.e. $A_1+A_2\in$ Hom (T, S); mais si $A\in$ Hom (T, S), alors pour un nombre quelconque λ, on a

$$(\lambda A)\,T(g)=\lambda\,(AT(g))=\lambda\,(S(g)A)=S(g)(\lambda A)$$

quel que soit $g\in G$, donc $\lambda A\in$ Hom (T, S).

La dimension de l'espace linéaire Hom (T, S) est appelée *nombre d'entrelacement* des représentations T et S.

II. *Si* $S=T$, *alors l'ensemble* Hom (T, T) *est une sous-algèbre* (voir 2.1, chap. II) *de l'algèbre* $L(X)$ *des opérateurs linéaires dans l'espace* X.

En effet, Hom (T, T) est un sous-espace linéaire dans $L(X)$ et, quels que soient $A, B \in$ Hom (T, T), on a

$$ABT(g) = AT(g)B = T(g)AB \text{ quel que soit } g \in G,$$

et donc $AB \in$ Hom (T, T).

III. *Si* $A \in$ Hom (T, S), L *est le noyau de l'opérateur* A (i.e. $L = \{x : x \in X, Ax = 0\}$) *et* M *est l'image de l'opérateur* A (i.e. $M = \{y : y = Ax$ *pour un certain* $x \in X\}$), *alors* L *est invariant relativement à* T *et* M *est invariant relativement à* S.

En effet, si l'on a $x \in L$, i.e. $Ax = 0$, alors $AT(g)x = S(g)Ax = S(g)0 = 0$ quel que soit $g \in G$, i.e. $T(g)x \in L$ quel que soit $g \in G$; si $y \in M$, i.e. $y = Ax$ pour un certain $x \in X$, alors $S(g)y = S(g)Ax = A(T(g)x)$, i.e. $S(g)y \in M$ quel que soit $g \in G$.

IV. *Si* $A \in$ Hom (T, S), L *est le noyau de* A, *et* M *l'image de* A, *alors la représentation* $\widetilde{T}$ *induite par la représentation* T *dans l'espace quotient* X/L *est équivalente à la restriction* $S|_M$ *de la représentation* S *à* M.

En effet, l'opérateur A détermine l'opérateur $\widetilde{A}$, qui applique X/L sur M bijectivement, selon la formule $\widetilde{A}(x + L) = Ax$, $x \in X$. Alors, si $\widetilde{T}$ est la représentation induite par T dans l'espace quotient X/L, on a

$$\widetilde{A}\widetilde{T}(g)(x + L) = \widetilde{A}(T(g)x + L) = AT(g)x = S(g)Ax = S(g)\widetilde{A}(x + L)$$

quels que soient $x \in X$, $g \in G$; mais $\widetilde{A}(x + L) \in M$, donc $S(g)\widetilde{A}(x + L) = S(g)|_M \widetilde{A}(x + L)$, où $S(g)|_M$ est la restriction de l'opérateur $S(g)$ à M; par conséquent $\widetilde{A}\widetilde{T}(g) = S(g)|_M \widetilde{A}$ quel que soit $g \in G$, et $\widetilde{T} \sim S|_M$.

V. *Soient* T *une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe* G *dans un espace linéaire* X, *et* S *une représentation de dimension finie du groupe* G *dans un espace* Y, *multiple de la représentation irréductible* T_1, *i.e.* $S = nT_1$. *Alors*

$$\dim \operatorname{Hom}(T, S) = \begin{cases} 0 \text{ si } T \not\sim T_1, \\ n \text{ si } T \sim T_1. \end{cases} \tag{2.10.3}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $Y = Y_1 \dotplus \ldots \dotplus Y_n$, où chaque sous-espace $Y_i \subset Y$ est invariant relativement à S, et la restriction de la représentation S à chaque sous-espace Y_i est équivalente à la représentation T_1. Désignons cette restriction par S_i. Soit P_i l'opérateur linéaire dans l'espace Y qui fait correspondre à chaque élément

$y = y_1 + \ldots + y_n$ $(y_i \in Y_i,\ i = 1, \ldots, n)$ l'élément $y_i \in Y_i$, i.e. $P_i y = y_i$. Par définition même de la somme directe des représentations, l'opérateur P_i est permutable avec la représentation S, i.e. $P_i S(g) = S(g) P_i$ quel que soit $g \in G$. D'où l'on tire que $A \in \in \mathrm{Hom}(T, S)$ entraîne

$$P_i A T(g) = P_i (S(g) A) = S(g) P_i A \text{ quel que soit } g \in G, \tag{2.10.4}$$

i.e. l'opérateur $P_i A$ est un entrelacement entre T et S. Puisque l'image de l'opérateur $P_i A$ est contenue dans l'espace Y_i de la sous-représentation S_i, l'opérateur $P_i A$, envisagé comme un opérateur linéaire de X dans $Y_i = P_i Y$ est un entrelacement entre T et S_i. Mais S_i est équivalent à T_1, donc $P_i A = 0$ pour $T \not\sim T_1$ en vertu du lemme de S c h u r; mais alors $Ax = \sum_{i=1}^{n} P_i A x = 0$ quel que soit $x \in X$, i.e. $A = 0$.

Soit maintenant $T \sim T_1$; alors S_i est équivalent à T. Soit B_i un opérateur linéaire de X dans Y_i qui réalise l'équivalence entre T et S_i:

$$B_i T(g) = S_i(g) B_i \text{ quel que soit } g \in G. \tag{2.10.5}$$

Puisque B_i est un isomorphisme de X sur Y_i (par définition de l'équivalence), il existe un opérateur inverse B_i^{-1}; en multipliant (2.10.5) à gauche et à droite par B_i^{-1}, nous obtenons

$$T(g) B_i^{-1} = B_i^{-1} S_i(g) \text{ quel que soit } g \in G. \tag{2.10.6}$$

On déduit de (2.10.4) et (2.10.6) que

$$P_i A B_i^{-1} S_i(g) = P_i A T(g) B_i^{-1} = S_i(g) P_i A B_i^{-1},$$

i.e. l'opérateur $P_i A B_i^{-1}$ est permutable avec la représentation irréductible S_i de dimension finie du groupe G; par conséquent (voir le lemme 2 de 2.2)

$$P_i A B_i^{-1} = \lambda_i 1, \text{ où } \lambda_i \text{ est un nombre,}$$

alors $P_i A = \lambda_i B_i$, où les B_i sont des opérateurs de X dans Y. Puisque $y = P_1 y + \ldots + P_n y$ pour tous les $y \in Y$ (par définition de P_i), on a

$$A = \sum_{i=1}^{n} P_i A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i,$$

i.e. tout opérateur d'entrelacement A entre T et S est une combinaison linéaire des B_i. Réciproquement, chaque opérateur A de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$ est un entrelacement entre T et S. En effet, en vertu de I, il suffit de montrer que B_i est un entrelacement entre T et S; mais

la formule (2.10.4) est équivalente à la relation $B_i T(g) = S(g) B_i$ pour tous les $g \in G$, de sorte que l'image de l'opérateur B_i est contenue dans Y_i. Ainsi $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ si et seulement si $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$. Mais puisque chaque opérateur B_i est un isomorphisme de X sur Y_i, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i = 0$ si et seulement si tous les $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, et donc la correspondance $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i \leftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un isomorphisme des espaces linéaires $\operatorname{Hom}(T, S)$ et $\mathbf{C}^n$, et par conséquent $\dim \operatorname{Hom}(T, S) = n$.

VI. *Soit T une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe G dans un espace linéaire X; soit S une représentation de dimension finie du groupe G, décomposable en somme directe: $S = n_1 T^1 \dotplus \ldots \dotplus n_p T^p$, où $T^1, \ldots, T^p$ sont des représentations irréductibles du groupe G. Alors*

$$\dim \operatorname{Hom}(T, S) = \begin{cases} n_k & \text{si } T \text{ est équivalent à } T^k, \\ 0 & \text{si } T \text{ n'est pas équivalent à } T^1, \ldots, T^p, \end{cases} \tag{2.10.7}$$

i.e. la dimension de l'espace $\operatorname{Hom}(T, S)$ *des opérateurs d'entrelacement est égale à la multiplicité dans S de la représentation irréductible correspondante.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Y l'espace de la représentation S et $Y = Y_1 \dotplus \ldots \dotplus Y_p$, où Y_k est l'espace de la représentation $n_k T^k$. Soit P_k l'opérateur linéaire dans l'espace Y qui fait correspondre à l'élément $y = y_1 + \ldots + y_p$ ($y_k \in Y_k$, $k = 1, \ldots, p$) l'élément $y_k \in Y_k \subset Y$, i.e. $P_k y = y_k$; il est évident que $P_1 + \ldots + P_p = 1$. De même que dans la démonstration de V, on vérifie que $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ entraîne $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ et que $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$, si S^k est la restriction de S à Y_k. Ainsi

$$A = P_1 A + \ldots + P_p A, \tag{2.10.8}$$

où $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que si A est un opérateur linéaire de X dans Y tel que $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$, alors $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$. Mais, en vertu de V, nous avons

$$\dim \operatorname{Hom}(T, S^k) = 0, \text{ si } T \not\sim T^k,$$
$$\dim \operatorname{Hom}(T, S^k) = n_k, \text{ si } T \sim T^k.$$

Donc, si $T \not\sim T^1, \ldots, T \not\sim T^p$, on a $P_k A = 0$ pour chaque $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$; par conséquent, $A = 0$, i.e. $\operatorname{Hom}(T, S) = \{0\}$; mais si $T \sim T^k$, alors $T \not\sim T^j$ pour $j \neq k$; par conséquent, pour

chaque $A \in \text{Hom}(T, S)$, nous avons $P^j A = 0$ lorsque $j \neq k$ et (2.10.8) implique $A = P^k A$; par conséquent Hom (T, S) est isomorphe à Hom (T, S^k) qui est de dimension n_k en vertu de V

Exemples et exercices

1. Soient T, S des représentations irréductibles de dimension finie du groupe G. Les conditions suivantes sont équivalentes: a) Hom $(T, S) \neq 0$, b) dim Hom $(T, S) = 1$; c) $T \sim S$.

2. Si T est une représentation de dimension finie du groupe G, alors, pour certaines représentations irréductibles S, S_1 du groupe G on a les relations Hom $(T, S) \neq 0$, Hom $(S_1, T) \neq 0$.

3. Soient $T = m_1 T^1 \dotplus \ldots \dotplus m_p T^p$, $S = n_1 T^1 \dotplus \ldots \dotplus n_p T^p$ des décompositions des représentations T et S de dimension finie en sommes directes de représentations irréductibles du groupe G. Alors dim Hom $(T, S) = m_1 n_1 + \ldots + m_p n_p$.

4. Soient X, X' des espaces linéaires; Y, Y' des espaces linéaires en dualité avec X, X' respectivement relativement aux formes (x, y) et $(x', y')'$. Soient T, T' des représentations du groupe G dans X, X' respectivement; S, S' des représentations adjointes à T, T'.

a) Soient A un opérateur linéaire de X dans X', et B un opérateur linéaire de Y' dans Y tels que $(Ax, y')' = (x, By')$ quels que soient $x \in X$, $y' \in Y'$. Dans ces conditions A est un opérateur d'entrelacement entre T et T' si et seulement si B est un opérateur d'entrelacement entre S' et S.

b) Si X et X' sont de dimension finie, alors les espaces linéaires Hom (T, T') et Hom (S', S) sont isomorphes.

5. Soient T, S des représentations de dimension finie du groupe G. En règle générale dim Hom $(T, S) \neq$ dim Hom (S, T). (I n d i c a t i o n: envisager en guise de T ou S une somme semi-directe de représentations irréductibles.)

CHAPITRE II

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

§ 1. Théorèmes fondamentaux de la théorie des représentations des groupes finis *)

1.1. Moyenne invariante sur un groupe fini. Soient G un groupe d'ordre N, $g_1 = e$ et $g_2, \ldots, g_N$ tous ses différents éléments. Nous allons considérer des fonctions numériques $f(g)$ sur G, i.e. des familles de N nombres $f(g_1), \ldots, f(g_N)$. Soit f une telle famille, et $h \in G$, de sorte que h est un des éléments $g_1, \ldots, g_N$. La fonction f_h définie par la formule

$$f_h(g) = f(gh) \tag{1.1.1a}$$

est dite *translatée à droite par h de la fonction f*. D'une manière analogue, la fonction f^h définie par la formule

$$f^h(g) = f(hg) \tag{1.1.1b}$$

est dite *translatée à gauche par h de la fonction f*.

Une des méthodes fondamentales de l'étude des représentations d'un groupe fini G fait appel au calcul de la moyenne invariante sur G. La moyenne arithmétique des valeurs d'une fonction numérique f sur le groupe G d'ordre N s'appelle *moyenne invariante* de la fonction f sur G; on la désigne par $M(f)$, de sorte que, par définition,

$$M(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(g_k), \tag{1.1.2a}$$

ou, dans une notation plus concise,

$$M(f) = \frac{1}{N} \sum_{g} f(g). \tag{1.1.2b}$$

On écrit parfois $M(f(g))$ à la place de $M(f)$.

I. *La moyenne invariante $M(f)$ possède les propriétés suivantes:*

1) $M(1) = 1$, *où le* 1 *du premier membre est la fonction* $f \equiv 1$ *sur* G.

2) $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$;

---

*) Partout dans ce chapitre, nous ne considérons que les groupes finis et leurs représentations de dimension finie, sans le mentionner explicitement à chaque fois.

3) *$M(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$ et $M(f) > 0$ si $f \geqslant 0$ et $f \not\equiv 0$;*
4) *$M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$;*
5) *$M(\alpha f) = \alpha M(f)$, où α est un nombre;*
6) *$M(f_h) = M(f)$ et $M(f^h) = M(f)$;*
7) *$M(f(g^{-1})) = M(f(g))$.*

Démonstration. Les propriétés 1) à 5) découlent immédiatement de la définition (1.1.2). Pour démontrer la propriété 6), il suffit de remarquer que pour un élément donné $h \in G$, l'ensemble $g_1h, g_2h, \ldots, g_Nh$ coïncide avec G, de sorte que les $g_1h, g_2h, \ldots$ $\ldots, g_Nh$ sont les mêmes éléments $g_1, \ldots, g_N$, éventuellement écrits dans un ordre différent. Par conséquent

$$M(f_h) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_h(g_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(g_kh) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(g_k) = M(f).$$

On démontre d'une manière analogue que $M(f^h) = M(f)$. C'est précisément à cause de cette propriété d'invariance de $M(f)$ relativement aux translations de la fonction f que le nombre $M(f)$ s'appelle moyenne invariante. De même que la moyenne invariante d'une fonction numérique, on peut introduire les moyennes invariantes des fonctions vectorielles et opératoires *) sur un groupe fini. Soit $x = x(g)$ une fonction vectorielle sur le groupe $G = \{g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_N\}$ à valeurs dans un espace linéaire X donné. Si X est de dimension finie, alors $(x)_j$ désignera la j-ième coordonnée du vecteur x relativement à une base donnée de X. On appelle *moyenne invariante de la fonction vectorielle* x sur le groupe G le vecteur

$$M(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(g_k). \tag{1.1.3}$$

On écrit parfois $M(x(g))$ à la place de $M(x)$.

II. *La moyenne invariante $M(x)$ possède les propriétés suivantes:*
a) *$M(c) = c$, où le c à gauche est la fonction $x(g) \equiv c$, et le c à droite est un vecteur qui ne dépend pas de g;*
b) *$M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2)$, où $x_1(g)$, $x_2(g) \in X$;*
c) *$M(\alpha x) = \alpha M(x)$, où α est un nombre;*
d) *$M(Ax) = AM(x)$, où A est un opérateur linéaire dans X défini pour chaque point de X et indépendant de g;*
e) *$M(x_h) = M(x)$ et $M(x^h) = M(x)$, où $x_h(g) = x(gh)$ et $x^h(g) = x(hg)$;*
f) *$(M(x))_j = M((x)_j)$, où les coordonnées à gauche et à droite sont choisies relativement à une même base de X.*

Toutes ces propriétés découlent immédiatement de la définition (1.1.3) de la moyenne $M(x)$; en particulier, la propriété e) se démon-

*) I.e. à valeurs dans un espace d'opérateurs.

tre comme la propriété 6) dans I ; la propriété d) découle des égalités

$$M(Ax)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}Ax(g_k)=A\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(g_k)\right)=AM(x).$$

Passons à la moyenne invariante des fonctions opératoires. Par la suite, X, Y, Z désigneront des espaces linéaires, $L(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur X partout définis sur X, $L(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires de X dans Y, définis en chaque point de X. Si X et Y sont de dimension finie, alors $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ sont des bases données de X et Y ; si $A \in L(X, Y)$, alors on désignera toujours par $(A)_{jk}$ les éléments matriciaux de l'opérateur A relativement aux bases données. Soit $A = A(g)$ une fonction opératoire sur le groupe $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ à valeurs dans $L(X, Y)$. On appelle *moyenne invariante de la fonction opératoire* sur le groupe G l'opérateur

$$M(A)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}A(g_k). \tag{1.1.4}$$

On écrit parfois $M(A(g))$ à la place de $M(A)$.

III. *La moyenne invariante $M(A)$ d'une fonction opératoire $A = A(g)$, $A(g) \in L(X)$, possède les propriétés suivantes:*

a') *$M(A) = A$ si $A \in L(X, Y)$ ne dépend pas de g;*

b') *$M(A_1 + A_2) = M(A_1) + M(A_2)$, où $A_1(g)$, $A_2(g) \in L(X, Y)$;*

c') *$M(\alpha A) = \alpha(M(A))$, où α est un nombre;*

d') *$M(BA) = B(M(A))$, $M(AC) = M(A)C$ si $B \in L(Y, Z)$, $C \in L(Z, X)$ et B et C ne dépendent pas de g, $A(g) \in L(X, Y)$;*

e') *$M(A_h) = M(A)$ et $M(A^h) = M(A)$, où $A_h(g) = A(gh)$ et $A^h(g) = A(hg)$;*

f') *$\operatorname{tr}(M(A)) = M(\operatorname{tr}(A))$ si $A(g) \in L(X)$ et X est de dimension finie;*

g') *$(M(A))_{jk} = M((A)_{jk})$, où les éléments matriciaux à gauche et à droite sont choisis relativement aux mêmes bases de X et Y.*

D é m o n s t r a t i o n. Les propriétés a') à d') se déduisent immédiatement de (1.1.4) et de la linéarité des opérateurs B et $A(g)$; les propriétés e') et g') se démontrent d'une manière analogue aux propriétés 6) dans I et f) dans II. Enfin, la propriété f') s'obtient des égalités

$$\operatorname{tr}(M(A))=\operatorname{tr}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}A(g_k)\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{tr}(A(g_k))=M(\operatorname{tr}A)$$

(voir 1) et 2) de I, 2.9, chap. I).

1.2. Réductibilité complète des représentations d'un groupe fini.*)

THÉORÈME 1. *Toute représentation d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.*

Démonstration. Soient T une représentation d'un groupe fini dans un espace de dimension finie X, et $(x, y)_1$ un produit scalaire dans X, par exemple $(x, y)_1 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \bar{\eta}_j$, $n = \dim X$, où ξ_j, η_j sont les coordonnées des vecteurs $x, y \in X$ relativement à une certaine base de X. Définissons la forme (x, y) dans X en posant

$$f(g) = (T(g)x, \; T(g)y)_1, \tag{1.2.1}$$

$$(x, y) = M(f) = M((T(g)x, \; T(g)y)_1); \tag{1.2.2}$$

la forme (x, y) est un produit scalaire dans X. En effet, (x, y) est bilinéaire en vertu des propriétés 1), 4), 5) de la moyenne $M(f)$, de la linéarité des opérateurs $T(g)$ et de la bilinéarité de la forme $(x, y)_1$. Ensuite, puisque $(x, y)_1$ est hermitienne, on a en vertu de 2), I, 1.1

$$(y, x) = M((T(g)y, \; T(g)x_1) = \overline{M((T(g)x, \; T(g)y)_1)} = \overline{(x, y)},$$

donc (x, y) est également hermitienne. Enfin, $(T(g)x, T(g)x)_1 \geqslant 0$, car $(x, y)_1$ est un produit scalaire. D'où l'on tire, à l'aide de 3), I, 1.1

$$(x, x) = M((T(g)x, \; T(g)x)_1) \geqslant 0,$$

l'égalité ne pouvant ici avoir lieu que lorsque $(T(g)x, T(g)x)_1 = 0$ quel que soit $g \in G$. En posant ici $g = e$, nous obtenons $(x, x)_1 = 0$; par conséquent, $x = 0$. Ainsi $(x, x) \geqslant 0$, et $(x, x) = 0$ seulement si $x = 0$. Nous avons donc démontré que (x, y) est un produit scalaire sur X. Pour terminer la démonstration du théorème, remarquons maintenant qu'en vertu de 6) de I, 1.1, et de (1.2.1) et (1.2.2), nous avons pour chaque $h \in G$

$$(T(h)x, \; T(h)y) = M(T(g)\,T(h)x, \; T(g)\,T(h)y) =$$
$$= M(T(gh)x, \; T(gh)y) = M(f_h) = M(f) = (x, y),$$

ce qui signifie que T est unitaire relativement à (x, y). Notons enfin que chaque représentation de dimension finie, équivalente à une représentation unitaire, est complètement réductible (voir V de 2.8, chapitre I); nous pouvons donc conclure que

THÉORÈME 2. *Toute représentation d'un groupe fini est complètement réductible.*

Les problèmes fondamentaux de la théorie des représentations des groupes finis sont les suivants:

---

*) Rappelons que nous considérons dans ce chapitre les représentations de dimension finie seulement.

1. Recherche de toutes les représentations irréductibles d'un groupe fini donné.

2. Décomposition d'une représentation donnée de dimension finie d'un groupe fini en ses représentations irréductibles.

A l'alinéa 1.8 nous verrons que le deuxième problème se résout lorsqu'on sait résoudre le premier. Quant à la solution du premier problème, elle n'est connue que pour un nombre assez restreint de groupes finis.

1.3. L'espace $L^2(G)$; représentations régulières. Désignons par $L^2(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions numériques $f(g)$ sur le groupe fini $G = \{g_1, \ldots, g_N\}$. Chaque $f(g)$ est tout simplement une famille de N nombres $f(g_1), f(g_2), \ldots, f(g_N)$. Définissons dans $L^2(G)$ la somme et le produit par un nombre comme des opérations correspondantes sur les fonctions. $L^2(G)$ devient alors un espace linéaire de dimension N. Définissons enfin dans $L^2(G)$ une forme bilinéaire (f_1, f_2) par la formule

$$(f_1, f_2) = M(f_1, \bar{f}_2) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_1(g_k)\overline{f_2(g_k)}. \tag{1.3.1}$$

Il est facile de voir que la forme (f_1, f_2) est hermitienne et définie positive, donc elle est un produit scalaire dans $L^2(G)$. Par conséquent, $L^2(G)$, muni des opérations somme, produit par un nombre et produit scalaire, est un espace euclidien de dimension N.

Définissons maintenant les opérateurs $T(g)$, $g \in G$, en posant pour chaque $h \in G$

$$T(h) f = f_h, \text{ i.e. } T(h) f(g) = f(gh). \tag{1.3.2}$$

Il est évident que $T(h)$ est linéaire. En outre, l'application $h \to T(h)$ est une représentation du groupe G; désignons-la par T. En effet, pour $h_1, h_2 \in G$, on a

$$T(h_1)\,T(h_2)\,f(g) = T(h_1)\,(T(h_2)\,f(g)) = T(h_1)\,(f(gh_2)) = \\ = f((gh_1)\,h_2) = f(g\,(h_1h_2)) = T(h_1h_2)\,f(g)$$

et évidemment $T(e) f(g) = f(g)$. Cette représentation est unitaire. En effet, en posant $f = f_1\bar{f}_2$, nous aurons en vertu de 6) de I, 1.1 :

$$(T(h) f_1,\ T(h) f_2) = M(f_{1h}\bar{f}_{2h}) = M(f_h) = M(f) = \\ = M(f_1\bar{f}_2) = (f_1 f_2).$$

La représentation unitaire T construite dans $L^2(G)$ s'appelle *représentation régulière à droite du groupe G*. On définit d'une manière analogue la *représentation régulière à gauche $\tilde{T}$ du groupe G dans* $L^2(G)$ à l'aide de la formule

$$\tilde{T}_h f(g) = f(h^{-1}g). \tag{1.3.3}$$

La représentation $\widetilde{T}$ est unitaire; cela découle de l'invariance à gauche de la moyenne $M(f)$ (voir (1.1.1b) et 6), I, 1.1).

I. *Les représentations régulières à droite et à gauche sont unitairement équivalentes.*

D é m o n s t r a t i o n. Faisons correspondre à chaque fonction $f \in L^2(G)$ la fonction

$$f'(g) = f(g^{-1}). \tag{1.3.4}$$

L'opérateur $W: f \to f'$ est évidemment linéaire. En outre, il découle de (1.3.4) que

$$W^2 = 1$$

et donc W applique $L^2(G)$ sur $L^2(G)$. D'autre part, en vertu de 7) de I, 1.1, pour $f, f_1 \in L^2(G)$ on a

$$(Wf, Wf_1) = (f', f'_1) = M(f(g^{-1})\overline{f_1(g^{-1})}) = M(f(g)\overline{f_1(g)}) = (f, f_1),$$

donc W est unitaire. Enfin

$$(WT(h)f)(g) = (Wf)(gh) = f(g^{-1}h),$$

$$(\widetilde{T}(h)Wf)(g) = \widetilde{T}(h)f'(g) = \widetilde{T}(h)f(g^{-1}) = f((h^{-1}g)^{-1}) = \\ = f(g^{-1}h),$$

d'où l'on tire $WT(h) = \widetilde{T}(h)W$, i.e. W applique $T(h)$ sur $\widetilde{T}(h)$.

1.4. Relations d'orthogonalité. En vertu du théorème 1 de 1.2, toute représentation T du groupe fini G est équivalente à une représentation unitaire. Par conséquent, nous pouvons admettre, et nous admettrons par la suite, que l'espace X de cette représentation est déjà muni du produit scalaire (x, y) relativement auquel T est unitaire. En outre, nous supposerons par la suite que les $t_{jk}(g)$ sont les éléments matriciaux de la représentation relativement à une base orthonormée dans X pour la forme (x, y), de sorte que la matrice $t(g)$ de la représentation T est unitaire (voir III, 2.8, chap. I).

THÉORÈME 1. *Soient T^1 et T^2 deux représentations irréductibles d'un groupe fini G, et $t^1_{jk}(g)$, $t^2_{jk}(g)$ leurs éléments matriciaux. Alors*

$$(t^1_{jk}(g), t^2_{pq}(g)) = 0 \quad si \quad T^1 \not\sim T^2 \tag{1.4.1}$$

$$(t^1_{jk}(g), t^1_{pq}(g)) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq p\ ou\ k \neq q, \\ 1/n_1 & si\ j = p\ et\ k = q, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

où n_1 est la dimension de la représentation T^1 et $(\ ,\ )$ le produit scalaire dans $L^2(G)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soient X et Y les espaces des représentations T^1 et T^2, et supposons que $B \in L(Y, X)$. Posons $A(g) =$

$= T^1(g)\, BT^2(g^{-1})$ et

$$C = M(A(g)) = M(T^1(g)\, BT^2(g^{-1})). \tag{1.4.3}$$

Il est clair que $C \in L(Y, X)$. En outre

$$T^1(h)\, C = CT^2(h). \tag{1.4.4}$$

En effet, en vertu des propriétés d') et f') de III, 1.1, on a

$$\begin{aligned} T^1(h)\, C &= T^1(h)\, M(A(g)) = M(T^1(h)\, A(g)\, T^2(h^{-1})\, T^2(h)) = \\ &= M(T^1(h)\, T^1(g)\, BT^2(g^{-1})\, T^2(h^{-1}))\, T^2(h) = \\ &= M(T^1(hg)\, BT^2(hg)^{-1})\, T^2(h) = M(A(hg))\, T^2(h) = \\ &= M(A(g))\, T^2(h) = CT^2(h). \end{aligned}$$

Supposons que T^1 et T^2 ne sont pas équivalentes; en appliquant à (1.4.4) le lemme de Schur (voir 2.2, chap. I) nous voyons que $C = 0$, i.e.

$$M(T^1(g)\, BT^2(g^{-1})) = 0 \text{ pour chaque } B \in L(Y, X). \tag{1.4.5}$$

En passant dans (1.4.5) aux éléments matriciaux et en nous servant de la propriété g') de III, 1.1, nous obtenons

$$M\left(\sum_{\mu=1}^{n_1} \sum_{\nu=1}^{n_2} \overset{1}{t}_{j\mu}(g)\, b_{\mu\nu}\, \overset{2}{t}_{\nu p}(g^{-1})\right) = 0, \tag{1.4.6}$$

$$j = 1, \ldots, n_1; \quad p = 1, \ldots, n_2$$

quels que soient les $b_{\mu\nu}$. Choisissons

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \mu = k \text{ et } \nu = q, \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Alors (1.4.6) prend la forme

$$M(\overset{1}{t}_{jk}(g)\, \overset{2}{t}_{qp}(g^{-1})) = 0. \tag{1.4.7}$$

Mais $\overset{2}{t}_{qp}(g^{-1}) = \overline{\overset{2}{t}_{pq}(g)}$ (voir (2.8.7) chap. I) de sorte que (1.4.7) coïncide avec l'égalité

$$M(\overset{1}{t}_{jk}(g)\, \overline{\overset{2}{t}_{pq}(g)}) = 0.$$

Par définition du produit scalaire dans $L^2(G)$ (voir (1.3.1)), cette dernière relation se réduit à (1.4.1). La relation (1.4.4) est satisfaite, en particulier, pour $T^2 = T^1$, $Y = X$. Elle prend alors la forme $T^1(h)\, C = CT^1(h)$, i.e. C est permutable à tous les $T^1(g)$. En vertu du lemme 2 de 2.2, chapitre I, on peut en tirer que $C = \lambda 1$, où λ est un nombre.

Calculons λ. Remarquons pour cela qu'en vertu de g') et a'), III, 1.1 et de 5), I, 2.9, chapitre I,

$$\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} M (T^1(g) BT^1(g^{-1})) = \operatorname{tr} M (T^1(g) B (T^1(g))^{-1}) =$$
$$= M (\operatorname{tr} (T^1(g) B (T^1(g))^{-1})) = M (\operatorname{tr} B) = \operatorname{tr} B;$$

d'autre part $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} \lambda 1 = \lambda n_1$, où $n_1 = \dim X_1$ et donc $\lambda = = \frac{1}{n_1} \operatorname{tr} B$. D'où l'on tire

$$C = \left(\frac{1}{n_1} \operatorname{tr} B\right) \cdot 1. \tag{1.4.8}$$

En comparant (1.4.8) avec (1.4.3) lorsque $T^2 = T^1$, on obtient

$$M (T^1(g) BT^1(g^{-1})) = \left(\frac{1}{n_1} \operatorname{tr} B\right) \cdot 1 \tag{1.4.9}$$

quel que soit $B \in L(X)$. En passant dans (1.4.9) aux éléments matriciaux, nous obtenons

$$M \left(\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{\nu=1}^{n_1} t^1_{j\mu}(g) b_{\mu\nu} t^1_{\nu p}(g^{-1})\right) = \begin{cases} \frac{1}{n_1} \sum\limits_{\mu=1}^{n_1} b_{\mu\mu} & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{si } j \neq p \end{cases} \tag{1.4.10}$$

quels que soient les nombres $b_{\mu\nu}$. Choisissons

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \mu = k \text{ et } \nu = q, \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Alors (1.4.10) se met sous la forme

$$M (t^1_{jk}(g)\, t^1_{qp}(g^{-1})) = \begin{cases} 1/n_1 & \text{si } j = p \text{ et } k = q, \\ 0 & \text{si } j \neq p \text{ ou } k \neq q. \end{cases} \tag{1.4.11}$$

mais puisque $t^1_{qp}(g^{-1}) = \overline{t^1_{pq}(g)}$, la relation (1.4.11) se réduit à (1.4.2); ceci termine la démonstration du théorème.

Les formules (1.4.1), (1.4.2) sont appelées *relations d'orthogonalité* d'un groupe fini.

Soient maintenant $T^1, T^2, \ldots, T^m$ des représentations irréductibles, deux à deux non équivalentes, du groupe G d'ordre N, et $n_1, \ldots, n_m$ leurs dimensions. En vertu de (1.4.1) et (1.4.2), les éléments matriciaux $t^k_{j\nu}(g)$, $j, \nu = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, m$, de ces représentations forment un système orthogonal dans $L^2(G)$ et sont donc linéairement indépendants. Par conséquent, elles sont en nombre $\leqslant N$. Mais alors on a également $m \leqslant N$. Autrement dit, on a le

COROLLAIRE 1. *Le nombre des représentations irréductibles deux à deux non équivalentes d'un groupe fini est fini et ne dépasse pas l'ordre du groupe.*

Une famille $T^1, T^2, \ldots, T^m$ de représentations du groupe G s'appelle *système complet de représentations irréductibles*, si :

a) les représentations $T^1, T^2, \ldots, T^m$ sont irréductibles et non équivalentes deux à deux ;

b) chaque représentation irréductible du groupe G est équivalente à une des représentations $T^1, T^2, \ldots, T^m$.

En vertu du corollaire 1, on a le

THÉORÈME 2. *Si $T^1, T^2, \ldots, T^m$ forment un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini G, alors les éléments matriciaux $t^k_{j\nu}(g)$ de toutes ces représentations forment un système orthogonal complet dans $L^2(G)$.*

Démonstration. L'orthogonalité de ce système a été démontrée ci-dessus (théorème 1) ; il suffit donc de démontrer qu'il est complet.

Envisageons une représentation régulière à droite T du groupe G; ses opérateurs sont les opérateurs de translation à droite

$$T(h)f(g) = f(gh) \tag{1.4.12}$$

(voir (1.3.2)). D'après le théorème 2 de 1.2, cette représentation est complètement réductible ; par conséquent

$$L^2(G) = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \ldots \dot{+} X_p, \tag{1.4.13}$$

où X_k, $k = 1, \ldots, p$, sont des sous-espaces invariants relativement à T tels que la restriction $\widetilde{T}^k$ de la représentation T à chaque X_k est irréductible. Par conséquent, elle est équivalente à une des représentations $T^1, T^2, \ldots, T^m$, puisqu'elles forment un système complet. Supposons que $\widetilde{T}^k$ est équivalente à la représentation T^l, $l = l(k)$. On peut alors choisir une base orthonormée $f_1(g), \ldots, f_{n_k}(g)$ dans X_k de manière à ce que les éléments matriciaux de la représentation $\widetilde{T}^k$ relativement à cette base coïncident avec $t^l_{j\nu}(g)$ (voir VII de 2.8, chap. I). D'après (1.4.12) et (2.1.3) du chapitre I, cela signifie que

$$f_\nu(gh) = T(h)f_\nu(g) = \widetilde{T}^k(h)f_\nu(g) = \sum_{j=1}^{n_l} t^l_{j\nu}(h)f_j(g).$$

En posant ici $g = e$ et $f_j(e) = c_j$, nous obtenons

$$f_\nu(h) = \sum_{j=1}^{n_l} c_j t^l_{j\nu}(h) \text{ quel que soit } h \in G.$$

Cela signifie qu'une fonction f_j appartenant à une base de X_k, et donc chaque fonction f de X_k, est une combinaison linéaire des fonctions $t^l_{j\nu}(h)$. En vertu de la relation $L^2(G) = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_p$

(voir (1.4.13)), il en découle que chaque fonction sur $L^2(G)$ est une combinaison linéaire des fonctions $t^l_{j\nu}$, j, $\nu = 1, \ldots, n_l$, $l = 1, \ldots, p$; mais cela signifie justement que $t^l_{j\nu}$ est une base de $L^2(G)$.

REMARQUE. En posant

$$e^k_{j\nu}(g) = \sqrt{n_k}\, t^k_{j\nu}(g), \tag{1.4.14}$$

nous obtenons en vertu de (1.4.1), (1.4.2) et du théorème 2 une base orthonormée dans $L^2(G)$.

THÉORÈME 3 (théorème de Burnside). *L'ordre N d'un groupe est égal à la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un système complet de représentations de ce groupe:*

$$N = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2. \tag{1.4.15}$$

Démonstration. Comme nous l'avons vu ci-dessus, dim $L^2(G) = N$. D'autre part, dim $L^2(G)$ est égal au nombre des éléments de la base

$$t^k_{j\nu}, \quad j, \ \nu = 1, \ldots, n_k; \quad k = 1, \ldots, m \tag{1.4.16}$$

Mais pour chaque k fixe, le nombre des fonctions $t^k_{j\nu}$, j, $\nu = 1, \ldots, n_k$ est égal à n_k^2. Par conséquent, le nombre des éléments de la base de $L^2(G)$ est égal à $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2$. Ceci implique (1.4.15).

1.5. Décomposition d'une représentation régulière d'un groupe fini en représentations irréductibles.

THÉORÈME 1. *Chaque représentation régulière à droite d'un groupe fini G se décompose en représentations irréductibles, et chaque représentation irréductible T^k du groupe G est contenue dans la décomposition de sa représentation régulière avec multiplicité n_k égale à la dimension de la représentation T^k.*

Démonstration. Soient N l'ordre du groupe G, et $T^1, \ldots, T^m$ un système complet de ses représentations irréductibles; soient $t^k_{j\nu}(g)$ leurs éléments matriciaux. Désignons par M^k_j le sous-espace déterminé par les $t^k_{j\nu}(g)$, $\nu = 1, \ldots, n_k$ pour des j et k fixes. Il découle des relations d'orthogonalité (1.4.1), (1.4.2) que

$$M^k_j \perp M^{k'}_{j'} \quad \text{pour} \quad j \neq j' \quad \text{ou} \quad k \neq k'.$$

En outre les $t^k_{j\nu}(g)$ forment une base dans $L^2(G)$ (voir le théorème 2 de 1.4). Par conséquent

$$L^2(G) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \oplus M^k_j. \tag{1 5 1}$$

Chaque M_j^k est invariant relativement à la représentation régulière à droite T du groupe G. En effet, les $t_{j\nu}^k(g)$, $\nu = 1, \ldots, n_k$, pour k et j fixes, forment une base dans M_j^k, et en vertu de (2.1.6), chapitre I, on a

$$T(h)\, t_{j\nu}^k(g) = t_{j\nu}^k(gh) = \sum_{\mu=1}^{n_k} t_{j\mu}^k(g)\, t_{\mu\nu}^k(h) = \sum_{\mu=1}^{n_1} t_{\mu\nu}^k(h)\, t_{j\mu}^k(g). \quad (1.5.2)$$

Mais cela signifie que $T(h)\, t_{j\nu}^k(g)$ est une combinaison linéaire des fonctions $t_{j\mu}^k(g)$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, et donc $T(h)\, t_{j\nu}^k(g) \in M_j^k$.

Désignons par T^{jk} la restriction de T à M_j^k. En multipliant maintenant (1.5.2) par $\sqrt{n_k}$ et en prenant en considération les formules (1.4.14) nous obtenons

$$T^{jk}(h)\, e_{j\nu}^k = T(h)\, e_{j\nu}^k = \sum_{\mu=1}^{n_k} t_{\mu\nu}^k(h)\, e_{j\mu}^k. \quad (1.5.3)$$

Mais $e_{j\mu}^k$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, est une base orthonormée dans M_j^k (voir la remarque dans 1.4); par conséquent d'après (1.5.3) les éléments matriciaux T^{jk} relativement à la base $e_{j\mu}^k$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, coïncident avec $t_{\mu\nu}^k(h)$. On en déduit que T^{jk} est équivalent à T^k. Ainsi la restriction de T à chaque M_j^k, $j = 1, \ldots, n_k$, est équivalente à T^k, et cela signifie justement, en vertu de (1.5.1), que T^k est contenu dans la représentation régulière T avec multiplicité n_k.

Remarque 1. Un théorème analogue est vérifié pour les représentations régulières à gauche. Nous laissons les détails de la démonstration au lecteur.

Remarque 2. La décomposition (1.5.1), et donc la décomposition d'une représentation régulière en représentations irréductibles, dépend du choix des éléments matriciaux $t_{j\nu}^k(g)$, i.e. du choix de la base orthonormée de l'espace X_k de la représentation irréductible T^k, $k = 1, 2, \ldots, m$; par conséquent, cette décomposition n'est pas uniquement déterminée (sauf dans le cas $n_k = 1$). On rencontre une situation analogue lorsqu'on décompose en représentations irréductibles une représentation quelconque d'un groupe donné, dans le cas où cette décomposition contient des représentations irréductibles de multiplicité >1 (voir plus bas III, 1.8).

Remarque 3. Pour trouver un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini donné G, on est naturellement amené à essayer de décomposer ses représentations régulières en représentations irréductibles, puisque toutes les représentations du système complet sont contenues dans cette dernière décomposition. Pourtant, il n'existe pas encore de méthodes générales pour obtenir une telle

décomposition, à moins que les éléments matriciaux des décompositions irréductibles du groupe G, et donc ces représentations irréductibles elles-mêmes, ne soient connus *a priori*. Pour calculer effectivement cette décomposition par la méthode du théorème 1, les éléments matriciaux doivent être connus au préalable.

1.6. Egalité de Parceval et formule de Plancherel. D'après la remarque de 1.4, les fonctions

$$e_{j\nu}^{k}(g)=\sqrt{n_k}\, t_{j\nu}^{k}(g) \tag{1.6.1}$$

forment une base orthonormée dans $L^2(G)$. Par conséquent, toute fonction $f(g)$ vérifie

$$(f,\ f)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j,\ \nu=1}^{n_k}|(f,\ e_{j\nu}^{k})|^2. \tag{1.6.2}$$

Mais en vertu de (1.6.1) on a

$$(f,\ e_{j\nu}^{k})=\sqrt{n_k}\,(f,\ t_{j\nu}^{k}),$$

et donc (1.6.2) s'écrit sous la forme

$$(f,\ f)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j,\ \nu=1}^{n_k}n_k\,|(f,\ t_{j\nu}^{k})|^2, \tag{1.6.3}$$

où les $t_{j\nu}^{k}(g)$ sont les éléments matriciaux du système complet des représentations irréductibles du groupe G, et n_k est la dimension de ces représentations. Les nombres $(f,\ t_{j\nu}^{k})$ sont appelés *coefficients de Fourier* de la fonction f relativement à $t_{j\nu}^{k}$, et la formule (1.6.2) — *égalité de Parceval* du groupe G.

Le lecteur familiarisé avec la théorie des séries de Fourier, remarquera une analogie évidente avec les formules de cette théorie. Nous verrons plus loin (chapitre IV) qu'en réalité les formules de la théorie des séries, tout aussi bien que la formule (1.6.3), sont des cas particuliers de formules générales de la théorie de la représentation des groupes.

Soit $T^{k*}(g)$ l'opérateur adjoint à $T^k(g)$ relativement au produit scalaire pour lequel T^k est unitaire. Posons

$$T^k(f)=M(f(g))\,T^{k*}(g))=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(g_k)\,T^{k*}(g). \tag{1.6.4}$$

La fonction opératoire $T^k(f)$ de l'indice k définie par la formule (1.6.4) est appelée *transformée de Fourier* de la fonction f.

Soient $t_{j\nu}^{k}(g)$ les éléments matriciaux de l'opérateur $T^k(g)$ relativement à une base orthonormée $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$; $\overline{t_{j\nu}^{k}(g)}$ sont alors les éléments matriciaux de l'opérateur $T^{k*}(g)$ relativement à cette

même base. D'où l'on tire, à l'aide de (1.6.4), que

$$\left\| \begin{matrix} (f, t^k_{11}) & \dots & (f, t^k_{n_k 1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (f, t^k_{1 n_k}) & \dots & (f, t^k_{n_k n_k}) \end{matrix} \right\|$$

est la matrice de l'opérateur $T^k(f)$ relativement à la base $e^k_1, \dots$ $\dots, e^k_{n_k}$. Par conséquent *)

$$\operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f)) = \sum_{j, \nu=1}^{n_k} |(f, t^k_{j\nu})|^2. \tag{1.6.5}$$

En combinant des formules (1.6.5) et (1.6.3), on obtient

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{m} n_k \operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f)). \tag{1.6.6}$$

La formule (1.6.6) s'appelle *formule de Plancherel pour un groupe fini.*

1.7. Caractères des représentations d'un groupe fini.

THÉORÈME 1. *Soient $T^1, T^2, \dots, T^m$ tous les éléments de la famille complète des représentations irréductibles d'un groupe fini G, et χ_1, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ leurs caractères. Alors*

$$(\chi_k, \chi_j) = \begin{cases} 1 & si\ k = j, \\ 0 & si\ k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1, \dots, m. \tag{1.7.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu des relations d'orthogonalité (1.4.1) et (1.4.2), on a pour $k \neq j$

$$(\chi_k, \chi_j) = \Big(\sum_{\mu=1}^{n_k} t^k_{\mu\mu}, \sum_{\nu=1}^{n_j} t^j_{\nu\nu}\Big) = \sum_{\mu=1}^{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_j} (t^k_{\mu\mu}, t^j_{\nu\nu}) = 0,$$

et pour $k = j$

$$(\chi_k, \chi_k) = \Big(\sum_{\mu=1}^{n_k} t^k_{\mu\mu}, \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu\nu}\Big) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} (t^k_{\mu\mu}, t^k_{\nu\nu}) = \sum_{\mu=1}^{n_k} (t^k_{\mu\mu}, t^k_{\mu\mu}) = \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{1}{n_k} = 1.$$

Les formules (1.6.1) s'appellent *relations d'orihogonalité pour le caractère* d'un groupe fini. Il en découle que $\chi_1, \chi_2, \dots \chi_n$ sont linéairement indépendants.

*) En général, si l'on remplace T^k par une représentation équivalente, $T^k(f)$ se trouvera changé ; la propriété 5) de I, 2.9, chapitre I, de la trace implique pourtant que $\operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f))$ reste invariant.

Soit maintenant T une représentation quelconque du groupe G. D'après le théorème 2 de 1.2, T est complètement réductible, de sorte que

$$T = r_1 T^1 \dot{+} r_2 T^2 \dot{+} \dots \dot{+} r_m T^m, \tag{1.7.2}$$

où r_j est la multiplicité avec laquelle T^j apparaît dans T (ici on peut supposer que certains r_j sont nuls). En appliquant à (1.6.2) la propriété de III, 2.9, chapitre I, nous voyons que

$$\chi_T = r_1\chi_1 + r_2\chi_2 + \dots + r_m\chi_m. \tag{1.7.3}$$

D'où l'on tire en vertu de (1.6.1)

$$(\chi_T, \chi_j) = (r_1\chi_1 + r_2\chi_2 + \dots + r_m\chi_m, \chi_j) = r_j \tag{1.7.4}$$

Autrement dit:

I. *Le coefficient de Fourier d'un caractère χ_T de la représentation T relativement au caractère χ_j de la représentation irréductible T^j est égal à la multiplicité avec laquelle T^j apparaît dans la représentation T.*

Ainsi, en connaissant les caractères d'un système complet de représentations irréductibles, nous pouvons dire quelles représentations irréductibles (même si ces représentations elles-mêmes ne nous sont pas connues) et avec quelles multiplicités apparaissent dans la représentation donnée; qui plus est, la réponse ne dépend pas de la méthode de décomposition de cette représentation en représentations irréductibles (voir la remarque dans 1.5).

On peut également déduire de (1.7.1) et (1.7.3) que

$$(\chi_T, \chi_T) = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2. \tag{1.7.5}$$

En particulier, $(\chi_T, \chi_T) = 1$ si et seulement si chacun des nombres r_j est égal à 1, tandis que tous les autres r_k sont nuls. En vertu de I, cela signifie que T contient seulement T^j, avec multiplicité 1, et ne contient aucun autre T^k. Ainsi:

II. *La représentation T d'un groupe fini est irréductible si et seulement si $(\chi_T, \chi_T) = 1$.*

Indiquons encore un critère d'irréductibilité:

III. *Une représentation T d'un groupe fini dans un espace X est irréductible si et seulement si chaque opérateur linéaire B dans X, permutable à tous les $T(g)$, est multiple de l'opérateur unité.*

Cette assertion découle directement de V, 2.8, chapitre I, et du théorème 1, 1.2.

IV. *Si les caractères χ, χ' de deux représentations T, T' d'un groupe fini G coïncident, ces représentations sont équivalentes.*

En effet, $\chi_T = \chi_{T'}$ implique, en vertu de (1.6.4),

$$(\chi_{T'}, \chi_j) = (\chi_T, \chi_j) = r_j,$$

de sorte que T' et T contiennent les mêmes représentations irréductibles T^j avec la même multiplicité r_j. Donc T' est équivalent à T.

Désignons par M l'ensemble de toutes les fonctions $f(g)$ sur G constantes sur les classes des éléments conjugués. Soient $K_1, K_2, \ldots$ $\ldots, K_q$ toutes ces classes. La fonction $f(g) \in M$ peut alors être envisagée comme une fonction de ces classes lorsqu'on pose $f(K_j) =$ $= f(g)$ pour $g \in K_j$. Alors chaque fonction f de M est simplement une famille de q nombres $f(K_1), \ldots, f(K_q)$. Par conséquent M est un sous-espace de dimension q dans $L^2(G)$.

THÉORÈME 2. *Les caractères $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ d'un système complet de représentations irréductibles, non équivalentes deux à deux, d'un groupe fini G forment un système complet orthonormal dans M.*

Démonstration. En vertu de la propriété b), III, 2.9 du chapitre I et du théorème 1, tous les caractères appartiennent à M et y forment un système orthonormal. Il reste à démontrer que ce système est complet dans M. Soit $f \in M$; alors $f(h) = f(g^{-1}hg)$ quels que soient $g, h \in G$. Il nous faudrait montrer que f est une combinaison linéaire des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_m$. Puisque le système des $t^k_{j\nu}$ est complet dans $L^2(G)$ (théorème 2, 1.4), on a

$$f(h) = f(g^{-1}hg) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\nu=1}^{n_k} c^k_{j\nu} t^k_{j\nu}(g^{-1}hg),$$

où les $c^k_{j\nu}$ sont des nombres; d'où

$$f(h) = M_g(f(h)) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\nu=1}^{n_k} c^k_{j\nu} M_g(t^k_{j\nu}(g^{-1}hg)), \tag{1.7.6}$$

M_g étant la moyenne de g sur le groupe G. Mais en vertu des relations d'orthogonalité (1.4.1), (1.4.2) et des formules (2.1.4) du chapitre I, on a

$$M_g(t^k_{j\nu}(g^{-1}hg)) = M_g\Big(\sum_{p,q=1}^{n_k} t^k_{jp}(g^{-1})\, t^k_{pq}(h)\, t^k_{q\nu}(g)\Big) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n_k} t^k_{pq}(h)\, M_g(\overline{t^k_{pj}(g)}\, t^k_{q\nu}(g)) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \nu, \\ \dfrac{1}{n_k} \displaystyle\sum_{p=1}^{n_k} t^k_{pp}(h) = \dfrac{1}{n_k}\chi_k(h) & \text{si } j = \nu. \end{cases}$$

La formule (1.7.6) se met alors sous la forme

$$f(h)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{1}{n_k}c_{jj}^{k}\right)\chi_k(h),$$

et c'est justement ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème 2 entraîne dim $M = m$; d'autre part nous avons vu ci-dessus que dim $M = q$. Donc $m = q$. Autrement dit, on a le

THÉORÈME 3. *Un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini contient un nombre de représentations égal à celui de classes d'éléments conjugués dans ce groupe.*

1.8. Décomposition d'une représentation donnée d'un groupe fini en représentations irréductibles. Soient G un groupe fini, $T^1, \ldots, T^m$ son système complet de représentations irréductibles; $n_1, \ldots, n_m$ leurs dimensions, $t_{j\nu}^{k}(g)$ les éléments matriciaux des représentations T^k, $k = 1, \ldots, m$. Indiquons une méthode permettant de décomposer en représentations irréductibles une représentation donnée T du groupe G. Cette méthode est appliquable lorsque les $t_{j\nu}^{k}(g)$ sont connus.

Soit X l'espace de la représentation T. Comme toujours (théorème 1, 1.2), nous supposons que T est unitaire. Définissons les opérateurs $P_{j\nu}^{k}$ dans X en posant

$$P_{j\nu}^{k}=n_k M\,\overline{(t_{j\nu}^{k}(g)}\,T(g)). \tag{1.8.1}$$

I. *Les opérateurs $P_{j\nu}^{k}$ possèdent les propriétés suivantes:*

$$T(h)\,P_{j\mu}^{k}=\sum_{\nu=1}^{n_k}t_{\nu j}^{k}(h)\,P_{\nu\mu}^{k}, \tag{1.8.2a}$$

$$P_{j\mu}^{k}T(h)=\sum_{\nu=1}^{n_k}t_{\mu\nu}^{k}(h)\,P_{j\nu}^{k} \tag{1.8.2b}$$

quel que soit $h\in G$;

$$P_{jl}^{k}P_{\mu\nu}^{k'}=\begin{cases}0 & si\ \ k'\neq k\ \ ou\ \ l\neq\mu,\\ P_{j\nu}^{k} & si\ \ k'=k\ \ et\ \ l=\mu,\end{cases} \tag{1.8.3}$$

$$(P_{jl}^{k})^{*}=P_{lj}^{k}\,; \tag{1.8.4}$$

en particulier

$$P_{jj}^{k}P_{\mu\mu}^{k'}=\begin{cases}0 & si\ \ k'\neq k\ \ ou\ \ \mu\neq j,\\ P_{jj}^{k} & si\ \ k'=k\ \ et\ \ \mu=j,\end{cases} \tag{1.8.5}$$

$$(P_{jj}^{k})^{*}=P_{jj}^{k}. \tag{1.8.6}$$

D é m o n s t r a t i o n. En attirant (1.8.1), la propriété III de la moyenne invariante (1.4.1) et la relation $t^k_{j\nu}(h^{-1}) = \overline{t^k_{\nu j}(h)}$ (voir (2.8.7), chapitre I), on obtient

$$T(h)\,P^k_{j\mu} = n_k T(h)\,M\,(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\,T(g)) =$$
$$= n_k M\,(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\,T(h)\,T(g)) =$$
$$= n_k M\,(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\,T(hg)) = n_k M\,(\overline{t^k_{j\mu}(h^{-1}g)}\,T(g)) =$$
$$= n_k M\,\Big(\sum_{\nu=1}^{n_k} \overline{t^k_{j\nu}(h^{-1})}\;\overline{t^k_{\nu\mu}(g)}\;T(g)\Big) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu j}(h)\,n_k M\,(\overline{t^k_{\nu\mu}(g)}\,T(g)) = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu j}(h)\,P^k_{\nu\mu},$$

et (1.8.2a) est démontré. On démontre (1.8.2b) d'une manière analogue. Ensuite, en vertu de (1.8.2a) et des relations d'orthogonalité (1.4.1) et (1.4.2), on a

$$P^k_{jl}P^{k'}_{\mu\nu} = n_k M\,(\overline{t^k_{jl}(g)}\,T(g))\,P^{k'}_{\mu\nu} = n_k M\,(\overline{t^k_{jl}(g)}\,T(g)\,P^{k'}_{\mu\nu}) =$$
$$= n_k M\Big(\overline{t^k_{jl}(g)}\sum_{q=1}^{n_{k'}} t^{k'}_{q\mu}(g)\,P^{k'}_{q\nu}\Big) = n_k \sum_{q=1}^{n_{k'}} (t^{k'}_{q\mu},\, t^k_{jl})\,P^{k'}_{ql} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k' \neq k \text{ ou } \neq \mu, \\ n_k\,(t^k_{jl},\, t^k_{jl})\,P^k_{j\nu} = P^k_{j\nu} & \text{si } k' = k \text{ et } l = \mu, \end{cases}$$

mais cela coïncide avec (1.8.3). Pour démontrer la propriété (1.8.4), remarquons que T est unitaire, de sorte que $(T(g))^* = T(g^{-1})$ et donc

$$(P^k_{jl})^* = (n_k M\,(\overline{t^k_{jl}(g)}\,T(g)))^* = \Big(\frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \overline{t^k_{jl}(g_\nu)}\,T(g_\nu)\Big)^* =$$
$$= \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N} t^k_{jl}(g_\nu)\,(T(g_\nu))^* = \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \overline{t^k_{lj}(g_\nu^{-1})}\,T(g_\nu^{-1}) =$$
$$= \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \overline{t^k_{lj}(g_\nu)}\,T(g_\nu) = P^k_{lj}.$$

Les relations (1.8.5) et (1.8.6) se déduisent de (1.8.3) et (1.8.4).

Posons maintenant

$$X^k_j = P^k_{jj}X\,; \tag{1.8.7}$$

il est évident que les X_j^k sont des sous-espaces de X. Il n'est pas exclu ici que certains X_j^l soient nuls; cela signifie que les P_{jj}^l correspondants le sont aussi.

II. *Les sous-espaces X_j^k possèdent les propriétés suivantes:*

$$X_j^k \perp X_{j'}^{k'} \quad \text{si } k' \neq k \text{ ou } j' \neq j \tag{1.8.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \oplus X_j^k = X, \tag{1.8.9}$$

$$P_{j\mu}^k X_\nu^{k'} = (0) \quad \text{si } k' \neq k \text{ ou } \mu \neq \nu, \tag{1.8.10}$$

$$P_{j\mu}^k \text{ sont des applications isométriques de } X_\mu^k \text{ sur } X_j^k. \tag{1.8.11}$$

Démonstration. On déduit de (1.8.5) et (1.8.6) que les P_{jj}^k sont des projecteurs orthogonaux appliquant en vertu de (1.8.7) l'espace X sur X_j^k; d'où l'on tire (1.8.8). Démontrons (1.8.9). Posons

$$Y = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \oplus X_j^k, \tag{1.8.12}$$

et supposons que $Y \neq X$. Alors il existe dans X un vecteur $x_0 \neq 0$ orthogonal à Y et par conséquent à chacun des X_j^k (voir VIII, 2.8, chapitre I). En vertu de (1.8.7) cela signifie que $x_0 \perp P_{j\nu}^k x$ quel que soit $x \in X$, de sorte que, *a fortiori*, $f(g) = (x_0, T(g)x) = 0$. En effet, nous avons (voir (1.8.1))

$$\begin{aligned} 0 = (x_0, P_{j\nu}^k x) &= (x_0, n_k M(\overline{t_{j\nu}^k(g)}\, T(g)x)) = \\ &= n_k \left(x_0, \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} \overline{t_{j\mu}^k(g_\mu)}\, T(g_\mu)x\right) = \\ &= \frac{n_k}{N} \sum_{\mu=1}^{N} t_{j\nu}^k(g_\mu)(x_0, T(g_\mu)x) = n_k (t_{j\nu}^k, f) \end{aligned} \tag{1.8.13}$$

pour tous les $j, \nu = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, m$. Mais les fonctions $t_{j\nu}^k$ forment une base dans $L^2(G)$ (théorème 2 de 1.4). Ceci étant, (1.8.13) entraîne

$$0 = f(g) = (x_0, T(g)x) \quad \text{pour tous les } x \in X, \quad g \in G. \tag{1.8.14}$$

En posant $g = e$, $x = x_0$ dans (1.8.14), nous obtenons $(x_0, x_0) = 0$, ce qui est impossible si $x_0 \neq 0$. Ainsi $Y = X$; d'après (1.8.12) cette dernière égalité coïncide avec (1.8.9). Pour démontrer la propriété (1.8.10), notons que l'on a en vertu de (1.8.3)

$$P_{j\mu}^k X_\nu^{k'} = P_{j\mu}^k P_{\nu\nu}^k X = (0) \quad \text{si } k' \neq k \text{ ou } \mu \neq \nu.$$

Remarquons maintenant que, d'après (1.8.3), P^k_ν est l'identité sur X^k_j. En effet, $x \in X^k_j$ entraîne $x = P^k_{jj} y$, $y \in X$; $P^k_{jj} x = x$. Démontrons enfin la propriété (1.8.11): d'après (1.8.7), on a $x = P^k_{jj} x_1$, $x_1 \in X$ et donc $P^k_{jj}(x) = (P^k_{jj})^2 x_1 = P^k_{jj} x_1 = x$. Soit maintenant $x \in X^k_\mu$, de sorte que $x = P^k_{\mu\mu} x$. Alors d'après (1.8.3)

$$P^k_{j\mu} x = P^k_{j\mu} P^k_{\mu\mu} x = P^k_{jj} P^k_{j\mu} x \in X^k_j.$$

Donc

$$P^k_{j\mu} X^k_\mu \subset X^k_j. \tag{1.8.15}$$

En appliquant aux deux membres de (1.8.5) l'opérateur $P^k_{\mu j}$ et en nous servant à nouveau de (1.8.3) et (1.8.5), nous obtenons

$$X^k_\mu = P^k_{\mu\mu} X^k_\mu = P^k_{\mu j} P^k_{j\mu} X^k_\mu \subset P^k_{\mu j} X^k_j \subset X^k_\mu,$$

ce qui entraîne $P^k_{\mu j} X^k_j = X^k_\mu$. En échangeant le rôle de μ et j, nous obtiendrons $P^k_{j\mu} X^k_\mu = X^k_j$, i.e. $P^k_{j\mu}$ applique X^k_μ sur X^k_j. Supposons maintenant que x, $y \in X^k_\mu$. Alors $P^k_{\mu\mu} x = x$, et en vertu de (1.8.4) et (1.8.3) on a

$$(P^k_{j\mu} x, P^k_{j\mu} y) = ((P^k_{j\mu})^* P^k_{j\mu} x, y) = (P^k_{\mu j} P^k_{j\mu} x, y) = (P^k_{\mu\mu} x, y) = (x, y).$$

Ceci démontre que $P^k_{j\mu}$: $X^k_\mu \to X^k_j$ est une application isométrique, et donc bijective.

On déduit de la propriété (1.8.11) déjà démontrée

$$\dim X^k_\mu = \dim X^k_j \text{ quels que soient } \mu, j = 1, \ldots, n_k. \tag{1.8.16}$$

Nous pouvons maintenant aborder le calcul des représentations irréductibles en lesquelles se décompose la représentation T. Posons tout d'abord

$$Y^k = \sum_{j=1}^{n_k} \oplus X^k_j, \tag{1.8.17}$$

(1.8.9) nous permet d'écrire

$$\sum_{k=1}^{m} \oplus Y^k = X. \tag{1.8.18}$$

Choisissons dans un des X^k_j *), par exemple dans X^k_1, une base orthonormée e^k_{11}, e^k_{21}, ..., $e^k_{r_k 1}$, où $r_k = \dim X^k_1 = \dim X^k_j$, $j = 1, \ldots, n_k$, et posons

$$e^k_{j\nu} = P^k_{\nu 1} e^k_{j1}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \nu, j = 1, \ldots, r_k. \tag{1.8.19}$$

*) X^k_j peut être effectivement construit si l'on remarque que X^k_j est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles $\alpha_1 P^k_{jj} f_1 + \ldots + \alpha_n P^k_{jj} f_n$, où $f_1, \ldots, f_n$ est une base quelconque de X.

En vertu de (1.8.11)

$$e^k_{1\nu},\ e^k_{2\nu},\ \ldots,\ e^k_{r_k\nu}$$

est une base orthonormée dans X^k_ν, et la relation (1.8.8) implique que

$$e^k_{j\nu} \perp e^{k'}_{j'\nu'} \text{ si } k' \neq k, \text{ ou } j' \neq j, \text{ ou } \nu' \neq \nu. \tag{1.8.20}$$

En particulier,

$$e^k_{j1},\ e^k_{j2},\ \ldots,\ e^k_{jn_k} \tag{1.8.21}$$

est un système orthonormal; soit Y^k_j le sous-espace déterminé par le système (1.8.21), de sorte que ce système est une base dans Y^k_j. On obtient de (1.8.17) et (1.8.18)

$$Y^k = \sum_{j=1}^{r_k} \oplus Y^k_j, \tag{1.8.22}$$

$$X = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_m} \oplus Y^k_j. \tag{1.8.23}$$

III. *Chaque Y^k_j est invariant relativement à T et la restriction de la représentation T à Y^k_j est irréductible et équivalente à T^k. Par conséquent, la formule* (1.8.23) *donne une décomposition de la représentation T du groupe G en ses sous-représentations irréductibles T^k, la multiplicité avec laquelle chaque T^k apparaît dans T coïncidant avec* dim X^m_j.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (1.8.19) et (1.8.20), pour des indices j et k donnés, nous avons

$$T(g)\, e^k_{j\mu} = T(g)\, P^k_{\mu 1} e^k_{j1} = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu\mu}(g)\, P^k_{\nu 1} e^k_{j1} = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu\mu}(g)\, e^k_{j\nu} \in Y^k_j.$$

Cela signifie que Y^k_j est invariant relativement à T et que les éléments matriciaux de la restriction de la représentation T à Y^k_j, relativement à la base (1.8.21) de Y^k_j, coïncident avec $t^k_{jk}(g)$, i.e. que cette restriction est équivalente à la représentation T^k; elle est donc irréductible. Il découle de (1.8.23) que la multiplicité de T^k dans T coïncide avec $r_k = \dim X^k_j$. Si certains X^k_j sont nuls, alors $r_k = 0$ et les T^k correspondants ne sont pas contenus dans T.

La décomposition (1.8.23) dépend du choix de la base $e^k_{11}, \ldots$ $\ldots, e^k_{r_k 1}$ dans X^k_1 (ainsi que du choix des éléments matriciaux $t^k_{j\nu}(g)$, i.e. du choix de la base dans l'espace X_k de la représentation T^k) et donc en général elle n'est pas déterminée de façon unique (voir la remarque 2 dans 1.5).

D'autre part, la restriction de T à Y^k est multiple de la représentation T^k, avec multiplicité r_k, donc la formule (1.8.18) nous

donne une décomposition de la représentation T en représentations non équivalentes deux à deux et multiples de représentations irréductibles.

IV. *La décomposition de la représentation d'un groupe fini G en représentations non équivalentes deux à deux et multiples de représentations irréductibles, est unique.*

Démonstration. Posons

$$P^k = \sum_{j=1}^{n_k} P^k_{jj}. \tag{1.8.24}$$

En vertu de (1.8.5), P^k est un projecteur, tandis qu'en vertu de (1.8.16) et (1.8.17)

$$Y^k = P^k X. \tag{1.8.25}$$

P^k, et donc Y^k, ne dépend pas du choix des $t^k_{j\nu}(g)$. En effet, prenant en considération (1.8.1) et la définition du caractère (2.9.3), chapitre I on obtient

$$P^k = \sum_{j=1}^{n_k} n_k M\,\overline{(t^k_{jj}(g)}\,T(g)) = \\ = n_k M\Big(\sum_{j=1}^{n_k} \overline{t^k_{jj}(g)}\,T(g)\Big) = n_k M\,(\overline{\chi_T(g)}\,T(g)). \tag{1.8.26}$$

Cette dernière expression ne dépend pas du choix des $t^k_{j\nu}(g)$, puisque $\chi_T(g)$ n'en dépend pas (voir 2.9, chap. I).

Soit maintenant Z un sous-espace invariant relativement à T, sur lequel la restriction S de la représentation T est irréductible et équivalente à T^k, et soit $f_1, \ldots, f_{n_k}$ une base orthonormée dans Z, pour laquelle les éléments matriciaux de la représentation S coïncident avec $t^k_{j\nu}(g)$, de sorte que

$$S(g) f_\nu = \sum_{j=1}^{n_k} t^k_{j\nu}(g) f_j. \tag{1.8.27}$$

Montrons que

$$f_\nu \in Y^k, \quad \nu = 1, \ldots, n_k; \tag{1.8.28}$$

il suffit pour cela d'établir l'égalité $P^k f_\nu = f_\nu$. Cette dernière découle, en vertu de (1.8.26), (1.8.27) et des relations d'orthogonalité

(1.4.2), de la chaîne d'égalités suivante:

$$P^k f_\nu = n_k M\, (\overline{\chi_T(g)}\, T(g))\, f_\nu = n_k M\, \Big(\sum_{\mu=1}^{n_k} \overline{t^k_{\mu\mu}(g)} \times$$

$$\times T(g) f_\nu \Big) = n_k M\, \Big(\sum_{j,\, \mu=1}^{n_k} \overline{t^k_{\mu\mu}(g)}\, t^k_{j\nu}(g) f_j \Big) =$$

$$= n_k \sum_{j,\, \mu=1}^{n_k} (t^k_{j\nu}, t^k_{\mu\mu}) f_j = n_k (t^k_{\nu\nu}, t^k_{\nu\nu}) f_\nu = f_\nu.$$

On déduit de (1.8.28), que $Z \subset Y^k$.

Soit maintenant

$$X = \sum_{k=1}^{m} \oplus Z^k, \quad Z^k = \sum_{j=1}^{s_k} \oplus Z^k_j, \tag{1.8.29}$$

où les Z^k_j sont invariants relativement à T et la restriction de la représentation T à Z^k_j est équivalente à T^k. Mais nous venons de démontrer que $Z^k_j \subset Y^k$, donc

$$Z^k = \sum_{j=1}^{s_k} \oplus Z^k_j \subset Y^k. \tag{1.8.30}$$

Or la multiplicité avec laquelle T^k apparaît dans T ne dépend pas de la méthode de décomposition (voir I, 1.7); donc $s_k = n_k$. D'ici et de (1.8.29), (1.8.17) on tire:

$$\dim Z^k = n_k r_k = \dim Y^k,$$

et, par conséquent, l'inclusion (1.8.30) est en réalité l'égalité $Z^k = Y^k$; ce qui démontre la proposition IV.

Exemples et exercices

1. Décomposer la représentation régulière du groupe S_3 en représentations irréductibles.

2. Démontrer que la dimension d'une représentation irréductible d'un groupe fini est un diviseur de l'ordre du groupe.

3. Démontrer que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif, si p est un nombre premier.

§ 2. Algèbre de groupe d'un groupe fini

2.1. Notions fondamentales de la théorie des algèbres. Un ensemble A s'appelle *algèbre* si

1) A est un espace linéaire;

2) A est muni d'une opération de produit ab (définie sur chaque couple d'éléments a, $b \in A$) qui satisfait aux conditions suivantes:

$$ab \in A, \tag{2.1.1}$$

$$a(b + c) = ab + ac, \tag{2.1.2}$$

$$(a + b)c = ac + bc, \tag{2.1.3}$$

$$\alpha(ab) = a(\alpha b) = (\alpha a)b \tag{2.1.4}$$

pour tous les a, b, $c \in A$ et tout nombre α.

L'algèbre A est dite *réelle* si A est un espace linéaire réel; elle est dite *complexe* si A est un espace linéaire complexe. Dans le premier cas le nombre α dans la condition (2.1.4) est un nombre réel quelconque, dans le deuxième cas il est complexe. L'algèbre A est dite de dimension *finie* si l'espace linéaire A l'est.

Un sous-ensemble B de l'algèbre A s'appelle *sous-algèbre* si:

1) B est un sous-espace linéaire de l'espace linéaire A;

2) b_1, $b_2 \in B$ entraîne $b_1 b_2 \in B$.

Autrement dit, B doit être une algèbre pour les opérations induites de l'algèbre A. Une sous-algèbre d'une algèbre A sera appelée plus brièvement *sous-algèbre de A*. Il est évident que *l'intersection d'un nombre quelconque de sous-algèbres de A est également une sous-algèbre de A*. En particulier, *l'intersection de toutes les sous-algèbres de A qui contiennent un ensemble donné $S \subset B$ est la sous-algèbre minimale de A qui contient S*. On l'appelle *sous-algèbre de A engendrée par l'ensemble S*, et on la note $A(S)$.

L'ensemble I_l de l'algèbre A est appelé son *idéal à gauche* si:

a) I_l est un sous-espace de l'espace linéaire A;

b) $aI_l \subset I_l$ pour chaque $a \in A$.

On définit d'une manière analogue l'*idéal à droite* I_r. Un ensemble I de l'algèbre A s'appelle *idéal bilatère* si I est à la fois un idéal à gauche et à droite. Il est évident que l'ensemble (0), ainsi que l'algèbre A toute entière, sont des idéaux à gauche et à droite, et donc des idéaux bilatères de l'algèbre A; on les appelle tous les deux *idéaux impropres*. Les idéaux de l'algèbre A qui diffèrent de (0) et de A sont appelés *idéaux propres*. Les idéaux de l'algèbre A seront appelés plus brièvement *idéaux de A*. Il est évident qu'un *idéal* (à droite, à gauche ou bilatère) *est également une sous-algèbre*. L'algèbre A est dite *simple* si elle ne possède aucun idéal bilatère propre. Un idéal à gauche $I_l \neq (0)$ est dit *minimal* s'il ne contient aucun idéal à gauche $\tilde{I}_l$ qui diffère de (0) et de I_l, i.e. si $(0) \neq \tilde{I}_l \subset I_l$ signifie $\tilde{I}_l = I_l$. Un idéal à gauche $I_l \neq A$ est dit *maximal* s'il n'est contenu dans aucun idéal à gauche différent de A et de I_l. D'une manière analogue on définit les idéaux minimaux et maximaux dans le cas des idéaux bilatères et des idéaux à droite.

Une algèbre A est appelée *somme directe* des algèbres $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ et désignée par $A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$ si:

a) l'espace linéaire A est la somme directe des espaces linéaires $A_1, \ldots, A_n$;

b) $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, où a_j, $b_j \in A_j$, $j = 1, \ldots, n$, entraînent $ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Il découle de cette définition que *chaque algèbre A_j, $j = 1, \ldots$ $\ldots, n$, est un idéal bilatère dans $A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$.*

Exemples et exercices

1. L'ensemble de tous les nombres réels est une algèbre réelle si l'on y définit les opérations d'addition, de multiplication par un nombre réel et de produit de nombres quelconques $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^1$ comme les opérations usuelles sur des nombres réels; nous désignerons cette algèbre par A_r^1, pour la distinguer du groupe $\mathbf{R}^1$ (voir l'exemple 1, 1.1, chap. I). On définit d'une manière analogue l'algèbre complexe A_c^1 de tous les nombres complexes.

2. L'ensemble de toutes les suites $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_j \in \mathbf{R}^1$, pour lesquelles on a défini l'addition, la multiplication par un nombre réel et le produit comme les opérations correspondantes sur les composantes est une algèbre réelle que nous désignerons par A_r^n. Il est évident que

$$A_r^n = A_r^1 \dot{+} A_r^1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_r^1,$$

où le deuxième membre contient n termes. On définit d'une manière analogue l'algèbre complexe A_c^n, où $A_c^n = A_c^1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_c^1$, le deuxième membre contenant n termes.

3. L'ensemble de toutes les matrices réelles d'ordre n forme une algèbre réelle si l'on définit l'addition, la multiplication par un nombre réel et le produit comme les opérations correspondantes sur les matrices. Cette algèbre sera désignée par $A_r (n \times n)$. On définit d'une manière analogue l'algèbre $A_c (n \times n)$ de toutes les matrices complexes d'ordre n.

4. Soit X un espace linéaire (complexe ou réel) et $\mathcal{A}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires dans X (respectivement complexes ou réels) partout définis dans X. Définissons dans $\mathcal{A}(X)$ les opérations d'addition, de multiplication par un nombre et de produit comme les opérations correspondantes sur les opérateurs. Il est évident que $\mathcal{A}(X)$ est une algèbre, complexe si X est complexe et réelle si X est réel. Pour un vecteur donné $x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ l'ensemble I de tous les opérateurs $A \in \mathcal{A}(X)$ vérifiant la condition $Ax_0 = 0$ est un idéal à gauche de $\mathcal{A}(X)$. Démontrer que si X est de dimension finie, alors pour chaque idéal à gauche I_l dans $\mathcal{A}(X)$ il existe un vecteur $x_0 \in X$ tel que $Ax_0 = 0$, quel que soit $A \in I_l$.

5. Soit X^3 l'espace vectoriel réel de dimension trois. Définissons dans X^3 l'addition et la multiplication par un nombre réel comme les opérations correspondantes sur les vecteurs, et le produit comme le produit vectoriel. Alors X^3 est une algèbre.

2.2. Algèbre quotient par un idéal bilatère. Soit A une algèbre, I un idéal bilatère de l'algèbre A. Alors I est également un sous-espace linéaire de l'espace linéaire A. Soit $\widetilde{A} = A/I$ de sorte que les éléments de l'espace quotient $\widetilde{A}$ sont les classes $\widetilde{a} = I + a$, où a est un représentant de la classe $\widetilde{a}$. Définissons dans $\widetilde{A}$ le *produit* en posant

$$\widetilde{a}\widetilde{b} = I + ab \text{ pour } a \in \widetilde{a},\ b \in \widetilde{b}. \qquad (2.2.1)$$

Cette définition ne dépend pas du choix des représentants $a \in \widetilde{a}$, $b \in \widetilde{b}$. En effet, si par exemple, on a aussi $a_1 \in \widetilde{a}$, alors $a_1 - a \in I$ et donc $a_1b - ab = (a_1 - a)\,b \in I$ puisque I est un idéal bilatère. Par conséquent, $I + a_1b = I + a_1b - ab + ab = I + ab$. On vérifie d'une manière analogue que $b,\ b_1 \in \widetilde{b}$ entraîne $ab_1 + I = ab + I$. On vérifie tout aussi facilement que le produit $\widetilde{a}\widetilde{b}$ ainsi défini satisfait aux conditions (2.1.1) à (2.1.4), de sorte que $\widetilde{A}$ est une algèbre. On l'appelle *algèbre quotient de l'algèbre A par l'idéal I*, et on la désigne toujours par A/I.

2.3. Homomorphisme et isomorphisme d'algèbres. Une application f de l'algèbre A dans l'algèbre B s'appelle *homomorphisme* de A dans B si :

1) f est une application linéaire de l'espace linéaire A dans l'espace linéaire B ;

2) $f(a_1a_2) = f(a_1)\,f(a_2)$ quels que soient $a_1,\ a_2 \in A$.

L'image inverse $f^{-1}(0)$ du zéro 0 de l'algèbre B s'appelle *noyau de l'homomorphisme f*; on le désigne par Ker f.

Si l'image par f de A dans B coïncide avec B, alors f s'appelle *homomorphisme* de l'algèbre A *sur* B. Un homomorphisme injectif (i.e. bijectif sur l'image $f(A) \subset B$) s'appelle *monomorphisme*, et *isomorphisme* si en outre $f(A) = B$. Les algèbres A et B sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'algèbre A *sur* l'algèbre B.

I. *Si f est un homomorphisme de l'algèbre A dans l'algèbre B, alors :*

1) *$f(A)$ est une sous-algèbre de B ;*

2) *f applique chaque sous-algèbre de A sur une sous-algèbre de $f(A)$;*

3) *f applique chaque idéal (à gauche, à droite ou bilatère) de A sur un idéal de $f(A)$ (respectivement à gauche, à droite ou bilatère) ;*

4) *le noyau* Ker f *de l'homomorphisme f est un idéal bilatère de A.*

L'homomorphisme f est un monomorphisme si et seulement si Ker f = $= \{0\}$.

La démonstration de cette proposition est très facile, nous la laissons au lecteur.

Un homomorphisme simple peut être construit de la manière suivante. Soit A une algèbre, I un idéal bilatère de A et $\tilde{A} = A/I$. Désignons par φ l'application qui fait correspondre à chaque élément $a \in A$ la classe $\tilde{a}$ qui contient a. Par définition même des opérations dans $\tilde{A}$, φ est un homomorphisme de l'algèbre A sur l'algèbre $\tilde{A} = A/I$; on l'appelle *homomorphisme canonique* (ou *naturel*) *de l'algèbre A sur A/I.*

II. *Si f est un homomorphisme de l'algèbre A sur l'algèbre B et $I = \operatorname{Ker} f$, alors:*

1) *B est isomorphe à l'algèbre A/I;*

2) *$f = \psi\varphi$, où φ est l'homomorphisme canonique de l'algèbre B sur l'algèbre A/I, tandis que ψ est l'isomorphisme de l'algèbre A/I sur l'algèbre B.*

La démonstration (analogue à celle de la proposition II de 1.6, chap. I) est laissée au lecteur.

2.4. Algèbres associatives. Une algèbre A est dite *associative* si

$$(ab)\,c = a\,(bc) \text{ quels que soient } a, b, c \in A \tag{2.4.1}$$

et *non associative* dans le cas contraire. Ainsi les algèbres dans les exemples 1 à 4 de 2.1 sont associatives, tandis que l'algèbre de l'exemple 5 ne l'est pas. Tous les résultats des alinéas 2.1 à 2.3 sont vrais aussi bien pour des algèbres associatives que non associatives. Néanmoins, dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer que les algèbres considérées sont associatives, et le terme *algèbre*, sauf mention du contraire, signifiera algèbre associative *).

En vertu de l'associativité, le produit $a_1a_2 \ldots a_n \in A$ est défini d'une manière unique. Si en particulier $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, on appelle ce produit *puissance n-ième* de l'élément a et on le note a^n. On déduit facilement de (2.4.1) que

$$a^n a^m = a^{n+m}. \tag{2.4.2}$$

L'élément e de l'algèbre A s'appelle *élément neutre* (ou *unité*) si $ea = ae = a$ quel que soit $a \in A$. L'algèbre A s'appelle *algèbre unitaire* si elle possède l'élément neutre. On vérifie facilement (en raisonnant comme dans la note au bas de la page 9) que l'élément neutre est unique, si toutefois il existe. Deux éléments a, b de l'algèbre A sont dits *permutables* si $ab = ba$. L'algèbre A est *commutative* si chaque couple de ses éléments est permutable, de sorte que $ab = ba$ quels que soient $a, b \in A$. L'ensemble de tous les éléments de l'algèbre A

---

*) Une classe importante d'algèbres non associatives sera considérée dans les chapitres IX, X.

qui sont permutables avec chaque élément de A s'appelle *centre de l'algèbre* A ; on le désigne $Z(A)$. Il est évident que $Z(A)$ est une sous-algèbre commutative de A qui coïncide avec A si et seulement si A est elle-même commutative.

2.5. Algèbres à involution. Une application $a \to a^*$ d'une algèbre A dans A s'appelle *involution* si

1) $a^{**} = a$,

2) $(\alpha a)^* = \bar{\alpha} a$ (si A est une algèbre réelle, alors $\alpha \in \mathbf{R}$ et donc $\bar{\alpha} = \alpha$),

3) $(a+b)^* = a^* + b^*$,

4) $(ab)^* = b^* a^*$

quels que soient $a, b \in A$ et le nombre α.

Une involution est dite *non dégénérée* si en outre

5) $a^* a = 0$ entraîne $a = 0$.

Il découle de la propriété 1) que l'involution $a \to a^*$ est une application de l'algèbre A *sur* A, et de la propriété 2) que $0^* = 0$. L'algèbre A est dite *symétrique* si elle possède une involution. Soit A une algèbre symétrique. Un élément $a \in A$ s'appelle *hermitien* si $a^* = a$.

I. *Tout élément $a \in A$ peut être mis d'une manière et d'une seule sous la forme*

$$a = a_1 + ia_2, \tag{2.5.1}$$

où a_1, a_2 sont des éléments hermitiens de A.

En effet, on déduit de (2.5.1) et des propriétés 2) et 3) que $a^* = a_1 - ia_2$, et donc

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*). \tag{2.5.2}$$

Par conséquent, si (2.5.1) est vérifié, alors a_1 et a_2 sont déterminés de manière unique; inversement, pour chaque $a \in A$ les formules (4.5.2) définissent les éléments hermitiens $a_1, a_2 \in A$ pour lesquels on a (2.5 1).

II. *Pour tout $a \in A$ l'élément a^*a est hermitien.*

En effet, en vertu de 1) et 5), on a $(a^*a)^* = a^*a^{**} = a^*a$.

III. *Si une algèbre symétrique A contient l'élément neutre e, cet élément e est hermitien.*

L'assertion découle de II et de la relation $e^* = e^*e$. Dans les propositions IV et V nous supposerons que A est une *algèbre symétrique à involution non dégénérée.*

IV. *Si a est un élément hermitien de A et $a^2 = 0$, alors $a = 0$.*

En effet, on a $a^*a = a^2 = 0$, et il reste à appliquer la propriété 5) de l'involution.

7—0883

V. *Si I_l est un idéal à gauche de A et*

$$I_l I_l = (0), \tag{2.5.3}$$

alors $I_l = (0)$.

Soit $a \in I_l$. Alors on a également $a^*a \in I_l$ et l'on déduit de (4.5.3) que $(a^*a)^2 = 0$. Mais alors $a^*a = 0$ puisque a^*a est hermitien (voir II et IV); par conséquent $a = 0$ en vertu de la propriété 5) de l'involution. Ainsi chaque élément a de I_l est nul, i.e. $I_l = (0)$.

2.6. Représentations des algèbres. Soit A une algèbre, X un espace linéaire complexe non nul. On appelle *représentation de l'algèbre A dans l'espace X* l'application qui fait correspondre à chaque élément $a \in A$ l'opérateur linéaire $T(a)$ dans l'espace X, de manière à avoir

1) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$,
2) $T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2)$,
3) $T(a_1 a_2) = T(a_1) T(a_2)$,
4) $T(e) = 1$ si A est une algèbre avec l'élément neutre e, quels que soient a, a_1, $a_2 \in A$ et le nombre α.

L'espace X s'appelle *espace de la représentation*, et les opérateurs $T(a)$ *opérateurs de la représentation*. Les propriétés 1) à 4) signifient que l'application $T: a \to T(a)$ est un homomorphisme de l'algèbre A dans l'algèbre $A(X)$ (voir l'exemple 4 de 2.1), vérifiant la condition 4) si A est une algèbre unitaire. Toutes les notions fondamentales et les propositions de la théorie des représentations des groupes exposées dans 2.1, 2.2, 2.4 à 2.6 du chapitre I, en particulier les notions d'irréductibilité et d'équivalence, les lemmes 1 et 2 de 2.2, et leurs corollaires se généralisent naturellement aux représentations des algèbres; les détails sont laissés au lecteur. On obtient un exemple important de représentation T de l'algèbre A en prenant en guise de X l'espace linéaire A et en définissant $T(a)$ par la formule

$$T(a)\, x = ax \text{ pour tous les } a,\ x \in A, \tag{2.6.1}$$

de sorte que $T(a)$ est tout simplement l'opérateur de multiplication à gauche par a. Il découle des propriétés (2.1.1) à (2.1.4) de l'algèbre A et de la propriété d'associativité que les conditions 1) à 4) sont satisfaites et donc T est une représentation. Cette représentation s'appelle *représentation régulière à gauche de l'algèbre A*.

I. *Un sous-espace $M \subset A$ est invariant relativement à une représentation régulière à gauche de l'algèbre A si et seulemevt si M est un idéal à gauche de A.*

Cette assertion se déduit immédiatement de la définition de l'idéal à gauche (voir 2.1) et de la représentation régulière à gauche (voir (2.6.1)).

II. *La restriction d'une représentation régulière à gauche d'une algèbre A à son idéal à gauche I_l est irréductible si et seulement si I_l est un idéal minimal à gauche de A.*

Cette assertion découle immédiatement de I et des définitions de l'idéal minimal à gauche et de la représentation irréductible.

III. *Une représentation régulière à gauche T d'une algèbre de dimension finie A est complètement réductible si et seulement si A est la somme directe (comme espace linéaire) de ses idéaux minimaux à gauche:*

$$A = I_{l_1} \dot{+} \ldots \dot{+} I_{l_k} \qquad (2.6.2)$$

et la décomposition de la représentation T en représentations irréductibles s'obtient à partir de la décomposition (2.6.2) *de l'espace A.*

Cette assertion se déduit immédiatement de II et de la définition de la somme directe de représentations.

D'après III, le problème de la décomposition d'une représentation régulière à gauche d'une algèbre A de dimension finie en représentations irréductibles est équivalent au problème de la décomposition de l'algèbre A en somme directe de ses idéaux minimaux.

Soit maintenant A une algèbre symétrique, X et Y des espaces linéaires en dualité relativement à la forme bilinéaire (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Les représentations T et S dans les espaces X et Y sont dites *adjointes entre elles* relativement à la forme (x, y) si

$$(T(a)\,x,\ y) = (x,\ S(a^*)\,y) \text{ quels que soient } a \in A,\quad x \in X,\ y \in Y. \qquad (2.6.3)$$

En raisonnant comme dans 2.3, nous obtenons:

I. *Si A est une algèbre symétrique, X et Y sont des espaces de dimension finie, en dualité relativement à la forme (x, y), alors, pour chaque représentation T de l'algèbre A dans X, il existe une représentation S, et une seule, de l'algèbre A dans Y, adjointe à T relativement à (x, y), et pour un choix approprié des bases $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$* ($n =$ $=$ dim $X =$ dim Y) *dans X et Y, les éléments matriciaux de T et S relativement à ces bases sont liés par la relation:*

$$t_{jk}(a) = \overline{t_{kj}(a^*)}. \qquad (2.6.4)$$

II. *Si les représentations T et S de dimension finie de l'algèbre A à involution sont adjointes, alors T est irréductible si et seulement si S est irréductible.*

Soit à nouveau A une algèbre symétrique, X un espace préhilbertien à produit scalaire (x, y), $x, y \in X$. La représentation T de l'algèbre A dans l'espace X est dite *symétrique* si

$$(T(a)\,x,\ y) = (x,\ T(a^*)\,y) \text{ quels que soient } a \in A,\ x, y \in X. \qquad (2.6.5)$$

Si X est euclidien (i.e. préhilbertien de dimension finie) alors (2.6.5) signifie que

$$T(a^*) = (T(a))^* \text{ pour tout } a \in A. \qquad (2.6.6)$$

La relation (2.6.4) signifie à son tour que la matrice $t(a)$ de la représentation T relativement à une base orthonormale de X vérifie la relation

$$t(a^*) = (t(a))^*, \tag{2.6.7}$$

i.e.

$$t_{jk}(a^*) = \overline{t_{kj}(a)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, \dim X. \tag{2.6.8}$$

III. *Si T est une représentation symétrique d'une algèbre symétrique A dans l'espace euclidien X, et M est un sous-espace de X, invariant relativement à T, alors $M^\perp$ est également invariant relativement à T.*

Démonstration. Soient $x \in M$, $y \in M^\perp$. Alors on a également $T(a^*)x \in M$ puisque M est invariant relativement à T. Par conséquent, $T(a^*)x \perp y$, i.e. (voir (2.6.5))

$$0 = (T(a^*)x, y) = (x, T(a)y). \tag{2.6.9}$$

Mais (2.6.9) signifie que $T(a)y \perp x$ quel que soit $x \in M$, i.e. $T(a)y \in$ $\in M^\perp$.

IV. *Toute représentation symétrique d'une algèbre symétrique dans un espace euclidien est complètement réductible.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition IX de 2.8, chapitre I, sauf qu'il faut se servir, à la place de II, 2.8 , de la proposition précédente III.

2.7. Définition et propriétés principales de l'algèbre de groupe d'un groupe fini. Ici et dans la suite de tout ce paragraphe, nous allons supposer, sans le dire explicitement, que G est un groupe fini. Supposons que G est constitué par m éléments distincts $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Envisageons l'ensemble A_G de toutes les sommes formelles $a = \sum_{k=1}^{m} a(g_k) g_k$ ou, plus brièvement, $a = \sum_g a(g) g$, où les $a(g_n)$ sont des nombres complexes quelconques; définissons dans A_G l'addition, la multiplication par un nombre et le produit à l'aide des formules

$$a + b = \sum_g [a(g) + b(g)] g, \tag{2.7.1a}$$

$$\alpha a = \sum_g \alpha a(g) g, \tag{2.7.1b}$$

$$ab = \sum_{g', g''} a(g') b(g'') g'g'' \tag{2.7.1c}$$

pour $a = \sum_g a(g) g$, $b = \sum_g b(g) g$. Nous supposons ici $a = b$ seulement dans le cas où $a(g) = b(g)$ quel que soit $g \in G$; en particulier, $a = 0$ seulement lorsque $a(g) = 0$.

Il est facile de voir que dans ce cas les conditions (2.1.1) à (2.1.4) sont satisfaites, de sorte qu'avec les opérations définies par les for-

mules (2.7.1) A_G est effectivement une algèbre; on l'appelle *algèbre de groupe* du groupe G. Nous convenons de ne pas distinguer l'élément $g_0 \in G$ et la somme $\sum_g a(g)\, g$ dans laquelle $a(g) = 0$ lorsque $g \neq g_0$ et $a(g_0) = 1$. Alors les éléments du groupe G seront aussi des éléments de l'algèbre A_G.

I. *Le produit de g_1 et $g_2 \in G$ en tant qu'éléments d'un groupe G coïncide avec leur produit en tant qu'éléments de l'algèbre A_G.*

Cette assertion se déduit directement de (2.7.1c).

II. *L'algèbre de groupe est associative.*

Cette assertion découle directement de l'associativité de la multiplication dans G (voir b) de 1.1, chapitre I), et nous laissons au lecteur les détails du raisonnement.

III. *L'algèbre de groupe contient un élément neutre.*

A savoir, l'élément neutre de A_G coïncide avec l'élément neutre e de G.

Il est également évident que l'algèbre de groupe est de dimension finie et dim $A_G = |G|$. Définissons maintenant dans l'algèbre de groupe A_G une involution en posant

$$\left(\sum_g a(g)\, g\right)^* = \sum \overline{a(g)}\, g^{-1}. \tag{2.7.2}$$

Il est tout aussi facile de vérifier que les conditions 1) à 4) de 2.5 imposées par la définition de l'involution sont alors satisfaites.

IV. *Lorsque l'involution est définie par la formule* (2.7.2), *l'algèbre A_G est une algèbre symétrique à involution non dégénérée.*

D é m o n s t r a t i o n. Les relations (2.7.1), (2.7.2) entraînent

$$a^*a = \sum_{g',\, g''} \bar{a}(g')\, a(g'')\, g'^{-1}g''$$

et le coefficient $(a^*a)(e)$ de $g = e$ dans cette somme s'obtient lorsque $g' = g''$; ainsi

$$(a^*a)(e) = \sum_{g'} \bar{a}(g')\, a(g') = \sum_{g'} |a(g')|^2.$$

Si $a^*a = 0$, alors $(a^*a)(g) = 0$ quel que soit g, en particulier $(a^*a)(e) = 0$, i.e. $\sum_{g'} (a(g'))^2 = 0$. D'où l'on tire $a(g') = 0$ quel que soit $g' \in G$, i.e. $a = 0$.

V. *Pour chaque $a \in A_G$, l'élément*

$$a' = \sum_g g^{-1}ag$$

appartient au centre $Z(A_G)$ de l'algèbre A_G.

D é m o n s t r a t i o n. Pour chaque $g_0 \in G$ on a

$$g_0^{-1}a'g_0 = \sum_g g_0^{-1}g^{-1}agg_0 = \sum_g (gg_0)^{-1}\, a\, (gg_0) = \sum_g g^{-1}ag = a'$$

et donc

$$a'g' = g'a. \tag{2.7.3}$$

En multipliant les deux membres de (2.7.3) par $b\,(g')$ et en calculant la somme sur g', nous obtenons $a'b = ba'$ pour chaque $b \in A_G$, et donc $a' \in Z\,(A_G)$.

Il est évident que la donnée de la somme $\sum_g a\,(g)\,g$ est équivalente à la donnée d'une fonction $a = \{a(g)\}$ sur le groupe G, où $a\,(g)$ est le coefficient de g dans la somme $\sum_g a\,(g)\,g$. Ainsi l'algèbre A_G peut également être considérée comme l'ensemble de toutes les fonctions $a = \{a\,(g)\}$ sur G. On déduit alors immédiatement de (2.7.1) que

$$\alpha a = \{\alpha a\,(g)\}, \tag{2.7.4}$$

$$a + b = \{a\,(g) + b\,(g)\}. \tag{2.7.5}$$

Pour définir maintenant la règle de multiplication des fonctions sur le groupe, il suffit de trouver le coefficient auprès de g dans la formule (2.7.3). Pour cela, en posant $g = g'g''$ dans (2.7.3) (et donc $g'' = g'^{-1}g$), on écrit cette formule sous la forme

$$ab = \sum_g \sum_{g'} a\,(g')\, b\,(g'^{-1}g)\, g.$$

D'où l'on tire

$$ab = \Big\{\sum_{g'} a\,(g')\, b\,(g'^{-1}g)\Big\}. \tag{2.7.6}$$

Remplaçant ensuite g par g^{-1} dans (2.7.2), on obtient

$$a^* = \{\overline{a\,(g^{-1})}\}. \tag{2.7.7}$$

Les formules (2.7.4) à (2.7.6) peuvent s'écrire également sous la forme

$$(\alpha a)\,(g) = \alpha a\,(g), \tag{2.7.4'}$$

$$(a+b)\,(g) = a\,(g) + b\,(g), \tag{2.7.5'}$$

$$(ab)\,(g) = \sum_{g'} a\,(g')\, b\,(g'^{-1}g), \tag{2.7.6'}$$

$$a^*\,(g) = \overline{a\,(g^{-1})}. \tag{2.7.7'}$$

La fonction $(ab)\,(g)$ définie par la formule (2.7.6') s'appelle *convolution* des fonctions a et b.

Ainsi l'algèbre de groupe A_G d'un groupe fini G peut également être considérée comme l'ensemble de toutes les fonctions complexes

$a(g)$ sur G, dans lequel les opérations d'addition, de multiplication par un nombre, de produit et d'involution sont données par les formules (2.7.4′) à (2.7.7′). Par la suite nous nous servirons des deux méthodes de description de l'algèbre A_G.

VI. *Lorsqu'on multiplie l'élément* $a = \sum_g a(g)\, g$ *à gauche ou à droite par* g_0, *la fonction* $a(g)$ *se transforme en* $a(g_0^{-1}g)$ *ou en* $a(gg_0^{-1})$ *respectivement.*

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité

$$g_0 a = \sum_g a(g)\, g_0 g = \sum_g a(g_0^{-1}g)\, g$$

prouve le cas de la multiplication à gauche; on démontre d'une manière analogue l'assertion concernant la multiplication à droite.

Les éléments $a = \{a(g)\}$ de l'algèbre A_G peuvent aussi être considérés comme des éléments de l'espace $L^2(G)$; rappelons que l'on appelle produit scalaire de deux éléments $a, b \in L^2(G)$ le nombre

$$(a, b) = \frac{1}{n} \sum_g a(g)\, \overline{b(g)}. \tag{2.7.8}$$

L'expression (2.7.8) peut être écrite sous une autre forme en introduisant la fonctionnelle linéaire $f_0(a)$ sur A_G selon la formule

$$f_0(a) = a(e) \quad \text{pour} \quad a = \sum_g a(g)\, g;$$

alors

$$(a, b) = \frac{1}{n} f_0(b^* a). \tag{2.7.9}$$

En effet, en vertu de (2.7.1c) et (2.7.2),

$$b^* a = \sum_{g', g''} \overline{b(g')}\, a(g'')\, g'^{-1} g'', \tag{2.7.10}$$

tandis que $f_0(b^* a) = (b^* a)(e)$ est la somme de tous les termes de (2.7.10) pour lesquels $g' = g''$; donc

$$f_0(b^* a) = \sum_{g'} \overline{b(g')}\, a(g') = n(a, b).$$

Soit $E \subset A_G$; désignons par $E^\perp$ le complémentaire orthogonal de l'ensemble E dans $L^2(G) = A_G$. Si E est un sous-espace de A_G, alors évidemment

$$A_G = E \oplus E^\perp. \tag{2.7.11}$$

VII. *Si* I_l *est un idéal à gauche de* A_G, *alors* $I_l^\perp$ *est également un idéal à gauche de* A_G *et*

$$A_G = I_l \oplus I_l^\perp. \tag{2.7.12}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $a \in I_l$, $b \in I_l^{\perp}$ et $c \in A_G$. Supposons également $c^*a \in I_l$ et alors

$$(a,\ cb) = (c^*a,\ b) = 0.$$

Par conséquent, on a également $cb \in I_l^{\perp}$, ce qui signifie que $I_l^{\perp}$ est un idéal à gauche. La relation (2.7.12) se déduit immédiatement de (2.7.11).

VIII. *Chaque idéal à gauche I_l de A_G peut s'écrire sous la forme*

$$I_l = A_G\varepsilon, \tag{2.7.13}$$

où ε est un certain élément de I_l. L'élément ε peut être choisi de manière à avoir

$$\varepsilon^2 = \varepsilon. \tag{2.7.14}$$

Dans ce cas

$$I_l = \{a:\ a \in A_G,\ a\varepsilon = \varepsilon\}. \tag{2.7.15}$$

D é m o n s t r a t i o n. Appliquons la décomposition (2.7.12) à l'élément neutre e. Nous obtenons

$$e = e' + e'',\quad e' \in I_l,\quad e'' \in I_l^{\perp}. \tag{2.7.16}$$

En multipliant les deux membres de (2.7.15) à gauche et à droite par e', on obtient

$$e' = e'^2 + e'e'',\quad e' = e'^2 + e''e'.$$

D'où l'on tire $e'e'' = e''e'$, et donc

$$e'e'' = e''e' \in I_l \cap I_l^{\perp} = (0). \tag{2.7.17}$$

de sorte que $e'e'' = e''e' = 0$ et $e' = e'^2$.

Puisque $e' \in I_l$, $e'' \in I_l^{\perp}$, on a

$$A_Ge' \subset I_l,\quad A_Ge'' \in I_l^{\perp}. \tag{2.7.18}$$

D'autre part, on déduit de (2.7.16) que

$$A_G = A_Ge = A_Ge' \oplus A_Ge'',$$

et la comparaison avec (2.7.12) et (2.7.18) donne

$$I_l = A_Ge',\quad I_l^{\perp} = A_Ge''. \tag{2.7.19}$$

Les relations (2.7.13) et (2.7.14) s'obtiennent donc pour $\varepsilon = e'$ Supposons que (2.7.13) et (2.7.14) sont vérifiées, et soit $a \in I_l$. Alors $a = b\varepsilon$ pour un certain $b \in A_G$ et donc $a\varepsilon = b\varepsilon^2 = b\varepsilon = a$. Inversement, si $a\varepsilon = a$, alors évidemment $a = a\varepsilon \in A_G\varepsilon = I_l$.

Remarque. On montre tout aussi facilement, pour $\varepsilon = e'$, que

$$I_l^{\perp} = \{a:\ a \in A_G,\ a\varepsilon = 0\}.$$

L'élément $\varepsilon \in A_G$ est dit *idempotent* si $\varepsilon \neq 0$ et $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Un idempotent ε est dit *primitif* s'il ne peut être représenté sous forme d'une somme de deux idempotents non nuls.

EXERCICE. Soit ε un idempotent. Démontrer que $I_l = A_G\varepsilon$ est minimal dans A_G si et seulement si ε est primitif.

2.8. Représentations d'une aglèbre de groupe et leur relation avec les représentations du groupe. Soient G un groupe fini, A_G son algèbre de groupe et T une représentation de l'algèbre A_G dans l'espace X. Puisque $G \subset A_G$, on peut considérer la restriction de l'application T à G. En appliquant la relation $T(a_1a_2) = T(a_1)\,T(a_2)$ (voir 3) de 2.6) dans le cas $a_1 = g_1$, $a_2 = g_2$ et en prenant en considération II de 2.7 et l'égalité $T(e) = 1$ (voir 4) de 2.6), nous voyons que cette restriction est la représentation $g \to T(g)$ du groupe G. Inversement, soit $g \to T(g)$ une représentation du groupe G dans l'espace X. Faisons correspondre à chaque élément $a = \sum_g a(g)\,g \in \in A_G$ l'opérateur

$$T(a) = \sum_G a(g)\,T(g). \tag{2.8.1}$$

Démontrons que l'application obtenue $T: a \to T(a)$ est une représentation de l'algèbre A_G. Les propriétés 1), 2) et 4) de la représentation d'une algèbre (voir 2.6) se vérifient immédiatement. Démontrons que l'on a également $T(a_1a_2) = T(a_1)\,T(a_2)$ (voir 3) de 2.6). Soient $a_1 = \sum_g a_1(g)\,g$, $a_2 = \sum_g a_2(g)\,g$. Par définition de la multiplication dans A_G (voir (2.7.1c)), on a

$$a_1a_2 = \sum_{g',\,g''} a_1(g')\,a_2(g'')\,g'g'';$$

et donc en vertu de (2.8.1)

$$T(a_1a_2) = \sum_{g',\,g''} a_1(g')\,a_2(g'')\,T(g'g'') = \sum_{g',\,g''} a_1(g')\,a_2(g'')\,T(g')\,T(g'') =$$
$$= \sum_{g'} a_1(g')\,T(g') \sum_{g''} a_2(g'')\,T(g'') = T(a_1)\,T(a_2).$$

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME 1. *A chaque représentation $T: a \to T(a)$ de l'algèbre de groupe A_G d'un groupe G correspond une représentation $g \to T(g)$ de ce groupe, obtenue par restriction à G de la représentation $a \to T(a)$. Réciproquement, à chaque représentation $g \to T(g)$ du groupe G correspond, suivant la formule* (2.8.1), *la représentation $a \to T(a)$ de son algèbre de groupe A_G.*

La représentation du groupe G et celle de son algèbre de groupe A_G sont dites correspondantes l'une à l'autre si elles sont liées par la relation (2.8.1).

THÉORÈME 2. *Pour qu'une représentation $g \to T(g)$ d'un groupe G dans un espace euclidien X soit unitaire il faut et il suffit que la représentation correspondante $a \to T(a)$ de son algèbre de groupe A_G soit symétrique.*

Démonstration. Supposons que la représentation $g \to T(g)$ est unitaire, de sorte que

$$(T(g))^* = T(g^{-1}). \tag{2.8.2}$$

Alors pour $a = \sum_g a(g)\, g$, on a

$$(T(a))^* = \Big(\sum_g a(g)\, T(g)\Big)^* = \sum_g \overline{a(g)}\, (T(g))^* = \sum_g \overline{a(g)}\, T(g^{-1}),$$

mais d'autre part $a^* = \sum_g \overline{a(g)}\, g^{-1}$ (voir (2.7.3)) et donc

$$T(a^*) = \sum_g \overline{a(g)}\, T(g^{-1}).$$

Par conséquent

$$(T(a))^* = T(a^*), \tag{2.8.3}$$

i.e. la représentation $a \to T(a)$ est symétrique. Réciproquement, si la représentation $a \to T(a)$ est symétrique, alors en appliquant la relation (2.8.3) au cas $a = g$, nous concluons que la représentation correspondante $g \to T(g)$ est unitaire.

En se servant de la relation (2.8.1), le lecteur vérifiera sans peine les propositions suivantes:

I. *Deux représentations $g \to T(g)$, $g \to S(g)$ d'un groupe G sont équivalentes (en particulier, unitairement équivalentes) si et seulement si les représentations correspondantes de l'algèbre de groupe A_G sont équivalentes (resp. unitairement équivalentes).*

II. *La représentation $g \to T(g)$ d'un groupe G est irréductible si et seulement si la représentation correspondante de son algèbre de groupe A_G l'est.*

III. *La relation $T = T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(k)}$ pour des représentations d'un groupe est équivalente à la même relation pour les représentations correspondantes de son aglèbre de groupe.*

Il découle de ces propositions que le problème de la description de toutes (à l'équivalence près) les représentations irréductibles et le problème de la décomposition d'une représentation donnée d'un groupe en représentations irréductibles sont équivalents aux problèmes correspondants pour son algèbre de groupe.

Appliquons les résultats précédents à une représentation régulière à gauche du groupe G (voir 1.3). Rappelons que cette représentation $h \to \widetilde{T}(h)$, $h \in G$, est donnée dans l'espace $L^2(G)$ par la

formule

$$\tilde{T}(h) f(g) = f(h^{-1}g) \quad \text{pour} \quad f \in L^2(G). \tag{2.8.4}$$

Trouvons la représentation de l'algèbre de groupe A_G qui correspond à la représentation $h \to \tilde{T}(h)$. Notons tout d'abord que $L^2(G)$ et A_G sont constitués par les mêmes fonctions (en l'occurrence, par toutes les fonctions) sur le groupe G. Par conséquent, on peut également supposer que $f \in A_G$. En appliquant maintenant la formule (2.8.1) et en prenant en considération (2.7.6), nous obtenons

$$\tilde{T}(a) f(g) = \sum_h a(h) \tilde{T}(h) f(g) = \sum_h a(h) f(h^{-1}g) = (af)(g).$$

Autrement dit (voir 2.6):

IV. *A une représentation régulière à gauche d'un groupe G correspond une représentation régulière à gauche de son algèbre de groupe.*

On tire des propositions III de 2.6 et des propositions I à IV ci-dessus les propositions suivantes:

V. *Un idéal minimal à gauche I_l de l'algèbre A_G est un sous-espace invariant de la représentation régulière à gauche du groupe G et la restriction à I_l de cette représentation est irréductible.*

VI. *A la décomposition*

$$A_G = I_l^1 \dotplus \ldots \dotplus I_l^m \tag{2.8.5}$$

de l'algèbre de groupe A_G en somme directe de ses idéaux minimaux à gauche correspond la décomposition

$$\tilde{T} = \tilde{T}^1 \dotplus \ldots \dotplus \tilde{T}^m \tag{2.8.6}$$

de la représentation régulière à gauche d'un groupe G en somme directe de ses représentations irréductibles $\tilde{T}^1, \ldots, \tilde{T}^m$, où $\tilde{T}^1, \ldots, \tilde{T}^m$ sont les restrictions de la représentation $\tilde{T}$ aux idéaux $I_l^1, \ldots, I_l^m$.

En vertu du théorème 1 de 1.5, la décomposition (2.8.6) contient toutes (à l'équivalence près) les représentations irréductibles du groupe fini G; donc, pour trouver son système complet de représentations irréductibles, il suffit de trouver la décomposition de l'algèbre A_G en somme directe de ses idéaux minimaux à gauche.

Pour conclure, déduisons la formule pour la trace d'une représentation irréductible, formule qui sera nécessaire par la suite. Rappelons (voir VIII de 2.7) que chaque idéal à gauche I_l de A_G est de la forme $I_l = A_G\varepsilon$, où $\varepsilon \in I_l$

VII. *Supposons qu'une représentation irréductible d'un groupe G est la restriction de sa représentation régulière à gauche $\tilde{T}$ à un idéal minimal à gauche, i.e.*

$$I_l = A_G\varepsilon, \tag{2.8.7}$$

où ε *est un idempotent; alors*

$$\chi_T(g) = \sum_{g'} \varepsilon(g'^{-1}g^{-1}g'). \tag{2.8.8}$$

Démonstration. Définissons l'opérateur P sur A_G, en posant $Px = x\varepsilon$ pour $x \in A_G$. Puisque ε est un idempotent, (2.8.7) implique que P est un projecteur de A_G sur I_l. En plus de l'opérateur $T(a)$ défini sur I_l, considérons maintenant l'opérateur $T'(a)$ en le définissant sur toute l'algèbre A_G par la formule

$$T'(a)x = \widetilde{T}Px = \widetilde{T}(a)x\varepsilon = ax\varepsilon.$$

Alors I_l est invariant relativement à $T'(a)$ et $T(a)$ est la restriction de l'opérateur $T'(a)$ à I_l. Par conséquent (voir III de 2.9, chapitre I)

$$\operatorname{tr}(T(a)) = \operatorname{tr}(T'(a)). \tag{2.8.9}$$

Lorsque l'algèbre A_G est réalisée sous forme de fonctions $x(g) = \{x(g_1), \ldots, x(g_n)\}$ sur $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, on a

$$T'(a)\{x(g)\} = \sum_{g', g''} a(g')\, x(g'^{-1}g'')\, \varepsilon(g''^{-1}g) = \sum_{g', g''} a(g')\, x(g'')\, \varepsilon(g''^{-1}g'^{-1}g),$$

par conséquent, $T'(a)$ est une transformation de l'espace n-dimensionnel A_G des variables $\{x(g''_1), \ldots, x(g''_n)\}$, donnée par la matrice

$$t(g, g'') = \sum_{g'} a(g')\, \varepsilon(g''^{-1}g'^{-1}g).$$

Par conséquent

$$\operatorname{tr}(T'(a)) = \sum_{g} t(g, g) = \sum_{g, g'} a(g')\, \varepsilon(g^{-1}g'^{-1}g) = \sum_{g, g'} a(g)\, \varepsilon(g'^{-1}g^{-1}g')$$

et l'on obtient en comparant avec (2.8.9)

$$\sum_{g, g'} a(g)\, \varepsilon(g'^{-1}g^{-1}g') = \operatorname{tr}(T(a)) = \sum_{g} a(g) \operatorname{tr}(T(g)) = \sum_{g} a(g)\, \chi_T(g);$$

d'où l'on tire (2.8.8).

2.9. Autres propriétés de l'algèbre de groupe.

THÉORÈME 1. *Soit* $T^1, \ldots, T^m$ *un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini* G; *soient* $n_1, \ldots, n_m$ *leurs dimensions, et* $t^1(a), \ldots, t^m(a)$ *leurs matrices relativement à des bases orthonormées; alors l'application* $f: a \to \{t^1(a), \ldots, t^m(a)\}$ *est un isomorphisme symétrique de l'algèbre de groupe sur la somme directe de* m *algèbres matricielles complètes de dimensions* $n_1, \ldots, n_m$.

Démonstration. Soit B la somme directe des algèbres matricielles complètes $A(n_1 \times n_1), \ldots, A(n_m \times n_m)$ dans des

espaces de dimension $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Il découle de la définition de la représentation d'une algèbre, que l'application $f: a \to \{t^1(a), \ldots, t^m(a)\}$ est un homomorphisme de l'algèbre A_G dans l'algèbre B; f est symétrique puisque $T^1, \ldots, T^m$ sont unitaires (théorème 2, 2.8). Démontrons que f applique A_G sur B. La formule $T(a) = \sum_g a(g) T(g)$ pour $a = \sum_g a(g) g$ (voir (2.8.1)) permet d'écrire

$$t^k(a) = \sum_g a(g) t^k(g), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

et donc

$$t^k_{j\nu}(a) = \sum_g a(g) t^k_{j\nu}(g), \quad j, \nu = 1, \ldots n_k. \tag{2.9.1}$$

Posons dans (2.9.1) $a(g) = a^{k'}_{j'\nu'}(g) = \frac{n_{k'}}{n} \overline{t^{k'}_{j'\nu'}(g)}$; en vertu des relations d'orthogonalité (voir (1.4.1), (1.4.2)) nous obtenons pour $a = a^{k'}_{j'\nu'}$

$$t^k_{j\nu}(a^{k'}_{j'\nu'}) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = k', \ j = j', \ \nu = \nu', \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Autrement dit, dans le système correspondant

$$\{t^1(a^{k'}_{j'\nu'}), \ldots, t^m(a^{k'}_{j'\nu'})\} \tag{2.9.2}$$

seuls les $t^{k'}(a^{k'}_{j'\nu'})$ sont non nuls, et la matrice $t^{k'}(a^{k'}_{j'\nu'})$ est telle que le nombre 1 est situé à l'intersection de la ν'-ième colonne et de la j'-ième ligne, tandis que tous les autres éléments sont nuls. Par conséquent, tous les systèmes (2.9.2) forment une base de B, et donc f applique A_G sur B.

Calculons $\operatorname{Ker} f$. Si $a \in \operatorname{Ker} f$, alors $t^k(a) = 0$ quel que soit k, i.e.

$$t^k_{j\nu}(a) = \sum_g a(g) t^k_{j\nu}(g) = 0 \tag{2.9.3}$$

quels que soient k, j, ν. Mais les fonctions $t^k_{j\nu}(g)$, $j, \nu = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, \ldots, m$, forment un système complet dans $L^2(G)$ $(= A_G)$ (VI de 2.8) et donc (2.9.3) entraîne $a(g) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est un isomorphisme, ce qui démontre le théorème.

On en déduit directement le

COROLLAIRE 1. *Une algèbre de groupe d'un groupe fini est symétriquement isomorphe à une somme directe d'algèbres matricielles complètes.*

THÉORÈME 2. *Le centre $Z(A_G)$ d'une algèbre de groupe A_G d'un groupe fini G est constitué par toutes les fonctions $a(g)$ sur G, constantes sur les classes d'éléments conjugués, et l'isomorphisme $f: a \to$*

$\rightarrow \{t^1(a), \ldots, t^m(a)\}$ *applique chaque élément* a *de* $Z(A_G)$ *dans* $\left\{\frac{1}{n_1}\chi_1(a)\,1_{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_m}\chi_m(a)\,1_{n_m}\right\}$, *où* $\chi_1, \ldots, \chi_m$ *sont les caractères des représentations* $T^1, \ldots, T^m$ *et* $1_{n_1}, \ldots, 1_{n_m}$ *les matrices unités de dimensions* $n_1, \ldots, n_m$.

Démonstration. Si $a = \sum_g a(g)$, $g \in Z(A_G)$, alors $g'a = = ag'$, i.e.

$$\sum_g a(g)\,g'g = \sum_g a(g)\,gg' \text{ pour tout } g' \in G. \tag{2.9.4}$$

En comparant les coefficients auprès de g_1 dans les deux membres de (2.9.4), nous voyons que

$$a(g'^{-1}g_1) = a(g_1g'^{-1}) \text{ quels que soient } g_1, g' \in G. \tag{2.9.5}$$

En posant ici $g_1 = gg'$, nous obtenons

$$a(g'^{-1}gg') = a(g) \text{ quels que soient } g, g' \in G, \tag{2.9.6}$$

i.e. les $a(g)$ sont constants sur les classes d'éléments conjugués. Inversement, si (2.9.6) est vérifié, alors (2.9.5) et donc (2.9.4) le sont aussi. En multipliant les deux membres de (2.9.4) par $b(g')$ et en prenant la somme sur g', nous obtenons

$$\sum_{g,\,g'} b(g')\,a(g)\,g'g = \sum_{g,\,g'} a(g)\,b(g')\,gg',$$

i.e. $ba = ab$ quel que soit $b \in A_G$. Cela signifie que $a \in Z(A_G)$ et la première partie du théorème est démontrée.

L'isomorphisme f applique le centre de l'algèbre A_G sur le centre de l'algèbre B. En vertu du théorème 1, ce dernier est constitué par tous les $\{t^1(a), \ldots, t^m(a)\}$, où $t^k(a)$ appartient au centre de l'algèbre $A(n_k \times n_k)$, et donc $t^k(a) = \lambda_k(a)\,1$; en prenant la trace dans les deux membres de cette dernière égalité, nous voyons que $\chi_k(a) = n_k\lambda_k(a)$, de sorte que

$$\lambda_k(a) = \frac{1}{n_k}\chi_k(a) \quad \text{et} \quad t^k(a) = \frac{1}{n_k}\chi_k(a)\,1_{n_k}.$$

§ 3. Représentations d'un groupe symétrique

3.1. Position du problème. Rappelons que l'on appelle groupe symétrique S_n, le groupe de toutes les permutations de n éléments $1, 2, \ldots, n$; son ordre est égal à $n!$ (voir l'exemple 5 de 1.7, chapitre I). Chaque permutation $g \in S_n$ est un produit de cycles sans éléments communs; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les longueurs de ces cycles et

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n. \tag{3.1.1}$$

Ces cycles étant permutables, nous pouvons les ordonner dans le produit de manière à avoir

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h. \qquad (3.1.2)$$

Deux permutations $g, g' \in S_n$ sont conjuguées si et seulement si le nombre de leurs cycles ainsi que les longueurs des cycles correspondants coïncident, de sorte que $h' = h$, $\alpha'_1 = \alpha_1, \ldots, \alpha'_h = \alpha_h$ (voir l'exemple 5 de 1.7, chapitre I). Ainsi, une classe d'éléments conjugués du groupe S_n se détermine de manière unique par une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ satisfaisant aux conditions (3.1.1) et (3.1.2), et il y a exactement autant de classes d'éléments conjugués qu'il existe de telles suites de nombres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_h)$, i.e. de décomposition du nombre n en une somme d'entiers positifs $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h$. D'autre part, un système complet de représentations irréductibles du groupe S_n contient exactement autant de représentations qu'il y a dans S_n de classes d'éléments conjugués (théorème 3 de 1.7) et donc autant qu'il existe de suites de nombres entiers positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ satisfaisant aux conditions (3.1.1), (3.1.2). Ainsi, pour obtenir un système complet de représentations irréductibles du groupe S_n, il suffit de construire pour chacune de ces suites une représentation irréductible de ce groupe de manière que les représentations qui correspondent à des suites distinctes soient non équivalentes.

Le but du présent paragraphe est justement d'effectuer cette construction.

3.2. Schémas et diagrammes de Young. Faisons correspondre à chaque suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ d'entiers positifs, satisfaisant aux conditions (3.1.1), (3.1.2), un schéma (fig. 1) de h lignes où la

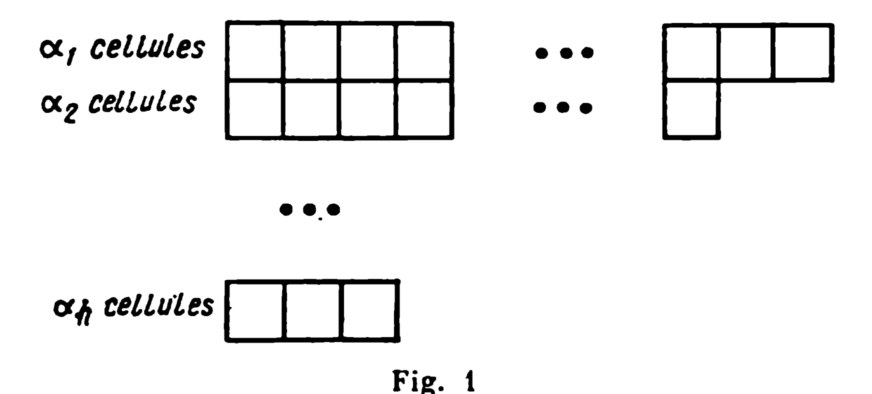


Fig. 1

k-ième ligne comporte α_k cellules ($k = 1, \ldots, h$) et la j-ième cellule de la $(k + 1)$-ième ligne est située exactement en dessous de la j-ième cellule de la k-ième ligne. Un tel schéma s'appelle *schéma de Young* correspondant à la suite α; il sera également désigné par α.

Par exemple, dans le cas $n = 3$, les schémas de Young suivants sont possibles (fig. 2).

Le nombre total de cellules dans un schéma de Young est égal à $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n$. Par conséquent, on peut ranger dans ces cellules les nombres 1, 2, . . ., n. Une bijection des nombres 1, 2, . . ., n dans les cellules du schéma α s'appelle *diagramme de*

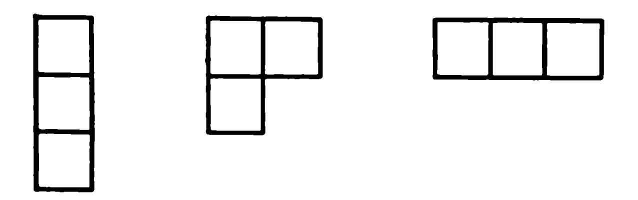


Fig. 2

Young correspondant au schéma α; on le désigne par Σ_α. Notons qu'un schéma de Young α donné possède plusieurs, à savoir $n!$, diagrammes de Young distincts, qui correspondent à différents modes de rangement des nombres 1, 2, . . ., n dans les cellules du schéma α. Si l'on se donne un diagramme quelconque Σ_α et si $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} \in S_n$, il est logique de désigner par $g\Sigma_\alpha$ le diagramme obtenu à partir de Σ_α en remplaçant dans chacune de ses cellules le nombre j par le nombre k_j. Il est évident que l'ensemble de tous les $g\Sigma_\alpha$, pour un Σ_α donné, lorsque g parcourt G, est constitué par tous les diagrammes correspondant au schéma α. Les lignes des diagrammes Σ_α pouvant être considérées comme des cycles de longueur $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, ces diagrammes définissent une certaine permutation, à savoir le produit de ces cycles.

I. *Si le diagramme Σ_α correspond à la permutation g_0, alors le diagramme $g\Sigma_\alpha$ correspond à la permutation gg_0g^{-1}.*

La démonstration consiste en une vérification évidente que nous laisserons au lecteur. Remarquons qu'il suffit de vérifier l'assertion pour une transposition, puisque chaque permutation g est un produit de transpositions.

Pour un diagramme de Young Σ_α donné, désignons par P_α l'ensemble de toutes les permutations qui n'opèrent que sur les éléments d'une même ligne du diagramme Σ_α; il est évident que P_α est un sous-groupe de S_n. Les éléments de P_α seront désignés par la lettre p. D'une manière analogue, désignons par Q_α l'ensemble de toutes les permutations qui concernent seulement les éléments d'une même colonne du diagramme Σ_α. Q_α est évidemment aussi un sous-groupe de S_n. Les éléments de Q_α seront désignés par la lettre q. Soient m_α, m'_α les ordres des groupes P_α, Q_α. Notons que

P_α, Q_α dépendent en réalité non seulement du schéma α, mais aussi du diagramme Σ_α.

II. *Lorsqu'on passe de Σ_α à $g\Sigma_\alpha$ les groupes P_α et Q_α deviennent $gP_\alpha g^{-1}$ et $gQ_\alpha g^{-1}$.*

La démonstration consiste en une vérification immédiate que nous laissons au lecteur; il suffit d'effectuer cette vérification dans le cas où g est une transposition, puisque chaque permutation est un produit de transpositions.

Soit A l'algèbre de groupe du groupe S_n, i.e. $A = A_{S_n}$. Considérons les éléments suivants de l'algèbre A :

$$f_\alpha = \sum_p p, \quad \varphi_\alpha = \sum_q \sigma_q q, \tag{3.2.1}$$

où

$$\sigma_q = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ est une permutation paire,} \\ -1 & \text{si } q \text{ est une permutation impaire.} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

III. *On a les relations*

$$pf_\alpha = f_\alpha p = f_\alpha, \tag{3.2.3}$$

$$\sigma_q q \varphi_\alpha = \varphi_\alpha \sigma_q q = \varphi_\alpha, \tag{3.2.4}$$

$$f_\alpha^2 = m_\alpha f_\alpha, \quad \varphi_\alpha^2 = m'_\alpha \varphi_\alpha. \tag{3.2.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que $\sigma_q \sigma_{q'} = \sigma_{qq'}$, donc (3.2.1) implique

$$pf_\alpha = p\sum_{p'} p' = \sum_{p'} pp' = \sum_{p'} p' = f_\alpha, \quad f_\alpha p = \sum_{p'} p'p = \sum_{p'} p' = f_\alpha,$$

$$\sigma_q q \varphi_\alpha = \sigma_q q \sum_{q'} \sigma_{q'} q' = \sum_{q'} \sigma_{qq'} qq' = \sum_{q'} \sigma_{q'} q' = \varphi_\alpha$$

et d'une manière analogue, $\varphi_\alpha \sigma_q q = \varphi_\alpha$.

D'où l'on tire

$$f_\alpha^2 = f_\alpha f_\alpha = f_\alpha \sum_p p = \sum_p f_\alpha = m_\alpha f_\alpha;$$

on démontre d'une manière analogue que $\varphi_\alpha^2 = m'_\alpha \varphi_\alpha$.

3.3. Lemme combinatoire. Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{h'})$; nous écrirons $\alpha > \beta$ si la première différence non nulle $\alpha_k - \beta_k$ est positive; ici nous supposons $\alpha_k = 0$ lorsque $k > h$, et $\beta_k = 0$ lorsque $k > h'$. Cet ordre dans l'ensemble des schémas α est dit *lexicographique*.

LEMME. *Si*: a) $\alpha \geqslant \beta$ *et* b) *aucun couple d'éléments situés dans une même colonne du diagramme Σ_β ne se trouve dans une même ligne*

du diagramme Σ_α ; *alors*

1) $\alpha=\beta$,

2) $\Sigma_\beta = pq\Sigma_\alpha$, *où* $p \in P_\alpha$, $q \in Q_\alpha$, (3.3.1)

P_α, Q_α *étant construits d'après* Σ_α.

D é m o n s t r a t i o n. La condition $\alpha \geqslant \beta$ implique

$$\alpha_1 \geqslant \beta_1. \tag{3.3.2}$$

D'autre part, la première ligne de Σ_α comporte α_1 nombres, or en vertu de la condition b) tous ces nombres sont disposés dans des colonnes différentes du schéma Σ_β, ce qui signifie que le nombre de colonnes dans Σ_β n'est pas inférieur à α_1, et $\beta_1 \geqslant \alpha_1$. En confrontant cette inégalité avec (3.3.2), nous concluons que $\beta_1 = \alpha_1$. D'après la condition b), tous les éléments de la première ligne de Σ_α sont situés dans les colonnes différentes de Σ_β ; ainsi, pour une certaine permutation $q_1' \in Q_\beta$ correspondant à Σ_β, les premières lignes des diagrammes Σ_α et $q_1'\Sigma_\beta$ seront composées des mêmes éléments, disposés éventuellement dans un ordre différent.

Puisque $\alpha \geqslant \beta$ et $\alpha_1 = \beta_1$, on a $\alpha_2 \geqslant \beta_2$. Imaginons que dans Σ_α et $q_1'\Sigma_\beta$ les premières lignes ont été éliminées et appliquons aux diagrammes obtenus le raisonnement précédent ; nous voyons que $\alpha_2 = \beta_2$ pour une certaine permutation q_2' qui correspond au diagramme $q_1'\Sigma_\beta$ et qui laisse sur place les éléments de sa première ligne ; les deuxièmes lignes de Σ_α et de $q_2'q_1'\Sigma_\beta$ sont composés des mêmes éléments, peut-être disposés dans un ordre différent.

En répétant ce raisonnement, nous aboutissons à $\alpha = \beta$ et, en outre, nous obtenons un diagramme $q_h'q_{h-1}' \ldots q_1'\Sigma_\beta$ dont chaque ligne contient les mêmes éléments que la ligne correspondante de Σ_α, disposés éventuellement dans un autre ordre. Par conséquent, pour une certaine permutation $p \in P_\alpha$ qui correspond à Σ_α, nous obtenons le schéma

$$p\Sigma_\alpha = q'\Sigma_\beta, \tag{3.3.3}$$

où pour abréger on a désigné par q' la suite $q_h'q_{h-1}' \ldots q_1'$. Ainsi chaque q_j', et donc également q' permute seulement les éléments d'une même colonne dans Σ_β, de sorte que $q' \in Q_\beta$ (où Q_β correspond à Σ_β). En appliquant maintenant la proposition II à $\Sigma_\beta = q'^{-1}p\Sigma_\alpha$ (voir (3.3.3)), nous voyons que $q' = q'^{-1}pq^{-1}(q'^{-1}p)^{-1}$, i.e.

$$q' = q'^{-1}pq^{-1}p^{-1}q', \tag{3.3.4}$$

où $q \in Q_\alpha$ (il nous est plus commode d'écrire ici q^{-1} à la place de q). Il est facile de déduire de (3.3.4) que $q' = pq^{-1}p^{-1}$, et alors (3.3.3) entraîne $\Sigma_\beta = q'^{-1}p\Sigma_\alpha = (pqp^{-1})\,p\Sigma_\alpha = pq\Sigma_\alpha$, et le lemme est démontré.

COROLLAIRE. *Lorsque* $\alpha > \beta$, *on a*

$$f_\alpha g \varphi_\beta g^{-1} = 0 \text{ pour tout } g \in S_n, \tag{3.3.5}$$

$$f_\alpha A \varphi_\beta = (0). \tag{3.3.6}$$

Démonstration. Démontrons d'abord que

$$f_\alpha \varphi_\beta = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha > \beta. \tag{3.3.7}$$

Soient Σ_α, Σ_β les diagrammes qui ont servi à construire f_α, f_β (voir 3.2). Puisque $\alpha > \beta$, il doit exister, en vertu du lemme précédent, un couple de nombres i, k situés dans une même ligne de Σ_α et dans une même colonne de Σ_β. Soit t la transposition de ces nombres: $t = (i, k)$. Alors $t \in P_\alpha$ pour Σ_α et $t \in Q_\beta$ pour Σ_β. D'où en vertu de (3.2.3) et (3.2.4)

$$f_\alpha = f_\alpha t, \quad \varphi_\beta = \sigma_t t \varphi_\beta = -t\varphi_\beta$$

et donc *)

$$f_\alpha \varphi_\beta = f_\alpha t(-t\varphi_\beta) = -f_\alpha t^2 \varphi_\beta = -f_\alpha \varphi_\beta.$$

La dernière égalité n'est possible que si $f_\alpha \varphi_\beta = 0$, donc (3.3.7) est démontrée. Pour démontrer la relation (3.3.5), il suffit de remarquer que $g\varphi_\beta g^{-1}$ est l'application construite pour $g\Sigma_\beta$ (voir II de 3.2); donc (3.3.5) découle de (3.3.7) pour l'application $\varphi'_\beta = g\varphi_\beta g^{-1}$ qui correspond à $g\Sigma_\beta$. En multipliant maintenant les deux membres de (3.3.5) à droite par $a(g)\,g$ et en prenant ensuite la somme sur g, nous obtenons $f_\alpha \sum_g a(g)\, g\varphi_\beta = 0$, i.e. $f_\alpha a \varphi_\beta = 0$ quel que soit $a \in A$; ceci démontre la relation (3.3.6).

3.4. Symétrisateurs de Young. Posons pour un diagramme donné Σ_α

$$h_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha = \sum_{p,\,q} \sigma_q pq. \tag{3.4.1}$$

$h_\alpha \neq 0$ car le terme $h_\alpha(e)$ (pour $p = q = e$) est $\sigma_e = 1$:

$$h_\alpha(e) = 1. \tag{3.4.1a}$$

Young fut le premier à distinguer l'élément h_α; on l'appelle *symétrisateur de Young* correspondant au diagramme Σ_α.

I. h_α *vérifie la relation*

$$p h_\alpha \sigma_q q = h_\alpha. \tag{3.4.2}$$

En effet, en vertu de (3.2.3) et (3.2.4)

$$p h_\alpha \sigma_q q = p f_\alpha \varphi_\alpha \sigma_q q = f_\alpha \varphi_\alpha = h_\alpha.$$

*) Rappelons que $t^2 = e$, et $\sigma_t = -1$.

II. *Si un élément $a \in A$ vérifie la relation*

$$pa\sigma_q q = a \quad \text{pour tous les} \quad p \in P_\alpha, \; g \in Q_\alpha, \tag{3.4.3}$$

alors

$$a = \lambda h_\alpha, \tag{3.4.4}$$

où λ est un nombre.

Démonstration. Supposons que la relation (3.4.3) est vérifiée pour l'élément $a = \sum_g a(g) g$, de sorte que

$$\sum_g \sigma_q a(g) pgq = \sum_g a(g) g \quad \text{pour tous les} \quad p \in P_\alpha, \; g \in Q_\alpha. \tag{3.4.5}$$

En comparant les coefficients des deux membres de (3.4.5) pour $g = pq$, nous obtenons

$$\sigma_q a(e) = a(pq). \tag{3.4.6}$$

Supposons que g_0 ne peut pas être représenté sous la forme pq. Démontrons qu'alors $\alpha(g_0) = 0$. Considérons Σ_α et $g_0\Sigma_\alpha$; d'après le lemme de 3.3, il existe deux nombres j, k, situés dans une même ligne de Σ_α et dans une même colonne de $g_0\Sigma_\alpha$. Posons à nouveau $t = (j, k)$. Alors $t \in P_\alpha$ et $t \in Q'_\alpha$, où Q'_α correspond au diagramme $g_0\Sigma_\alpha$.

En vertu de II, 3.2, on en tire $g_0^{-1}tg_0 \in Q_\alpha$. Posons maintenant $p = t$, $q = g_0^{-1}tg_0$ dans (3.4.5) et comparons dans les deux membres de l'égalité obtenue les coefficients auprès de g_0. Dans le premier membre g_0 s'obtient en posant $g = g_0$ puisque $pg_0q = tg_0g_0^{-1}tg_0 = g_0$ et ne peut s'obtenir pour aucun autre g. Par conséquent $\sigma_q a(g_0) = a(g_0)$, ce qui n'est possible que lorsque $a(g_0) = 0$, car $\sigma_q = -1$ ($q = (j', k')$, où j', k' s'obtiennent de (j, k) en appliquant la permutation g_0). Ainsi

$$a(g) = \begin{cases} \sigma_q a(e) & \text{si } g = pq, \\ 0 & \text{si } g \text{ n'est pas de la forme } pq. \end{cases}$$

Par conséquent

$$a = \sum_{p,q} \sigma_q a(e) pq = a(e) \sum_{p,q} \sigma_q pq = a(e) h_\alpha,$$

ce qu'il fallait démontrer.

III. *L'élément h_α est hermitien.*

En effet, par définition de l'involution dans une algèbre de groupe (voir (2.7.3)) et d'après le lemme de 3.3, on a

$$h_\alpha^* = \Big(\sum_{p,q} \sigma_q pq\Big)^* = \sum_{p,q} \sigma_q q^{-1} p^{-1} = \sum_{p,q} \sigma_{q^{-1}} pq = \sum_{p,q} \sigma_q pq = h_\alpha$$

($\sigma_q = \sigma_{q^{-1}}$ car q et q^{-1} sont toutes deux paires ou toutes deux impaires).

IV. *Lorsque* $\alpha \neq \beta$, *on a*

$$h_\alpha h_\beta = 0. \tag{3.4.7}$$

Démonstration. D'après le corollaire de 3.3

$$h_\alpha h_\beta = f_\alpha \varphi_\beta f_\beta \varphi_\beta \in f_\alpha A \varphi_\beta = (0).$$

V. *Pour chaque* $b \in A$ *on a*

$$h_\alpha b h_\alpha = \lambda h_\alpha, \tag{3.4.8}$$

où λ *est un nombre (qui dépend en général de* α*); en particulier (pour* $b = e$*), on a*

$$h_\alpha^2 = \mu_\alpha h_\alpha, \tag{3.4.9}$$

où μ_α *est un nombre.*

Démonstration. On déduit facilement de (3.4.2) que l'élément $a = h_\alpha b h_\alpha$ satisfait à la condition (3.4.3), de sorte que (3.4.8) découle de la proposition II.

3.5. Construction d'un système complet de représentations irréductibles du groupe S_n. Posons maintenant

$$I^\alpha = A h_\alpha; \tag{3.5.1}$$

il est évident que I^α est un idéal à gauche dans A et $I^\alpha \neq (0)$ puisque $h_\alpha \neq 0$.

I. I^α *est un idéal minimal à gauche dans* A.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$h_\alpha I^\alpha \subset C h_\alpha, \tag{3.5.2}$$

où C est le corps des nombres complexes. En effet,

$$h_\alpha I^\alpha = h_\alpha A h_\alpha$$

et donc $b \in h_\alpha I^\alpha$ implique $b = h_\alpha a h_\alpha$ pour un certain $a \in A$. Par conséquent, on a pour tous les $p \in P_\alpha$, $q \in Q_\alpha$

$$p b \sigma_q q = p h_\alpha a h_\alpha \sigma_q q = h_\alpha a h_\alpha = b$$

(voir (3.4.1) et (3.2.3), (3.2.4)). D'où à l'aide de II, 3.4, on obtient $b = \lambda h_\alpha$, et (3.5.2) est démontré.

Soit maintenant I_l un idéal à gauche contenu dans I^α:

$$I_l \subset I^\alpha. \tag{3.5.3}$$

Alors

$$h_\alpha I_l \subset h_\alpha I^\alpha \subset C h_\alpha$$

(voir (3.5.2)). Mais $C h_\alpha$ est unidimensionnel; par conséquent, seuls les deux cas suivants sont possibles:

1) $h_\alpha I_l = C h_\alpha$,
2) $h_\alpha I_l = (0)$.

Dans le cas 1) $I^\alpha = Ah_\alpha = ACh_\alpha = Ah_\alpha I_l \subset I_l$ et donc $I_l = I^\alpha$.

Dans le cas 2) $I_l^2 = I_l I_l \subset I^\alpha I_l = Ah_\alpha I_l = (0)$; par conséquent $I_l = 0$ en vertu de V de 2.5, car l'involution dans une algèbre de groupe est non dégénérée (voir IV de 2.7).

Ainsi chaque idéal à gauche I_l contenu dans I^α coïncide avec I_l ou bien est nul, ce qui signifie que I^α est minimal. La proposition I est démontrée.

II. *L'espace I^α est invariant relativement à la représentation $\widetilde{T}$ régulière à gauche du groupe S_n et la restriction $\widetilde{T}^\alpha$ de la représentation T à I^α est irréductible.*

L'assertion découle directement de V de 2.8, et de I.

III. *Lorsque $\alpha \neq \beta$, les représentations $\widetilde{T}^\alpha$ et $\widetilde{T}^\beta$ ne sont pas équivalentes.*

D é m o n s t r a t i o n. $\alpha \neq \beta$ implique soit $\alpha > \beta$, soit $\alpha < \beta$. Supposons par exemple $\alpha > \beta$. Alors en vertu de (3.3.7)

$$f_\alpha A h_\beta = f_\alpha A f_\beta \varphi_\beta \subset f_\alpha A \varphi_\beta = (0),$$

de sorte que

$$f_\alpha I^\beta = f_\alpha A h_\beta = (0). \tag{3.5.4}$$

D'autre part

$$f_\alpha I^\alpha \neq (0). \tag{3.5.5}$$

En effet, $I^\alpha = Ah_\alpha$ contient l'élément h_α pour lequel $f_\alpha h_\alpha = h_\alpha \neq 0$.

Supposons que $\widetilde{T}^\alpha$ et $\widetilde{T}^\beta$ sont équivalentes; alors les représentations correspondantes $a \to \widetilde{T}^\alpha(a)$, $a \to \widetilde{T}^\beta(a)$ de l'algèbre A sont également équivalentes (voir I de 2.8), de sorte qu'il existe une application linéaire bijective U de l'espace I^α sur I^β qui envoie $\widetilde{T}^\alpha(a)$ dans $\widetilde{T}^\beta(a)$:

$$\widetilde{T}^\alpha(a) = U^{-1}\widetilde{T}^\beta(a)\,U\,;$$

En particulier, pour $a = f_\alpha$

$$\widetilde{T}^\alpha(f_\alpha) = U^{-1}\widetilde{T}^\beta(f_\alpha)\,U.$$

Mais ceci est impossible, car en vertu de (3.5.4) et (3.5.5)

$$\widetilde{T}^\alpha(f_\alpha)\,I^\alpha = f_\alpha I^\alpha \neq 0,$$

$$U^{-1}\widetilde{T}^\beta(f_\alpha)\,UI^\alpha = U^{-1}\widetilde{T}^\beta(f_\alpha)\,I^\beta = U^{-1}f_\alpha I^\beta = (0).$$

Par conséquent, $\widetilde{T}^\alpha$ et $\widetilde{T}^\beta$ ne sont pas équivalentes.

THÉORÈME. *Supposons qu'à chaque schéma de Young α on a fait correspondre un diagramme de Young bien déterminé Σ_α et, à l'aide de ce diagramme Σ_α, on a construit l'élément h_α de l'algèbre de groupe*

$A = A_{S_n}$:

$$h_\alpha = \sum_{p,\, q} \sigma_q pq, \quad p \in P_\alpha, \quad q \in Q_\alpha,$$

$$\sigma_q = \begin{cases} 1 & \textit{si } q \textit{ est une permutation paire,} \\ -1 & \textit{si } q \textit{ est une permutation impaire.} \end{cases}$$

Alors les $I^\alpha = Ah_\alpha$ *sont des sous-espaces invariants relativement à la représentation régulière à gauche* $\tilde{T}$ *du groupe* S_n, *et les restrictions* $\tilde{T}^\alpha$ *de la représentation* $\tilde{T}$ *aux* I^α *forment, pour tous les* α, *un système complet de représentations irréductibles du groupe* S_n.

Démonstration. En vertu des propositions II et III, les représentations $\tilde{T}^\alpha$ et $\tilde{T}^\beta$ ne sont pas équivalentes lorsque $\alpha \neq \beta$. D'autre part, le nombre des α distincts est égal au nombre des classes d'éléments conjugués dans S_n et, par conséquent, coïncide avec le nombre de représentations dans le système complet (voir 3.1 et 3.2).

Le théorème démontré suggère la méthode pratique suivante pour construire un système complet $\tilde{T}$:

1) numéroter dans un ordre quelconque tous les éléments $g_1, \ldots, g_r$ $(r = n\,!)$ du groupe S_n;

2) choisir un schéma de Young α et un diagramme de Young Σ_α;

3) à l'aide du diagramme choisi Σ_α déterminer les groupes P_α, Q_α et l'élément h_α;

4) dans le système d'éléments $g_1 h_\alpha, g_2 h_\alpha, \ldots, g_r h_\alpha$, éliminer chaque élément qui est une combinaison linéaire des éléments précédents; le système qui reste, que nous désignons par

$$a_1 = g_{k_1} h_\alpha, \quad a_2 = g_{k_2} h_\alpha, \quad \ldots, \quad a_{n_\alpha} = g_{n_\alpha} h_\alpha, \quad k_1 = 1,$$

forme une base dans $I^\alpha = Ah_\alpha$;

5) par conséquent

$$\tilde{T}(g)\, a_j = g a_j = \sum_{s=1}^{n_\alpha} t_{sj}(g)\, a_s, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.5.6}$$

et cette formule détermine les éléments matriciaux de la représentation $\tilde{T}^\alpha$. Si l'on applique à $a_1, \ldots, a_{n_\alpha}$ le procédé d'orthogonalisation relativement au produit scalaire dans $L^2(S_n)$, alors on obtient une base orthonormée dans I^α, relativement à laquelle la matrice de la représentation $\tilde{T}^\alpha$ est unitaire. Pour ce qui concerne le calcul effectif des éléments matriciaux de la représentation $\tilde{T}^\alpha$, voir V. Moltchanov [1*].

3.6. Caractères des représentations irréductibles d'un groupe symétrique. Posons

$$\chi_\alpha = \chi_{\tilde{T}^\alpha} \tag{3.6.1}$$

et trouvons les expressions pour χ_α à l'aide du symétrisateur h_α. Démontrons préalablement la proposition suivante:

I. *Le nombre* μ_α *qui figure dans la relation* (3.4.9), *vérifie la formule*

$$\mu_\alpha = n!/n_\alpha, \tag{3.6.2}$$

où n_α *est la dimension de la représentation* $\tilde{T}^\alpha$.

Démonstration. Soit C_α un opérateur linéaire dans A déterminé par l'égalité

$$C_\alpha a = ah_\alpha. \tag{3.6.3}$$

Il est clair que

$$C_\alpha A = I^\alpha \tag{3.6.4}$$

et en vertu de (3.4.9) $C_\alpha ah_\alpha = ah_\alpha^2 = \mu ah_\alpha = \mu_\alpha ah_\alpha$, de sorte que

$$C_\alpha = \mu_\alpha 1 \quad \text{sur} \quad I^\alpha. \tag{3.6.5}$$

Choisissons maintenant une base quelconque $a_1, \ldots, a_p$ dans I^α et complétons-la jusqu'à une base $a_1, \ldots, a_{n!}$ dans A ; en vertu de (3.6.4) et (3.6.5) la matrice c_α de l'opérateur C_α dans cette base est de la forme

$$c_\alpha = \begin{Vmatrix} \mu_\alpha 1_\alpha & * \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

où 1_α est la matrice unité d'ordre n_α. Alors

$$\operatorname{tr} C_\alpha = \mu_\alpha n_\alpha. \tag{3.6.6}$$

D'autre part, (3.6.3) signifie que

$$(C_\alpha a)(g) = \sum_{g_1} a(g_1)\, h_\alpha(g_1^{-1}g),$$

i.e. C_α est une transformation linéaire des variables $a(g)$, $a \in G$, de matrice $c_\alpha(g_1, g) = h_\alpha(g_1^{-1}g)$. Par conséquent

$$\operatorname{tr} C_\alpha = \sum_g c_\alpha(g, g) = \sum_g h_\alpha(g^{-1}g) = \sum_g h_\alpha(e) = \sum_g 1 = n! \tag{3.6.7}$$

(voir (3.4.1a)). La comparaison des deuxièmes membres de (3.6.6) et (3.6.7) nous amène à la formule (3.6.2).

Il découle de la formule (3.6.2) que $\mu_\alpha > 0$. Posons

$$e_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha} h_\alpha = \frac{n_\alpha}{n!} h_\alpha. \tag{3.6.8}$$

II. *L'élément* e_α *est un idempotent dans* I^α.

Démonstration. On a évidemment $e_\alpha \in I^\alpha$ et $e_\alpha \neq 0$; en outre, en vertu de (3.4.9) et (3.6.8)

$$e_\alpha^2 = \frac{1}{\mu_\alpha^2} h_\alpha^2 = \frac{1}{\mu_\alpha^2} \mu_\alpha h_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha} h_\alpha = e_\alpha.$$

THÉORÈME 1. *Le caractère χ_α d'une représentation irréductible T^α du groupe S_n s'exprime en termes du symétrisateur h_α par la formule*

$$\chi_\alpha(g) = \frac{n_\alpha}{n!} \sum_{g_1} h_\alpha(g_1^{-1} g^{-1} g_1), \tag{3.6.9}$$

où n_α est la dimension de la représentation T^α.

L'assertion du théorème découle immédiatement de (2.8.8) et (3.6.8), puisque $I^\alpha = Ah_\alpha = Ae_\alpha$.

Donnons encore des formules qui expriment explicitement χ_α et n_α à l'aide des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ qui définissent le schéma α.

Remarquons tout d'abord que $\chi_\alpha(g)$ dépend seulement de la classe des éléments conjugués qui contient g. Par conséquent, en désignant cette classe par la lettre β, nous pouvons poser

$$\chi_\alpha(g) = \chi_\alpha(\beta) \quad \text{si} \quad g \in \beta.$$

D'autre part, supposons que g contient β_1 cycles de longueur 1, β_2 cycles de longueur 2, . . ., β_q cycles de longueur q, de sorte que

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + q\beta_q = n. \tag{3.6.10}$$

La classe β se définit entièrement par les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$; nous noterons ce fait sous la forme

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q). \tag{3.6.11}$$

L'étude de la formule (3.6.9) *) amène aux résultats suivants:

THÉORÈME 2. *La dimension n_α d'une représentation irréductible T^α du groupe S_n qui correspond au schéma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ est donnée par la formule*

$$n_\alpha = n! \frac{D_\alpha}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_h!}, \tag{3.6.12}$$

où

$$D_\alpha = \prod_{p<q} (l_p - l_q), \tag{3.6.13a}$$

$$l_1 = \alpha_1 + (h-1),\ l_2 = \alpha_2 + (h-2), \ldots, l_h = \alpha_h, \tag{3.6.13b}$$

tandis que les caractères χ_α de la représentation T^α vérifient l'identité

$$\sigma_\beta \,|\xi^{h-1}, \ldots, 1| = \sum_\alpha \chi_\alpha(\beta)\,|\xi^{l_1}, \ldots, \xi^{l_h}| \tag{3.6.14}$$

relativement à $\xi_1, \ldots, \xi_h$.

---

*) La démonstration détaillée de cette formule ainsi que celle du théorème 2 est donnée dans le livre de H. Weyl [1], chapitre VII.

Ici

$$\sigma_\beta = (\xi_1 + \ldots + \xi_h)^{\beta_1} (\xi_1^2 + \ldots + \xi_h^2)^{\beta_2} \ldots (\xi_1^q + \ldots \xi_h^q)^{\beta_q}, \qquad (3.6.15)$$

$$|\xi^{p_1} \ldots \xi^{p_h}| = \begin{vmatrix} \xi_1^{p_1} \ldots \xi_1^{p_h} \\ \xi_2^{p_1} \ldots \xi_2^{p_h} \\ \ldots\ldots \\ \xi_h^{p_1} \ldots \xi_h^{p_h} \end{vmatrix}$$

et la somme (3.6.14) *est effectuée sur tous les* α *avec un* h *donné, i.e. sur tous les* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ *tels que*

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n.$$

Donnons aussi la règle récurrente suivante de calcul des caractères χ_α:

THÉORÈME 3. *Si la classe* β *contient un cycle de longueur* v, *et* β^1 *est la classe que l'on obtient de* β *en éliminant ce cycle, alors*

$$\chi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_h}(\beta) = \chi_{\alpha_1 - v, \alpha_2, \ldots, \alpha_h}(\beta) + \chi_{\alpha_1, \alpha_2 - v, \ldots, \alpha_h}(\beta^1) + \ldots \qquad (3.6.16)$$

Ici, lorsque les indices $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_h$ *de* χ *quelconques du deuxième membre ne vérifient pas la condition*

$$\alpha'_1 \geqslant \alpha'_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_h \geqslant 0, \qquad (3.6.17)$$

il faut procéder de la manière suivante:

1) *si c'est la dernière inégalité de la condition* (3.6.17) *qui n'est pas vérifiée, i.e.* $\alpha'_h < 0$, *alors le caractère* χ *correspondant doit être éliminé;*

2) *si la condition* (3.6.17) *n'est pas vérifiée à une place antérieure, de sorte que*

$$\alpha'_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_{j-1} \geqslant \alpha'_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_h, \quad \textit{mais} \quad \alpha'_j < \alpha'_{j+1},$$

il faut procéder de même pour $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j = 1$ *et remplacer*

$$\chi_{\ldots \alpha'_j \alpha'_{j+1} \ldots} \qquad (3.6.18)$$

par

$$-\chi_{\ldots \alpha'_{j-1} \alpha'_{j+1} \ldots}$$

pour $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j \geqslant 2$.

Dans le dernier cas ou bien le « défaut » $\alpha'_j < \alpha'_{j+1}$ *pour les nouveaux* α'_j *dans* (3.6.18) *s'élimine, ou bien* $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j$ *décroît de* 1 *).

3.7. Décomposition d'une représentation régulière à gauche du groupe S_n en ses représentations irréductibles. Décomposons d'abord

*) Sous cette forme générale, cette règle a été indiquée par Murnaghan (voir F. Murnaghan [1]).

la représentation régulière à gauche $\widetilde{T}$ du groupe S_n en représentations multiples de représentations irréductibles. Posons pour cela

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} g_1 h_\alpha g_1^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{g_1} g_1 e_\alpha g_1^{-1}, \tag{3.7.1}$$

où h_α est construit à partir du diagramme donné Σ_α (voir (3.4.1)) tandis que $\mu = \mu_\alpha = n_\alpha/n!$ (voir 3.6.2)). Il est évident que (3.7.1) signifie

$$\varepsilon_\alpha(g) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} h_\alpha(g_1^{-1} g g_1) = \frac{1}{\mu} \sum_{g_1} e_\alpha(g_1^{-1} g g_1); \tag{3.7.2}$$

la comparaison avec (3.6.9) donne la formule

$$\varepsilon_\alpha(g) = \frac{1}{\mu_\alpha} \chi_\alpha(g^{-1}). \tag{3.7.3}$$

I. *Les éléments ε_α possèdent les propriétés suivantes:*

1) $\varepsilon_\alpha \neq 0$;

2) ε_α *est un idempotent hermitien*;

3) ε_α *appartient au centre $Z(A_{S_n})$ de l'algèbre A_{S_n}*;

4) $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 0$ *et* $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = 0$ *si* $\alpha \neq \beta$;

5) *les ε_α qui correspondent à tous les schémas α forment une base dans $Z(A_{S_n})$.*

Démonstration. 1) En vertu de (3.4.1) et (3.7.1)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} \sum_{p,q} \sigma_q g_1^{-1} p q g_1. \tag{3.7.4}$$

Le coefficient $\varepsilon_\alpha(e)$ dans (3.7.4) est la somme de tous les termes pour lesquels $g_1^{-1} p q g_1 = e$, i.e. $pq = e$, ce qui est possible seulement lorsque $p = e$, $q = e$. Par conséquent

$$\varepsilon_\alpha(e) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g} \sigma_e g^{-1} g = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g} 1 = \frac{n!}{\mu^2} = \frac{n_\alpha^2}{n!}, \tag{3.7.5}$$

et donc $\varepsilon_\alpha \neq 0$.

2) Puisque h_α est hermitien (voir III de 3.4), on a par définition de l'involution (voir (2.7.2))

$$\varepsilon_\alpha^* = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g} (g^{-1} h_\alpha g)^* = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g} g^{-1} h_\alpha^* g = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g} g^{-1} h_\alpha g = \varepsilon_\alpha,$$

i.e. ε_α est hermitien.

3) ε_α appartient à $Z(A_{S_n})$ en vertu du théorème 2 de 2.9 et (3.7.2).

4) Remarquons avant tout que $g_1^{-1} h_\alpha g_1$ et $g_2^{-1} h_\beta g_2$ sont les éléments h_α et h_β correspondant aux diagrammes $g_1^{-1}\Sigma_\alpha$ et $g_2^{-1}\Sigma_\beta$; donc, lorsque $\alpha \neq \beta$, on a en vertu de IV de 3.4

$$g_1^{-1} h_\alpha g_1 \cdot g_2^{-1} h_\beta g_2 = 0. \tag{3.7.6}$$

En calculant dans (3.7.6) la somme sur g_1 et g_2, on obtient

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \sum_{g_1} \sum_{g_2} g_1^{-1} h_\alpha g_1 g_2^{-1} h_\beta g_2 = 0 \text{ lorsque } \alpha \neq \beta. \quad (3.7.7)$$

Mais alors en vertu de (3.7.7) et de la propriété 3) on a pour $\alpha \neq \beta$

$$(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = n^{-1} f_0 (\varepsilon_\beta^* \varepsilon_\alpha) = n^{-1} f_0 (\varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha) = n^{-1} f_0 (0) = 0. \quad (3.7.8)$$

5) En vertu de (3.7.8) les ε_α qui correspondent à des α distincts sont deux à deux orthogonaux, et en outre $\varepsilon_\alpha \neq 0$ d'après la propriété 1). Par conséquent les ε_α sont des éléments du centre $Z(A_{S_n})$ linéairement indépendants. Leur nombre est égal au nombre des classes d'éléments conjugués dans le groupe et, par conséquent, à la dimension du centre $Z(A_{S_n})$. Ainsi, les ε_α forment une base de $Z(A_{S_n})$.

§ 4. Représentations induites

4.1. Définition et propriétés élémentaires de la représentation induite. Soient G un groupe fini, H son sous-groupe, T la représentation du groupe H dans l'espace V. Définissons une représentation U du groupe G de la manière suivante:

1) l'espace de la représentation U est l'ensemble $\mathcal{V}$ des fonctions $f(g)$ sur le groupe G à valeurs dans V et telles que

$$f(hg) = T(h) f(g) \text{ quels que soient } h \in H, \ g \in G; \quad (4.1.1)$$

2) les opérateurs de la représentation U agissent dans l'espace $\mathcal{V}$ selon la formule $[U(g_0) f](g) = f(gg_0)$.

Montrons que l'application $g \to U(g)$ est effectivement une représentation du groupe G.

Notons avant tout que $U(g)$ agit dans $\mathcal{V}$, i.e. si $f \in \mathcal{V}$, on a également $U(g) f \in \mathcal{V}$. En effet, soit $f \in \mathcal{V}$, i.e. on a la relation (4.1.1); posons $U(g_0) f(g) = f(gg_0) = \varphi(g)$. Alors $\varphi(hg) = f((hg) g_0) = f(h(gg_0)) = T(h) f(gg_0) = T(h) \varphi(g)$, de sorte que $\varphi \in \mathcal{V}$. Il est également évident que $U(g_0)$ est un opérateur linéaire dans $\mathcal{V}$ pour chaque $g_0 \in G$ et que $U(e) = 1$. Enfin $[U(g_0) U(g_1) f](g) = U(g_0) f(gg_1) = f((gg_0) g_1) = f(g(g_0 g_1)) = U(g_0 g_1) f(g)$, i.e. $U(g_0) U(g_1) = U(g_0 g_1)$ quels que soient $g_0, g_1 \in G$.

La représentation U déterminée par les conditions 1), 2) s'appelle *représentation du groupe G induite par la représentation du sous-groupe H*; on la désigne par U^T, ou $_H U^T$, ou bien par $_H U_G^T$ lorsqu'il est nécessaire d'indiquer le sous-groupe H et le groupe G.

I. *La dimension de la représentation $_H U^T$ est égale au produit de la dimension de l'espace V et de l'index du sous-groupe H dans G.*

En effet, choisissons un représentant dans chaque classe de la forme Hg; soit k le nombre de ces classes (i.e. k est l'index *)) de H

*) Voir 1.2, chapitre I.

dans G, et soient $g_1, \ldots, g_k$ les représentants des classes deux à deux distinctes Hg_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Considérons l'application p de l'espace $\mathcal{V}$ dans la somme directe de k copies de l'espace V définie par la formule $f \to \{f(g_1), \ldots, f(g_k)\}$. La fonction $f \in \mathcal{V}$ se détermine uniquement par la condition $f(hg) = T(h) f(g)$ sur une classe d'équivalence de la forme Hg_0 lorsqu'on connaît la valeur de f au point g_0; par conséquent, l'application p est bijective et, évidemment, linéaire. Il en découle que $\dim \mathcal{V} = k \dim V$.

II. *${}_HU^T$ est équivalente à T lorsque $H = G$.*

En effet, soit $H = G$; alors G contient une seule classe d'équivalence Hg, et on peut prendre l'élément $g = e$ pour représentant de cette classe. L'application $p\colon f \to f(e)$ définit dans ce cas un isomorphisme des espaces $\mathcal{V}$ et V; posons $p^{-1}\xi = f_\xi(g)$ pour $\xi \in V$ de sorte que $f_\xi(e) = \xi$. Cet isomorphisme applique la représentation U dans la représentation T par laquelle U est induite. En effet, $p^{-1}(\xi) = f_\xi(g) = T(g) f_\xi(e) = T(g)\xi$ pour $\xi \in V$; par conséquent $\{[p^{-1}T(g_0)p] f\}(g) = p^{-1}T(g_0) f(e) = p^{-1}f(g_0) = T(g) f(g_0) =$ $= T(g) T(g_0) f(e) = f(gg_0)$, i.e. $p^{-1}T(g_0)p = U(g_0)$.

III. *Si $H = \{e\}$ et T est la représentation unité du groupe H, alors ${}_HU^T$ est équivalente à la représentation régulière à droite du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $H = \{e\}$, et T la représentation unité du groupe H. Dans ce cas l'espace $\mathcal{V}$ est constitué par toutes les fonctions numériques sur G, et la représentation U^T qui agit suivant la formule $U(g_0) f(g_0) = f(gg_0)$ est une représentation régulière à droite.

4.2. Théorème de transitivité d'induction. *Soient K, H, deux sous-groupes du groupe G, $K \subset H$. Soit T une représentation du sous-groupe K dans l'espace V, S la représentation du groupe H induite par T. Alors les représentations ${}_KU_G^T$ et ${}_HU_G^S$ sont équivalentes, i.e. $U^{U^T} \sim U^T$.*

D é m o n s t r a t i o n. L'espace de la représentation ${}_HU_G^S$ est constitué par les fonctions F sur le groupe G qui prennent leurs valeurs dans l'espace de la représentation S et vérifient la condition: $F(hg) = S(h) F(g)$ quels que soient $h \in H$, $g \in G$; mais pour chaque $g \in G$, la « valeur » $F(g)$ est une fonction sur H à valeurs dans V telle que $\{F(g)\}(kh) = T(k)\{F(g)\}(h)$. Par conséquent, on peut considérer comme éléments de l'espace de la représentation ${}_HU_G^S$ les fonctions f de deux variables sur $G \times H$ à valeurs dans V telles que $f(h_0g, h) = f(g, hh_0)$ quels que soient $h_0, h \in H$, $g \in G$, et $f(g, kh) = T(k) f(g, h)$ quels que soient $k \in K$, $h \in H$, $g \in G$. Considérons l'application p, définie par la formule $(pf)(g) = f(g, e)$ pour $f \in \mathcal{V}^S$ de l'espace $\mathcal{V}^S$ de la représentation ${}_HU_G^S$ dans l'espace

$\mathscr{V}^T$ de la représentation ${}_K U_G^T$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que p est un isomorphisme de l'espace $\mathscr{V}'^S$ sur l'espace $\mathscr{V}^T$ qui réalise l'équivalence des représentations ${}_H U_G^S$ et ${}_K U_G^T$.

4.3. Théorème de dualité de Frobenius. *Soient T, L des représentations irréductibles du groupe G et de son sous-groupe H respectivement. La multiplicité de la représentation T dans U^L est égale à celle de la représentation L dans $T\,|_H$.*

Démonstration. Montrons que l'espace linéaire $\mathrm{Hom}\,(T,\ U^L)$ des opérateurs d'entrelacement de T avec U^L est isomorphe à l'espace linéaire $\mathrm{Hom}\,(T\,|_H,\ L)$ des opérateurs d'entrelacement de $T\,|_H$ avec L:

$$\mathrm{Hom}\,(T\,|_H,\ L) \sim \mathrm{Hom}\,(T,\ U^L) \qquad (4.3.1)$$

quelles que soient T et L. Lorsque T et L sont irréductibles, les dimensions de ces espaces sont égales aux multiplicités considérées dans le théorème, de sorte que la formule (4.3.1) démontre le théorème. Vérifions la formule (4.3.1). Supposons qu'un opérateur linéaire K de l'espace V_T de la représentation T dans l'espace V_{U^L} de la représentation U^L est un entrelacement entre T et U^L, i.e. $KT\,(g) = U^L\,(g)\,K$ quel que soit $g \in G$. Faisons correspondre à l'opérateur K l'opérateur $\widetilde{K}$ qui agit de l'espace V_T de la représentation $T\,|_H$ dans l'espace V_L de la représentation L, en posant $\widetilde{K}\xi = (K\xi)\,(e)$, où $K\xi$ est une fonction sur G à valeurs dans V_L qui correspond à $\xi \in V_T$. Puisque $KT\,(h) = U^L\,(h)\,K$ pour $h \in H$, on a $\widetilde{K}T\,(h)\,\xi = (K\,(T\,(h)\,\xi))\,(e) = (U^L\,(h)\,K\xi)\,(e) = (K\xi)\,(h) = L\,(h)\,(K\xi)\,(e) = L\,(h)\,\widetilde{K}\xi$ pour tous les $\xi \in H_T$, i.e. $\widetilde{K}$ est un entrelacement de $T\,|_H$ avec L, et l'application $K \to \widetilde{K}$ détermine une application de $\mathrm{Hom}\,(T,\ U^L)$ dans $\mathrm{Hom}\,(T\,|_H,\ L)$; comme $(K\xi)\,(g) = (U^L\,(g)\,K\xi)\,(e) = (KT\,(g)\,\xi)\,(e) = \widetilde{K}T\,(g)\,\xi$, $\widetilde{K}$ est déterminé par K, et l'application $K \to K$ est un isomorphisme.

4.4. Caractère d'une représentation induite.

Théorème. *Le caractère χ d'une représentation induite ${}_H U_G^T$ se détermine par la formule*

$$\chi\,(g) = \sum_{\{\delta_i:\ \delta_i g \in H\delta_i\}} \psi\,(\delta_i g \delta_i^{-1}), \qquad (4.4.1)$$

où $\{\delta_i\}$ est une famille de représentants des classes d'équivalence de la forme Hg_0, $g_0 \in G$, et ψ est le caractère de la représentation T.

Démonstration. Soit $\{e_j\}$ une base dans l'espace V de la représentation T. Alors les fonctions

$$f_{ij}\,(g) = \begin{cases} T\,(h)\,e_j & \text{si } g = h\delta_i,\ h \in H, \\ 0 & \text{si } g \notin H\delta_i \end{cases} \qquad (4.4.2)$$

forment une base dans l'espace $\mathscr{V}$ de la représentation U^T. En effet, $\mathscr{V}$ est la somme directe des sous-espaces $\mathscr{V}_i = \{f\colon f(g) = 0 \text{ si } g \notin H\delta_i\}$; d'autre part les fonctions $f_{ij}(g)$ pour un i donné forment une base de $\mathscr{V}_i$. Si $g = h\delta_k$, alors pour $\delta_k g_0 = \tilde{h}\delta_q$, $\tilde{h} \in H$, on a

$$U^T(g_0) f_{ij}(g) = f_{ij}(gg_0) = f_{ij}(h\delta_k g_0) = f_{ij}(h\tilde{h}\delta_q) =$$

$$= \begin{cases} T(h)T(\tilde{h})e_j & \text{si } q = i \\ 0 & \text{si } q \neq i. \end{cases} \qquad (4.4.3)$$

Ainsi, pour $g = h\delta_k$, le coefficient auprès de $f_{ij}(g)$ dans la décomposition de $U^T(g_0) f_{ij}(g)$ relativement à la base $\{f_{ij}\}$ (i.e. l'élément diagonal correspondant de la matrice de l'opérateur $U^T(g_0)$ relativement à la base (4.4.2)) peut être non nul seulement dans le cas où $\delta_k g_0 = \tilde{h}\delta_i$, i.e. lorsque $\delta_k g_0 \in H\delta_i$. Posons $T(\tilde{h})e_j = \sum_r \alpha_{rj}(\tilde{h}) e_r$; alors en vertu de (4.4.2) et (4.4.3), on a $U^T(g_0) f_{ij}(g) = \sum_k \sum_r \alpha_{rj}(\tilde{h}) f_{kr}(g)$ pour $g = h\delta_k$, $\delta_k g_0 \in H\delta_i$; par conséquent, le coefficient auprès de $f_{ij}(g)$ est égal à $\alpha_{jj}(\tilde{h})$ pour $g = h\delta_k$, $\delta_i g_0 = \tilde{h}\delta_i$, $\tilde{h} \in H$. Par conséquent

$$\chi(g_0) = \sum_{\{\delta_i:\ \delta_i g_0 \in H\delta_i\}} \sum_j \alpha_{jj}(\tilde{h}). \qquad (4.4.4)$$

Puisque $\sum_j \alpha_{jj}(\tilde{h}) = \psi(\tilde{h})$ et $\tilde{h} = \delta_i g_0 \delta_i^{-1}$, la formule (4.4.1.) se déduit immédiatement de (4.4.4).

4.5. Restriction d'une représentation induite à un sous-groupe.

THÉORÈME. *Soient G un groupe fini, H et K ses sous-groupes et L la représentation du groupe H. Posons $G_g = K \cap g^{-1}Hg$, où $g \in G$. Soit T^g la représentation du groupe K induite par la représentation $L^g\colon x \to L(gxg^{-1})$ du sous-groupe G_g. Alors la représentation T^g est bien déterminée (à l'équivalence près) par la classe double $HgK = D(g)$ qui contient g. Désignons T^g par T^D. La restriction de la représentation U^L à K est la somme directe des représentations T^D (la somme étant calculée sur l'ensemble des classes doubles de la forme HgK, $g \in G$).*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $g_1 = h_0 g k_0$; alors

$$G_{g_1} = K \cap g_1^{-1}Hg_1 = K \cap k_0^{-1}g^{-1}h_0^{-1}Hh_0gk_0 = k_0^{-1}G_gk_0,$$

i.e. G_{g_1} et G_g sont conjugués dans K par un automorphisme intérieur (déterminé par l'élément k_0). Si $\delta_1, \ldots, \delta_m$ est une famille de représentants des classes deux à deux disjointes de la forme $G_g g_0$, $g_0 \in G$, alors les éléments $k_0^{-1}\delta_i k_0$, $i = 1, \ldots, m$, constituent l'ensemble des représentants des classes deux à deux disjointes

de la forme $G_{g_1}g_0$, $g_0 \in G$. Puisque chaque caractère est constant sur les classes d'éléments conjugués, nous tirons de la formule (4.4.1) l'équivalence des caractères des représentations T^g et T^{g_1}; par conséquent, les représentations T^g et T^{g_1} sont équivalentes.

Soit $\mathcal{V}_j$ le sous-espace de l'espace $\mathcal{V}$ de la représentation U^L constitué par toutes les fonctions nulles en dehors de Hg_jK, où $g_1, \ldots, g_l$ est une famille complète de représentants des classes doubles deux à deux distinctes HgK, $g \in G$. Il est évident que chaque sous-espace $\mathcal{V}_j$ est invariant relativement aux opérateurs $U^L(k)$, $k \in K$, et la représentation $U^L|_K$ est la somme directe des sous-représentations déterminées par les sous-espaces $\mathcal{V}_j$, $j = 1, \ldots, l$, puisque dans les formules $f(hg) = L(h) f(g)$ et $U^L(k) f(g) = f(gk)$, $h \in H$, $k \in K$, figurent les éléments d'une même classe double HgK.

Montrons que la sous-représentation $U^L|_K$ dans l'espace $\mathcal{V}_j$ est équivalente à la représentation du groupe K induite par la représentation T^D, où $D = Hg_jK$. Soit p une application qui fait correspondre à chaque fonction f de l'espace $\mathcal{V}_j$ la fonction $p(f)$ sur le groupe K à valeurs dans l'espace V de la représentation L suivant la formule $p(f)(k) = f(g_jk)$. Une fonction donnée φ sur K est l'image d'une fonction $f \in \mathcal{V}_i$ par l'application p, si et seulement s'il existe une fonction $\overline{\varphi}$ sur la classe D telle que $\overline{\varphi}(g_ik) = \varphi(k)$ et pour la fonction $\overline{\varphi}$ on a la relation $\overline{\varphi}(hh_0g_ik) \equiv L(h)\overline{\varphi}(h_0g_ik)$; pour que cette dernière relation soit satisfaite pour tous les $h, h_0 \in H$ et $k \in K$, il faut et il suffit qu'elle soit satisfaite pour $h_0 = e$ et pour $hg_ik \in g_iK$. Supposons que $hg_ik = g_i\tilde{k}$; alors on doit avoir la relation $\overline{\varphi}(hg_ik) = L(h)\varphi(k) = \varphi(\tilde{k})$; mais $g_i^{-1}hg_i = \tilde{k}k^{-1}$, i.e. $\tilde{k}k^{-1} \in G_{g_i}$; ici on a $L_{g_i}(\tilde{k}k^{-1}) = L(g_i\tilde{k}k^{-1}g_i^{-1}) = L(h)$. Ainsi, la fonction φ sur K est l'image par l'application p d'une certaine fonction $f \in \mathcal{V}_i$ si et seulement si φ est située dans l'espace de la représentation induite $T^{g_i} = {}_{G_{g_i}}U^L_K$. On vérifie immédiatement que p est un isomorphisme qui réalise l'équivalence de la représentation T^{g_i} et de la sous-représentation correspondante de la représentation $U^L|_K$ dans l'espace $\mathcal{V}_i$.

4.6. Représentations induites d'un produit direct de groupe.

THÉORÈME. *Soient G_1, G_2 des groupes finis; H_1, H_2 des sous-groupes de G_1, G_2 respectivement, et L_1, L_2 des représentations des groupes H_1, H_2 dans les espaces V_1, V_2. Alors ${}_{H_1\times H_2}U^{L_1\otimes L_2}_{G_1\times G_2}$ est équivalente à ${}_{H_1}U^{L_1}_{G_1} \otimes {}_{H_2}U^{L_2}_{G_2}$.*

En effet, on vérifie facilement que l'opérateur d'isomorphisme naturel entre l'espace des fonctions sur $G_1 \times G_2$ à valeurs dans $V_1 \otimes V_2$ et le produit tensoriel de l'espace des fonctions sur G_1 à valeurs dans V_1 par l'espace des fonctions sur G_2 à valeurs dans V_2

réalise l'équivalence des représentations ${}_{H_1\times H_2}U_{G_1\times G_2}^{L_1\otimes L_2}$ et ${}_{H_1}U_{G_1}^{L_1}\otimes$ $\otimes\ {}_{H_2}U_{G_2}^{L_2}$.

4.7. Produit tensoriel et représentations induites. Le produit tensoriel de deux représentations T_1, T_2 d'un groupe G peut être envisagé comme la restriction de la représentation $T_1\otimes T_2$ du groupe $G\times G$ au sous-groupe diagonal $\tilde{G}=\{(g, g): g\in G\}\subset$ $\subset G\times G$; par conséquent, on peut se servir du théorème de 4.5 pour obtenir des données sur la décomposition des produits tensoriels.

THÉORÈME (théorème sur le produit tensoriel). *Soient G un groupe fini; H et K des sous-groupes du groupe G, et T, S des représentations des groupes H et K respectivement. Soit G_{g_1,g_2} un sous-groupe du groupe G de la forme $g_1^{-1}Hg_1\cap g_2^{-1}Kg_2$, $g_1, g_2\in G$. Soient $T^{g_1}: x\to$ $\to T(g_1xg_1^{-1})$, $S^{g_2}: x\to S(g_2xg_2^{-1})$ des représentations du groupe G_{g_1,g_2}; L^{g_1,g_2} le produit tensoriel des représentations T^{g_1} et S^{g_2}; $U^{L^{g_1,g_2}}$ la représentation induite correspondante du groupe G. Alors, $U^{L^{g_1,g_2}}$ se détermine entièrement (à l'équivalence près) par la classe double $Hg_1g_2^{-1}K$ qui contient $g_1g_2^{-1}$, et la somme directe des représentations $U^{L^{g_1,g_2}}$ (sur les classes doubles de la forme HgK) est équivalente à $U^T\otimes U^S$.*

Pour la démonstration on peut se servir du théorème de 4.5 en l'appliquant à la représentation $U_{G\times G}^{T\otimes S}$ (voir (4.6), induite du sous-groupe $H\times K$, en prenant ensuite la restriction à $\tilde{G}$. Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur.

4.8. Théorème d'imprimitivité. Soient T la représentation d'un groupe G et H un sous-groupe de G. Nous dirons que *T est muni d'un système d'imprimitivité* à base G/H s'il existe une application P de l'ensemble de tous les sous-ensembles de G/H dans l'ensemble des projecteurs dans l'espace V de la représentation T telle que $P(\varnothing)=0$, $P(G/H)=I$; si E, $F\subset G/H$ et $E\cap F=\varnothing$, alors $P(E\cup F)=P(E)+P(F)$; $P(E\cap F)=P(E)P(F)$ pour tous les E, $F\subset G/H$, et $P(Eg)=T^{-1}(g)P(E)T(g)$ quel que soit $E\subset G/H$.

THÉORÈME (critère d'inductibilité d'une représentation). *Une représentation T d'un groupe G est équivalente à une représentation de la forme ${}_HU_G^L$ pour un sous-groupe donné H et une certaine représentation L du sous-groupe H si et seulement si T admet un système d'imprimitivité à base G/H.*

La démonstration est donnée dans le livre de J.-P. S e r r e [2], par exemple.

EXEMPLES ET EXERCICES

1. Démontrer à l'aide du théorème de 4.3 que l'ordre d'un groupe est égal à la somme des carrés des dimensions de ses représentations irréductibles.

2. Critère d'irréductibilité d'une représentation induite.

Soient G un groupe fini, H son sous-groupe, et T une représentation irréductible du groupe H. Montrer que la représentation U^T est irréductible si et seulement si pour tous les $g \notin H$ les représentations du groupe $H^g = g^{-1}Hg \cap H$, déterminées par les formules $h \to T(ghg^{-1})$ et $h \to T(h)$, ne possèdent aucune composante irréductible commune.

3. Soient G un groupe fini, et H son sous-groupe. Montrer que la représentation du groupe G, induite par la représentation unité du groupe H, contient la représentation unité du groupe G.

4. Soient G un groupe fini, H, K des sous-groupes du groupe G, et T, S des représentations des groupes H, K respectivement. Supposons que ${}_HU^T$ et ${}_KU^S$ sont irréductibles. Alors ${}_HU^T \sim {}_KU^S$ si et seulement s'il existe un élément $g \in G$ tel que les représentations $h \to T(ghg^{-1})$ et $h \to S(h)$ du sous-groupe $g^{-1}Hg \cap K$ ont une composante irréductible commune.

5. Soient G le groupe de matrices de la forme $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ à éléments appartenant à un corps fini, et H le sous-groupe des matrices de la forme $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{Vmatrix}$. Trouver les représentations du groupe G induites par les représentations unidimensionnelles du groupe H et voir si elles sont irréductibles (voir également le § 5).

§ 5. Représentations du groupe $SL(2, \mathbf{F}_q)$

5.1. Corps. L'ensemble K s'appelle *corps*, si K est muni de l'*addition* et de la *multiplication*, i.e. si à chaque couple ordonné d'éléments (x, y) de K on a fait correspondre l'élément $x + y \in K$ appelé *somme* de x et y, et l'élément $xy \in K$ appelé *produit* de x et y, de sorte que:

1) K est un groupe commutatif relativement à l'addition (ce groupe est appelé groupe additif du corps K);

2) si 0 est l'élément neutre relativement à l'addition, alors l'ensemble $K^* = K \setminus \{0\}$ est un groupe commutatif relativement à la multiplication (ce groupe s'appelle groupe multiplicatif du corps K);

3) la multiplication est *distributive* relativement à l'addition, i.e. quels que soient $x, y, z \in K$, on a l'égalité

$$x(y + z) = (xy) + (xz).$$

Voici des exemples simples de corps: l'ensemble **R** des nombres réels et l'ensemble **C** des nombres complexes, munis de l'addition et de la multiplication usuelles.

Envisageons encore un exemple de corps, à savoir un corps à p éléments, où p est un entier naturel premier. Dans l'ensemble des nombres 0, 1, . . ., $p - 1$ définissons la « somme » des nombres m et n comme le reste obtenu en divisant par p la somme usuelle $m + n$, et le « produit » comme le reste de la division du produit usuel mn par p. Le lecteur montrera sans peine que les opérations introduites vérifient les conditions 1) à 3). Le corps obtenu s'appelle *corps des résidus modulo p*; on le désigne par $\mathbf{F}_p$. Ce corps est un exemple de *corps fini*, i.e. de corps à un nombre fini d'éléments.

On peut montrer (voir, par exemple, Van der Waerden [1]) que si un corps fini K contient q éléments, alors $q = p^n$, où p est un nombre premier, et n un nombre naturel. Le nombre p s'appelle *caractéristique du corps K*. Un corps avec $q = p^n$ éléments se détermine uniquement à un *isomorphisme* près; ce corps sera désigné par $\mathbf{F}_q$.

Le groupe multiplicatif du corps $\mathbf{F}_q$ est *cyclique*. Si q est impair, alors le corps $\mathbf{F}_q$ contient $(q + 1)/2$ éléments u de la forme $u = v^2$, où $v \in \mathbf{F}_q$; ces éléments sont appelés *carrés dans le corps* $\mathbf{F}_q$. L'élément générateur du groupe cyclique du corps $\mathbf{F}_q$ n'est pas un carré.

5.2. « Cercles» dans un corps fini. Fixons dans le corps $\mathbf{F}_q$ un élément ε qui n'est pas un carré. L'ensemble des couples (x, y), $x, y \in \mathbf{F}_q$, qui satisfont à la condition $x^2 - \varepsilon y^2 = c$ pour un élément donné $c \in \mathbf{F}_q$ s'appelle *cercle dans le corps* $\mathbf{F}_q$. Remarquons que « le cercle de rayon nul », i.e. l'ensemble des couples (x, y) tels que $x^2 - \varepsilon y^2 = 0$, est constitué par l'élément unique (0, 0), car l'élément εy^2 n'est pas un carré lorsque $y \neq 0$, comme ne l'est pas ε.

I. *Le cercle $x^2 - \varepsilon y^2 = 1$ est constitué par $q + 1$ éléments.*

Démonstration. Il est évident que le point $(-1, 0)$ est situé sur le cercle considéré et que $y = 0$ si le point (x, y) appartenant au cercle vérifie la condition $x = -1$. Supposons que (x, y) est situé sur le cercle et $x \neq -1$; posons $t = y/(x + 1)$. Alors nous avons successivement $x^2 - 1 = \varepsilon y^2$, $x + 1 = yt^{-1}$, $x - 1 = (x^2 - 1)/(x + 1) = \varepsilon yt$, $(x - 1)/(x + 1) = \varepsilon t^2$, $x = (1 + \varepsilon t^2)/(1 - \varepsilon t^2)$, $y = t(x + 1) = 2t/(1 - \varepsilon t^2)$. Puisque t est quelconque, le nombre d'éléments distincts du cercle considéré et tels que $x \neq -1$ est égal à q, i.e. le cercle contient $q + 1$ éléments.

II. *Pour tout $c \in \mathbf{F}_q^*$, le cercle $x^2 - \varepsilon y^2 = c$ est constitué par $q + 1$ éléments.*

Pour la démonstration, considérons l'ensemble Θ des matrices de la forme $a = \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$ et telles que $\det a = \sigma^2 - \varepsilon v^2$ est non

nul. Puisque $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 0$ seulement pour $\sigma = v = 0$, l'ensemble Θ contient $q^2 - 1$ éléments. Le lecteur vérifiera sans difficulté que l'ensemble Θ est un groupe relativement à la multiplication des matrices, tandis que l'application det : $a \to \det a$ est un homomorphisme du groupe Θ dans le groupe $\mathbf{F}_q^*$. En vertu de I, le noyau de cet homomorphisme contient $q + 1$ éléments, et donc l'image de l'homomorphisme det contient $(q^2 - 1)/(q + 1) = q - 1$ éléments. Puisque $\mathbf{F}_q^*$ est constitué par $q - 1$ éléments, l'image de l'homomorphisme det coïncide avec $\mathbf{F}_q^*$, i.e. pour tout $c \neq 0$ il existe une classe d'équivalence par le noyau de l'homomorphisme det, qui est envoyée par cet homomorphisme dans le nombre c; puisque le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence est égal au nombre d'éléments dans le noyau de l'homomorphisme, notre assertion est démontrée.

5.3. Définition du groupe $G = SL(2, \mathbf{F}_q)$. Ordre du groupe G et classes d'éléments conjugués dans G. Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de $q = p^n$ éléments, où p est un nombre premier. Désignons par $G = SL(2, \mathbf{F}_q)$ le groupe de toutes les matrices unimodulaires g d'ordre deux, à éléments choisis dans le corps $\mathbf{F}_q$:

$$g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbf{F}_q; \quad ad - bc = 1 \in \mathbf{F}_q.$$

Par la suite, nous allons supposer que $p \neq 2$.

Calculons l'ordre du groupe G et décrivons les classes de ses éléments conjugués.

Si $g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ et $a \in \mathbf{F}_q^*$, alors, pour des b et c quelconques, on peut calculer d de la relation $ad - bc = 1$ en se servant de la formule $d = a^{-1}(1 + bc)$, i.e. dans le cas $a \in \mathbf{F}_q^*$, b et c parcourent l'ensemble $\mathbf{F}_q$ tout entier, et le nombre d'éléments du groupe G vérifiant les conditions avancées est égal à $(q - 1)q^2$. Lorsque $a = 0$, on a $bc = -1$, i.e. $b \in \mathbf{F}_q^*$ et $c = -b^{-1}$; dans ce cas d peut être arbitraire; le nombre de ces éléments du groupe G est égal à $q(q - 1)$. Ainsi, l'ordre du groupe G est égal à $q^2(q - 1) + q(q - 1) = q(q^2 - 1)$.

Cherchons les classes des éléments conjugués du groupe G. Il est évident que $\{e\}$ et $\{-e\}$ sont les classes d'éléments conjugués auxquelles se réduit le centre du groupe G. Pour décrire les autres classes d'éléments conjugués dans G, notons que lorsque M est une classe d'éléments conjugués dans G contenant l'élément $g_0 \in G$, alors M est un espace homogène relativement à l'action du groupe G sur M suivant la formule $h \to ghg^{-1}$, $g \in G$, $h \in M$.

Soit Q un sous-groupe stationnaire correspondant à l'élément g_0, i.e. l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gg_0g^{-1} = g_0$. Le nombre d'éléments dans la classe M est égal à l'index de Q dans G (voir III de 1.8, chapitre I).

Considérons la classe d'éléments conjugués déterminée par l'élément $g_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$, où $\lambda^2 \neq 1$; désignons cette classe par A_λ.

I. *Le nombre des classes A_λ est égal à $(q - 3)/2$; chacune des classes A_λ contient $q(q+1)$ éléments.*

Démonstration. Le sous-groupe stationnaire Q correspondant à la classe A_λ est constitué par les éléments $g \in G$ tels que $gg_\lambda g^{-1} = g_\lambda$, i.e. $gg_\lambda = g_\lambda g$. On vérifie facilement qu'alors le sous-groupe Q est constitué par des matrices diagonales. Par conséquent, Q est un sous-groupe d'ordre $q - 1$, et l'index de Q dans G est égal à $q(q^2 - 1)/(q - 1) = q(q + 1)$. Par conséquent, chaque classe A_λ contient $q(q+1)$ éléments. Le nombre de ces classes est égal à $(q - 3)/2$, puisque g_λ et g_μ ($\lambda, \mu \neq 0$, $\lambda^2 \neq 1$, $\mu^2 \neq 1$) appartiennent à une même classe si et seulement si $\lambda = \mu$ ou $\lambda = \mu^{-1}$.

Considérons les classes d'éléments conjugués déterminées par les éléments $e_1^+ = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $e_\varepsilon^+ = \begin{Vmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $e_1^- = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $e_\varepsilon^- = \begin{Vmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$. Désignons ces quatre classes par $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ respectivement.

II. *Chacune des classes $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ contient $(q^2 - 1)/2$ éléments.*

Démonstration. Le sous-groupe correspondant Q est constitué par les éléments $g \in G$ permutables à e_1^+ (respectivement à e_ε^+, e_1^-, e_ε^-) ; donc le sous-groupe Q, comme on le vérifie aisément, est constitué par toutes les matrices de la forme $\begin{Vmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}$, où $\alpha = \pm 1$. Par conséquent, le sous-groupe Q est d'ordre $2q$; ainsi, l'index du sous-groupe Q dans G est égal à $q(q^2 - 1)/2q = (q^2 - 1)/2$, i.e. chacune des classes $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ contient $(q^2 - 1)/2$ éléments.

Considérons la classe d'éléments conjugués déterminée par l'élément $g_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$, où le couple (σ, v) appartient au « cercle de rayon un », i.e. $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$, où $\sigma^2 \neq 1$. Désignons cette classe par C_σ.

III. *La classe C_σ est bien déterminée par la donnée du nombre σ. Chacune des classes C_σ contient $q(q - 1)$ éléments. Le nombre des classes C_σ est égal à $(q - 1)/2$.*

Démonstration. Soit $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$; pour un σ donné, $\sigma^2 \neq 1$, l'élément v est bien déterminé au signe près ; montrons

que les matrices $\begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} \sigma & -v \\ -\varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$ appartiennent à une même classe d'éléments conjugués dans G. En effet, soit (α, β) un point du cercle $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = -1$ (en vertu de II, 5.2, ce cercle n'est pas vide); un calcul immédiat montre que

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma & -v \\ -\varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix},$$

en outre

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} = -\alpha^2 + \varepsilon\beta^2 = 1,$$

i.e.

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} \in G.$$

Ainsi le nombre σ définit la classe C_σ de façon unique. Si l'on a aussi $g_\tau \in C_\sigma$, alors les traces des matrices g_τ et g_σ sont égales, donc $\sigma = \tau$ ce qui implique que toutes les classes C_σ sont distinctes, et leur nombre est égal au nombre d'éléments $\sigma \in \mathbf{F}_q$ tels que $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$ pour un certain $v \neq 0$. Mais « le cercle de rayon un » contient $q + 1$ éléments, parmi lesquels on trouve les couples $(1, 0)$ et $(-1, 0)$; par conséquent, le nombre de couples (σ, v), $\sigma^2 \neq 1$, tels que $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$ est égal à $q - 1$; d'autre part, pour un σ donné, l'élément $v \neq 0$ est déterminé par l'égalité $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$ au signe près, et donc le nombre de classes est égal à $(q - 1)/2$.

Le sous-groupe Q est constitué par des éléments $g \in G$ permutables à g_σ et donc, comme on le vérifie aisément, par des matrices de la forme $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon\beta & \alpha \end{Vmatrix}$, où $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = 1$. D'après I de 5.2, le sous-groupe Q est d'ordre $q + 1$, et donc l'index de Q dans G est égal à $q(q - 1)$, i.e. le nombre d'éléments dans la classe C_σ est égal à $q(q - 1)$, ce qui termine la démonstration de la proposition III.

Ainsi, le nombre des classes d'éléments conjugués dans G est égal à $2 + (q - 3)/2 + 4 + (q - 1)/2 = q + 4$ *). En vertu du théorème 3 de 1.7, chapitre II, le groupe G contient exactement $q + 4$ représentations non équivalentes deux à deux. Indiquons ces représentations.

5.4. Les représentations T_π. Soit π une représentation unidimensionnelle (i.e. un caractère) du groupe $\mathbf{F}_q^*$ (on dit parfois que π est

*) Le nombre d'éléments du groupe G qui appartiennent aux classes considérées $\{e\}$, $\{-e\}$, A_λ, $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$, C_σ est égal à $2 + \left(\frac{q-3}{2}\right) \times$ $\times q(q+1) + 4\left(\frac{q^2-1}{2}\right) + \frac{q-1}{2} q(q-1) = q(q^2-1)$, i.e. à l'ordre du groupe G.

le caractère multiplicatif du corps $\mathbf{F}_q$). Désignons par H_π l'espace de toutes les fonctions $f(x, y)$, $x, y \in \mathbf{F}_q$, définies pour $(x, y) \neq \neq (0, 0)$ et vérifiant la condition

$$f(\lambda x, \lambda y) = \pi(\lambda) f(x, y) \quad (\lambda \in \mathbf{F}_q^*, \quad x, y \in \mathbf{F}_q, \ (x, y) \neq (0, 0)). \qquad (5.4.1)$$

Définissons la représentation T_π du groupe G dans l'espace H_π par la formule

$$(T_\pi(g) f)(x, y) = f(ax + cy, bx + dy) \quad \left(g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\right). \qquad (5.4.2)$$

On vérifie facilement que l'application $g \to T_\pi(g)$ est effectivement une représentation du groupe G.

En vertu de la condition (5.4.1), une fonction arbitraire de H_π est déterminée de façon unique par ses valeurs en $q + 1$ points qui sont le point $(0, 1)$ et les points $(1, a)$, $a \in \mathbf{F}_q$; par conséquent, la dimension de la représentation T_π est égale à $q + 1$.

Cherchons le caractère φ_π de la représentation T_π. Envisageons dans H_π une base formée des vecteurs f_∞ et f_a, $a \in \mathbf{F}_q$, où f_∞ et f_a sont définies par les formules

$$\begin{aligned} f_\infty(x, y) &= \begin{cases} \pi(x) & \text{si } y = 0, \\ 0 & \text{si } y \neq 0; \end{cases} \\ f_a(x, y) &= \begin{cases} \pi(y) & \text{si } x = ay, \\ 0 & \text{si } x \neq ay. \end{cases} \end{aligned} \qquad (5.4.3)$$

Soit χ un caractère donné d'un groupe additif du corps $\mathbf{F}_q$ (on l'appelle « caractère additif du corps $\mathbf{F}_q$ ») tel que $\chi(a) \not\equiv 1$ $(a \in \mathbf{F}_q)$. Posons $e_\infty = f_\infty$, $e_u = \sum\limits_{a \in \mathbf{F}_q} \chi(ua) f_a$ $(u \in \mathbf{F}_q)$. Alors, comme on le vérifie immédiatement,

$$\begin{aligned} T_\pi(g_\lambda) e_u &= \pi(\lambda) e_{\lambda^{-2}u}, \\ T_\pi(g_\lambda) e_\infty &= \pi(\lambda^{-1}) e_\infty, \end{aligned} \qquad (5.4.4a)$$

$$\begin{aligned} T_\pi\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}\right) e_u &= \chi(ub)\, e_u, \\ T_\pi\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}\right) e_\infty &= e_\infty \end{aligned} \qquad (5.4.4b)$$

pour tous les $g_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$, $\lambda \neq 0$, et tous les $b \in \mathbf{F}_q$. Puisque les matrices $\begin{Vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{Vmatrix}$ sont conjuguées dans le groupe G par l'élément $s = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, la formule (5.4.4) permet de calculer la

valeur du caractère φ_π de la représentation T_π sur les classes d'éléments conjugués $\{e\}$, $\{-e\}$, $A_\lambda, B^{\pm}(1)$, $B^{\pm}(\varepsilon)$. Il est évident que $\varphi_\pi(e) = \dim T_\pi = q+1$, $\varphi_\pi(-e) = \pi(-1)(q+1)$. Trouvons $\varphi_\pi(e_1^+)$. D'après (5.4.4b)

$$\varphi_\pi(e_1^+) = \varphi_\pi\left(\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right\|\right) = \sum_{u\in F_q} \chi(-u) + 1. \tag{5.4.5}$$

χ n'étant pas un caractère unité, les relations d'orthogonalité (1.4.2) entraînent $\sum_{u\in F_q} \chi(-u) = 0$; par conséquent $\varphi_\pi(e_1^+) = 1$. D'une manière analogue $\varphi_\pi(e_\varepsilon^+) = 1$; $\varphi_\pi(e_1^-) = \varphi_\pi(e_\varepsilon^-) = \pi(-1)$. Trouvons $\varphi_\pi(g_\lambda)$, $\lambda \neq \pm 1$. Avec $\lambda^2 \neq 1$, on a pour $u \neq 0$ la relation $u \neq \lambda^2 u$ et donc l'élément matriciel diagonal dans la décomposition du vecteur $T_\pi(g_\lambda)\, e_u$, $u \in \mathbf{F}_q$, (voir 5.4.4a) n'est pas nul que lorsque $n = 0$; ainsi $\varphi_\pi(g_\lambda) = \pi(\lambda^{-1}) + \pi(\lambda)$.

Il nous reste à déterminer le caractère φ_π sur la classe C_σ. Soit ρ une représentation unidimensionnelle du sous-groupe $K = \left\{\left\|\begin{matrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{matrix}\right\|,\ \lambda \in \mathbf{F}_q^*,\ \mu \in \mathbf{F}_q\right\}$, déterminée par la formule $\rho(k) = \pi(\lambda)$ pour $k = \left\|\begin{matrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{matrix}\right\|$. La représentation T_π est équivalente à la représentation du groupe G induite par la représentation ρ. En effet, soit ψ une fonction sur G telle que $\psi(kg) = \rho(k)\,\psi(g)$ quels que soient $k \in K$, $g \in G$, i.e.

$$\psi\left(\left\|\begin{matrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|\right) = \psi\left(\left\|\begin{matrix} \lambda a & \lambda b \\ \mu a + \lambda^{-1} c & \mu b + \lambda^{-1} d \end{matrix}\right\|\right) = \pi(\lambda)\,\psi\left(\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|\right). \tag{5.4.6}$$

Posons $F(a, b) = \psi\left(\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|\right)$ et désignons par X l'ensemble de tous les couples (x, y), $x, y \in \mathbf{F}_q$, qui diffèrent de $(0, 0)$. Pour un couple $(a, b) \in X$ donné, la solution générale de l'équation $\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right| = 1$ est de la forme $c = c_0 + \mu a$, $d = d_0 + \mu b$, où $\mu \in \mathbf{F}_q$, $\left|\begin{matrix} a & b \\ c_0 & d_0 \end{matrix}\right| = 1$; en attirant la condition (5.4.6) on conclut que la fonction F est définie correctement, i.e. ne dépend pas du choix des éléments c et d tels que $ad - bc = 1$. Nous avons donc construit une application $\psi \to F$ de l'espace de la représentation induite U^ρ dans l'espace H_π ; le lecteur vérifiera sans difficulté que cette appli-

cation est un isomorphisme qui applique U^ρ dans T_π. Il découle de la formule (4.4.1) pour le caractère d'une représentation induite, que le caractère de la représentation U^ρ s'annule sur les éléments $g \in G$ non conjugués avec les éléments du sous-groupe K ; par conséquent $\varphi_\pi(g_\sigma) = 0$. En réunissant les relations trouvées pour φ_π nous obtenons:

I. *Soit* φ_π *un caractère de la représentation* T_π; *alors*

$$\varphi_\pi(e) = q+1, \quad \varphi_\pi(-e) = (q+1)\pi(-1);$$
$$\varphi_\pi(g_\lambda) = \pi(\lambda) + \pi(\lambda^{-1}) \quad (\lambda^2 \neq 1);$$
$$\varphi_\pi(e_1^+) = \varphi_\pi(e_\varepsilon^+) = 1; \quad \varphi_\pi(e_1^-) = \varphi_\pi(e_\varepsilon^-) = \pi(-1);$$
$$\varphi_\pi(g_\sigma) = 0 \quad (\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1, \ \sigma^2 \neq 1).$$

Un calcul immédiat nous montre que pour $\pi^2 \not\equiv 1$ on a $\sum_{g \in G} |\varphi_\pi(g)|^2 = q(q^2-1)$, d'où l'on tire en utilisant aussi II de 1.8 que :

II. *Toutes les représentations* T_π *admettant des caractères* π *tels que* $\pi^2 \not\equiv 1$ *sont irréductibles.*

En outre, les formules pour φ_π impliquent:

III. *Pour que deux représentations* T_π, T_{π_1} $(\pi^2 \not\equiv 1, \ \pi_1^2 \not\equiv 1)$ *soient équivalentes il faut et il suffit que* $\pi = \pi_1$ *ou bien que* $\pi = \pi_1^{-1}$.

Considérons la représentation T_1, où 1 est un caractère unité du groupe F_q^*, donc $1(\lambda) \equiv 1$ quel que soit $\lambda \in F_q^*$. Il est évident que les fonctions constantes ($f(x, y) = c$ pour tous les $(x, y) \neq (0, 0)$) appartiennent à H_1 et constituent un sous-espace unidimensionnel invariant dans H_1, dans lequel agit la représentation unité 1_G (du groupe G) dont le caractère φ_{1_G} est identiquement égal à 1. L'espace des fonctions $f \in H_1$ telles que $\sum_{(x, y) \neq (0, 0)} f(x, y) = 0$ est également invariant relativement à T_1, i.e. une sous-représentation $\widetilde{T}_1$ de T_1 agit dans cet espace, et la dimension de $\widetilde{T}_1$ est égale à q. Il est évident que le caractère $\varphi_{\widetilde{T}_1}$ de la représentation $\widetilde{T}_1$ est égal à $\varphi_1 - \varphi_{1_G} = \varphi_1 - 1$, où φ_1 est le caractère de la représentation T_1. Par conséquent, on a la proposition suivante:

IV. *Soit* $\widetilde{\varphi}$ *le caractère de la représentation* $\widetilde{T}_1$. *Alors* $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(-e) = q$; $\widetilde{\varphi}(e_1^+) = \widetilde{\varphi}(e_1^-) = \widetilde{\varphi}(e_\varepsilon^+) = \widetilde{\varphi}(e_\varepsilon^-) = 0$; $\widetilde{\varphi}(g_\lambda) = 1$; $\widetilde{\varphi}(g_\sigma) = -1$.

Un calcul direct nous montre que $\sum_{g \in G} |\widetilde{\varphi}(g)|^2 = q(q^2-1) = |G|$, et la proposition II de 1.8 entraîne :

V. *La représentation* $\widetilde{T}_1$ *est irréductible.*

La représentation T_{π_0}, où $\pi_0^2 \equiv 1$, $\pi_0 \not\equiv 1$, sera étudiée dans 5.6.

5.5. Somme trigonométrique dans F_q. Soit $\pi_0 \not\equiv 1$ un caractère du groupe F_q^* qui prend les valeurs 1 et -1. Alors π_0 prend la valeur 1 sur tous des carrés de F_q^* $(\pi_0(a^2) = (\pi_0(a))^2 = +1)$. L'ensemble des carrés dans F_q^* constitue un sous-groupe d'index 2 dans F_q^*, par conséquent la condition $\pi_0 \not\equiv 1$ implique $\pi_0(x) = -1$ pour tous les éléments $x \in F_q^*$ qui ne sont pas des carrés. Le caractère π_0 s'appelle *résidu quadratique* du corps F_q. Remarquons que $\pi_0(\varepsilon) = -1$.

Envisageons la fonction $f(a) = \sum_{u \in F_q^{*2}} \chi(au)$, où F_q^{*2} est le sous-groupe du groupe F_q^* constitué par des carrés non nuls de F_q. Lorsque $a = 0$, on a $f(a) = (q-1)/2$ de sorte que l'ordre du sous-groupe F_q^{*2} est égal à $(q-1)/2$. Soit $a \neq 0$. Alors

$$f(a) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(au) = \sum_{u\neq 0} \chi(au)\frac{\pi_0(u)+1}{2}; \tag{5.5.1}$$

il découle des relations d'orthogonalité (1.4.2) qu'un caractère $\chi \neq 1$ est orthogonal (comme une fonction sur un groupe) au caractère identifiquement égal à l'unité, i.e. $\sum_{u \in F_q} \chi(u) = 0$ pour $\chi \not\equiv 1$.

Par conséquent

$$f(a) = \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0} \chi(au)\pi_0(u) + \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0}\chi(au) = \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0}\chi(au)\pi_0(u) - \frac{1}{2}. \tag{5.5.2}$$

Posons

$$\Phi(a) = \sum_{u\neq 0} \chi(au)\pi_0(u)\ ^{*)}; \tag{5.5.3}$$

alors

$$\Phi(a) = \sum_{v\neq 0} \chi(v)\pi_0(va^{-1}) = \pi_0(a^{-1}) \sum_{v\neq 0}\chi(v)\pi_0(v). \tag{5.5.4}$$

Désignons $\sum_{v\neq 0}\chi(v)\pi_0(v)$ par $\Gamma(\pi_0)$; puisque $\pi_0(a^{-1}) = \pi_0(a)$, on a $\Phi(a) = \Gamma(\pi_0)\pi_0(a)$, donc

$$\sum_{a\neq 0}\Phi(a)\chi(av) = \Gamma(\pi_0)\sum_{a\neq 0}\pi_0(a)\chi(av) = \Gamma(\pi_0)\Phi(v) = (\Gamma(\pi_0))^2\pi_0(v). \tag{5.5.5}$$

*) Remarquons que si F est le corps des résidus modulo p et χ est un caractère qui fait correspondre à un élément $k \in F$ le nombre $\chi(k) = e^{2\pi \frac{k}{p} i}$, alors $\Phi(a)$ sera la somme trigonométrique usuelle, que l'on appelle *somme de Gauss*. Voir J.-P. Serre [3].

D'autre part,

$$\sum_{a\neq 0} \Phi(a)\chi(av) = \sum_{u\neq 0}\sum_{a\neq 0} \chi(au+av)\pi_0(u) =$$
$$= \sum_{w\neq 0} \pi_0(-w) \sum_{a\neq 0} \chi(a(v-w)) =$$
$$= \sum_{w\neq 0} \pi_0(-w)(-1) + q\pi_0(-v) = q\pi_0(-v). \quad (5.5.6)$$

En comparant (5.5.2), (5.5.4), (5.5.5) et (5.5.6), nous voyons que

$$\Gamma(\pi_0)^2 = \Big(\sum_{v\neq 0} \chi(v)\pi_0(v)\Big)^2 = q\pi_0(-1), \quad (5.5.7)$$

$$\sum_{u\in F_q^{*2}} \chi(au) = \frac{1}{2}\Gamma(\pi_0)\pi_0(a) - \frac{1}{2} \quad (a\neq 0) \quad (5.5.8)$$

5.6. La représentation T_{π_0}. Considérons maintenant la représentation T_{π_0}.

Soit χ_0 le caractère de la représentation T_{π_0}. On tire de I, 5.4, en prenant en considération l'égalité $\pi_0(x)^2 \equiv 1$, que $\sum_{g\in G} |\chi_0(g)|^2 = 2|G|$. Par conséquent, la représentation T_{π_0} est réductible; d'après (1.7.5) elle se décompose en deux représentations irréductibles.

Considérons la restriction de la représentation T_{π_0} au sous-groupe K. Il est évident que toute représentation invariante relativement à la représentation T_{π_0} est également invariante relativement à $T_{\pi_0}|_K$. D'autre part, les formules (5.4.4) impliquent que le sous-espace $H^+_{\pi_0}$ déterminé par $\Gamma(\pi_0)e_\infty + e_0$ et e_{v^2}, $v\in F_q^*$ et le sous-espace $H^-_{\pi_0}$ déterminé par $\Gamma(\pi_0)e_\infty - e_0$ et e_u, $u\in F_q^*\setminus F_q^{*2}$, sont invariants relativement à $T_{\pi_0}|_K$. Soient θ^+, θ^- les caractères des représentations correspondantes du groupe K. Les formules (5.5.4) impliquent $\theta^+\neq\theta^-$ (par exemple, $\theta^+(e_1^+) = (1+\Gamma(\pi_0))/2 \neq \neq (1-\Gamma(\pi_0))/2 = \theta^-(e_1^+)$). Par conséquent, les restrictions de la représentation $T_{\pi_0}|_K$ à $H^+_{\pi_0}$ et $H^-_{\pi_0}$ ne sont pas équivalentes. D'autre part, le lecteur vérifiera facilement, en se servant du lemme de Schur ou en calculant $\sum_{k\in K} |\theta^+(k)|^2$, que les restrictions de la représentation $T_{\pi_0}|_K$ à $H^+_{\pi_0}$ et $H^-_{\pi_0}$ sont irréductibles. Par conséquent, les sous-espaces $H^+_{\pi_0}$ et $H^-_{\pi_0}$ sont uniquement déterminés, étant les seuls sous-espaces propres de l'espace H_{π_0} invariants relativement à $T_{\pi_0}|_K$. Puisque la représentation T_{π_0} est réductible, il existe un sous-espace propre $\widetilde{H}\subset H_{\pi_0}$ invariant relativement à T_{π_0}. Alors $\widetilde{H}$ est invariant relativement à $T_{\pi_0}|_K$ et donc $\widetilde{H} = H^+_{\pi_0}$ ou $\widetilde{H} = H^-_{\pi_0}$. D'où l'on peut déduire que les sous-espaces $H^+_{\pi_0}$ et $H^-_{\pi_0}$ sont invariants relativement à T_{π_0}. Soient $T^+_{\pi_0}$ et $T^-_{\pi_0}$ les restric-

tions de la représentation T_{π_0} aux sous-espaces $H^+_{\pi_0}$, $H^-_{\pi_0}$ respectivement. Il est évident que les dimensions de ces représentations sont égales à $(q+1)/2$.

Trouvons les caractères des représentations $T^+_{\pi_0}$, $T^-_{\pi_0}$. Soit φ^+ le caractère de la représentation $T^+_{\pi_0}$. Les formules (5.4.4), (5.4.5) et (5.5.8) permettent d'écrire:

$$\varphi^+(-e) = \pi_0(-1)(q+1)/2;$$

$$\varphi^+(e_1^+) = 1 + \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(u) = (1+\Gamma(\pi_0))/2;$$

$$\varphi^+(e_\varepsilon^+) = 1 + \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(u\varepsilon) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$

$$\varphi^+(e_1^-) = (1+\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$

$$\varphi^+(e_\varepsilon^-) = \pi_0(-1)(1-\Gamma(\pi_0))/2; \quad \varphi^+(g_\lambda) = \pi_0(\lambda).$$

En outre $\varphi^+(e) = (q+1)/2 \; (= \dim T^+_{\pi_0})$. Donc

$$\sum_{g\in G} |\varphi^+(g)|^2 \geqslant ((q+1)/2)^2 + ((q+1)/2)^2 + $$
$$+ \{|1+\Gamma(\pi_0)|^2/2 + |1-\Gamma(\pi_0)|^2/2\}(q^2-1)/2 + $$
$$+ (q-3)\,q\,(q+1)/2 = q\,(q^2-1);$$

par conséquent $\sum_{g_\sigma} |\varphi^+(g)|^2 \leqslant 0$, i.e. $\varphi^+(g_\sigma) = 0$ quel que soit g_σ. Puisque le caractère φ^- de la représentation $T^-_{\pi_0}$ satisfait la relation $\varphi^- = \varphi - \varphi^+$, on a la proposition:

I. *Soient* φ^+, φ^- *les caractères des représentations* $T^+_{\pi_0}$ *et* $T^-_{\pi_0}$ *respectivement. Alors*

$$\varphi^+(e) = (q+1)/2; \quad \varphi^+(-e) = (q+1)\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^+(e_1^+) = (\Gamma(\pi_0)+1)/2; \quad \varphi^+(e_\varepsilon^+) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$
$$\varphi^+(e_1^-) = (\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^+(e_\varepsilon^-) = (1-\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^+(g_\lambda) = \pi_0(\lambda); \quad \varphi^+(g_\sigma) = 0; \quad \varphi^-(e) = (q+1)/2;$$
$$\varphi^-(-e) = (q+1)\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^-(e_1^+) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$
$$\varphi^-(e_\varepsilon^+) = (1+\Gamma(\pi_0))/2; \quad \varphi^-(e_1^-) = (1-\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^-(e_\varepsilon^-) = (1+\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^-(g_\lambda) = \pi_0(\lambda); \quad \varphi^-(g_\sigma) = 0.$$

En comparant les formules pour les caractères des représentations T_π ($\pi^2 \neq 1$), 1_G, $\widetilde{T}_1$, $T^+_{\pi_0}$, $T^-_{\pi_0}$, nous voyons que nous avons construit une famille de $2+2+(q-3)/2 = (q+5)/2$ représentations irréductibles du groupe G deux à deux non équivalentes.

5.7. Les représentations S_π. Construisons encore une famille de représentations du groupe G. Considérons *l'extension quadratique* $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ du corps $\mathbf{F}_q$, i.e. l'ensemble des éléments de la forme $x +$

$+ y\sqrt{\varepsilon}$, $x, y \in \mathbf{F}_q$, avec les opérations usuelles d'addition et de multiplication des polynomes en $\sqrt{\varepsilon}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_q$, où $\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$. Alors $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ est un corps qui contient $\mathbf{F}_q$ en tant que sous-corps. Introduisons dans $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ l'opération de conjugaison, en posant $\bar{t} = x - y\sqrt{\varepsilon}$ pour $t = x + y\sqrt{\varepsilon} \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$. Remarquons que l'ensemble $U = \{t: t \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon}),\ t\bar{t} = 1\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ du corps $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$.

Soit ρ un caractère du groupe $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$, et $\rho(t) \not\equiv 1$ pour $t \in U$. Considérons l'espace vectoriel H formé de toutes les fonctions f sur $\mathbf{F}_q^*$ et définissons dans l'espace H la représentation S_ρ du groupe G en posant

$$(S_\rho(g)f)(u) = \sum_{v \in \mathbf{F}_q^*} K_\rho(u, v; g) f(v),$$

où $g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ et

$$K_\rho(u, v; g) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{q}\chi\left(\frac{du+av}{b}\right) \sum\limits_{t\bar{t}=vu^{-1}} \chi\left(-\frac{ut+vt^{-1}}{b}\right)\rho(t) & \text{si } b \neq 0; \quad (5.7.1a) \\ \rho(d)\chi(dcu)\delta(d^2u - v), & \text{si } b = 0; \quad (5.7.1b) \end{cases}$$

ici δ est le *symbole de Kronecker* ($\delta(x) = 0$ lorsque $x \neq 0$, $\delta(0) = 1$); $\chi \neq 1$ est un caractère additif fixe du corps $\mathbf{F}_q$.

On vérifie immédiatement que S_ρ est bien une représentation (i.e. $S(e) = 1$, $S_\rho(g_1g_2) = S_\rho(g_1)S_\rho(g_2)$). Dim $S_\rho = q - 1$.

Soit π la restriction du caractère ρ au sous-groupe U. Alors π est un caractère du groupe U, non égal identiquement à l'unité.

Trouvons le caractère φ_ρ de la représentation S_ρ. On a évidemment $\varphi_\rho(e) = q - 1$, $\varphi_\rho(-e) = (q-1)\pi(-1)$ (vu que $-1 \in U$, on a $\rho(-1) = \pi(-1)$). La formule (5.7.1b) implique également $\varphi_\rho(g_\lambda) = 0$ (puisque $\lambda^2 \neq 1$ pour tous les g_λ); $\varphi_\rho(e_1^+) = \sum\limits_{u \neq 0} \chi(u) = \sum\limits_u \chi(u) - 1 = -1$; d'une manière analogue, $\varphi_\rho(e_\varepsilon^+) = -1$, $\varphi_\rho(e_1^-) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^-) = -\pi(-1)$. Remarquons que les relations d'orthogonalité (1.4.2) pour les caractères χ_p déterminés par la formule $\chi_p(u) = \chi'(pu)$ impliquent $\sum\limits_{u \neq 0} \chi(pu) = q - 1$ pour $p = 0$ et $\sum\limits_{u \neq 0} \chi(pu) = -1$ pour $p \neq 0$ ($p \in \mathbf{F}_q$); nous obtenons donc pour

$g = g_0$, en posant $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma = a + d$, $t_0 \in U$,

$$\varphi_\rho(g_\sigma) = \sum_{u \neq 0} K_\rho(u, u; g) =$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{u \neq 0} \chi\left(\frac{2\sigma u}{v}\right) \sum_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{ut + ut^{-1}}{v}\right) \rho(t) =$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{t\bar{t}=1} \rho(t) \sum_{u \neq 0} \chi\left(\frac{2\sigma - (t + t^{-1})}{v} u\right) =$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{t\bar{t}=1} \rho(t)(-1) - \frac{1}{q}(\rho(t_0) q + \rho(t_0^{-1}) q) = -(\rho(t_0) + \rho(t_0^{-1})),$$

car la condition $\rho \not\equiv 1$ sur U implique $\sum_{t\bar{t}=1} \rho(t) = 0$. Comme $t_0 \in U$ et $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, on a $\varphi_\rho(g_\sigma) = -\pi(t_0) - \pi(t_0^{-1})$, où $g_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{pmatrix}$, $t_0\bar{t}_0 = 1$, $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, i.e. $t_0 = \sigma \pm v\sqrt{\varepsilon}$. En réunissant les relations obtenues, on peut énoncer:

I. *Soient* φ_ρ *un caractère de la représentation* S_ρ, *et* π *la restriction du caractère* ρ *au sous-groupe* U. *Alors* $\varphi_\rho(e) = q - 1$; $\varphi_\rho(-e) = (q-1)\pi(-1)$; $\varphi_\rho(g_\lambda) = 0$; $\varphi_\rho(e_1^+) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^+) = -1$; $\varphi_\rho(e_1^-) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^{-1}) = -\pi(-1)$; $\varphi_\rho(g_\sigma) = -\pi(t_0) - \pi(t_0^{-1})$, *où* $t_0\bar{t}_0 = 1$, $t_0 + \bar{t}_0 = 2\sigma$.

D'où l'on tire immédiatement:

II. *Si* $\rho_1 = \rho_2$ *sur* U *ou* $\rho_1 = \rho_2^{-1}$ *sur* U, *on a* $\varphi_{\rho_1} \approx \varphi_{\rho_2}$.

Désignons la représentation S_ρ par S_π, où π est la restriction de ρ à U. La formule pour $\varphi_\rho(g_\sigma)$ détermine entièrement $\pi(t) + \pi(t^{-1})$ pour tous les t tels que $t\bar{t} = 1$; donc:

III. *Deux représentations* S_{π_1} *et* S_{π_2} *sont équivalentes si et seulement si* $\pi_1 = \pi_2$ *ou bien* $\pi_1 = (\pi_2)^{-1}$.

On vérifie facilement que $\sum_{g \in G} |\varphi_\rho(g)|^2 = q(q^2 - 1)$ lorsque $\rho^2 \not\equiv 1$ sur U ; i.e. si $\pi^2 \not\equiv 1$ sur U, la représentation S_π est irréductible. Lorsque $\pi_1 \not\equiv 1$ est un caractère de U tel que $\pi_1^2 \equiv 1$, alors π_1 prend les valeurs ± 1, d'où l'on déduit immédiatement que $\pi_1 = 1$ sur le sous-groupe $U^2 \subset U$ formé des carrés des éléments de U. Par conséquent, $\pi_1 = -1$ sur $U \setminus U^2$, i.e. π_1 est uniquement déterminé. Soit φ_1 un caractère de la représentation S_{π_1} ; on vérifie immédiatement que $\sum_{g \in G} |\varphi_1(g)|^2 = 2q(q^2 - 1)$, i.e. S_{π_1} se décompose en une somme directe de deux représentations irréductibles de G (voir (3.7.5)). Mais la formule (5.7.1b) implique que le sous-

espace $H^+ \subset H$ formé des fonctions nulles sur $\mathbf{F}_q^* \setminus \mathbf{F}_q^{*2}$ et l'espace $H^- \subset H$ formé des fonctions qui s'annulent sur $\mathbf{F}_q^{*2}$, sont invariants relativement aux opérateurs $S_{\pi_1}(k)$, $k \in K$. En outre, puisque le sous-groupe des matrices de la forme $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{Vmatrix}$ opère dans H par multiplications par le caractère $\chi(cu)$, chaque opérateur A dans H permutable avec les opérateurs de la représentation S_{π_1} est permutable, en particulier, avec les opérateurs de multiplication par $\chi(cu)$, et donc avec les opérateurs de multiplication par une fonction quelconque $\alpha(u)$ ($\alpha(u)$ étant une combinaison linéaire de caractères). Mais alors A est un opérateur de multiplication par une fonction. En effet, si $f_0(u) \equiv 1$ et $Af_0 = \psi_A$, on a

$$(A\varphi)(u) = (A(\varphi f_0))(u) = \varphi(u)(Af_0)(u) = \psi_A(u)\varphi(u),$$

i.e. A est un opérateur de multiplication par $\psi_A(u)$. Puisque $(S_{\pi_1}(g)f)(u) = \rho(d) f(d^2u)$ pour $g = \begin{Vmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{Vmatrix}$, on a $\psi_A(d^2u) = \psi_A(u)$, i.e. la fonction ψ_A est constante sur les classes d'équivalence de $\mathbf{F}_q^*$ par $\mathbf{F}_q^{*2}$. D'où l'on déduit que les restrictions de la représentation S_{π_1} à K sont irréductibles sur H^+ et H^-, tandis que l'irréductibilité de S_{π_1} entraîne que H^+ et H^- sont invariants relativement à S_{π_1} *). Soient $S_{\pi_1}^+$, $S_{\pi_1}^-$ les sous-représentations de S_{π_1} dans les espaces H^+ et H^- respectivement. La dimension de chacune des représentations $S_{\pi_1}^+$, $S_{\pi_1}^-$ est égale à $(q-1)/2$. Calculons leurs caractères φ_1^+, φ_1^-.

Soit φ_1^+ le caractère de la représentation $S_{\pi_1}^+$. Alors

$$\varphi_1^+(e) = (q-1)/2\,; \quad \varphi_1^+(-e) = \pi_1(-1)(q-1)/2\,;$$
$$\varphi_1^+(e_1^+) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(u) = (\Gamma(\pi_0)-1)/2\,;$$
$$\varphi_1^+(e_\varepsilon^+) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(\varepsilon u) = -(\Gamma(\pi_0)+1)/2\,;$$
$$\varphi_1^+(e_1^-) = \pi_1(-1)(\Gamma(\pi_0)-1)/2\,;$$
$$\varphi_1^+(e_\varepsilon^-) = -\pi_1(-1)(\Gamma(\pi_0)+1)/2\,; \quad \varphi_1^+(g_\lambda) = 0$$

(étant donné $\lambda^2 \neq 1$, on déduit immédiatement de (5.7.1b) que $K(u, u\,; g_\lambda) = 0$ quels que soient $u \neq 0$) ; $\varphi_1^+(g_\sigma) = \sum_{u=w^2\neq 0} K_{\pi_0}(u, u\,; g) = -\frac{1}{q}\sum_{t\bar t=1} \pi_1(t) \sum_{u=w^2\neq 0} \chi\left(\frac{2\sigma - t - t^{-1}}{v} u\right)$ et la

---

*) Il en découle en particulier que pour $vu^{-1} \in \mathbf{F}_q^* \setminus \mathbf{F}_q^{*2}$ on a $K_{\pi_1}(u, v; g) = 0$, i.e. $\sum_{t\bar t = vu^{-1}} \chi\left(-\frac{1}{b}(ut + vt^{-1})\right) \rho(t) = 0$ pour $vu^{-1} \in \mathbf{F}_q^* \setminus \mathbf{F}_q^{*2}$ et pour chaque caractère multiplicatif ρ sur $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*$ dont la restriction à U coïncide avec π_1.

formule (5.4.2) nous donne

$$\varphi_1^+(g_\sigma) = -\frac{1}{q} \sum_{\substack{t\bar{t}=1 \\ t\neq t_0, \bar{t}_0}} \pi_1(t) \left\{\frac{1}{2}\Gamma(\pi_0)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right)-\frac{1}{2}\right\} - \frac{q-1}{2q}\{\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1})\} =$$

$$= -\frac{1}{q}\frac{\Gamma(\pi_0)}{2} \sum_{\substack{t\bar{t}=1 \\ t\neq t_0, \bar{t}_0}} \pi_1(t)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right) - \frac{1}{2}(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1})), \quad (5.7.2)$$

où $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, $t_0\bar{t}_0 = 1$. Mais, puisque π_1 et π_0 prennent des valeurs réelles, tandis que $\Gamma(\pi_0) = (q\pi_0(-1))^{1/2}$ est soit réel, soit purement imaginaire, les relations $\sum_{g\in G} |\varphi_1^+(g)|^2 = q(q^2-1)$, $\sum_{g\in G} \varphi_1^+(g)\,\varphi_1^-(g) = 0$ (qui expriment l'orthogonalité, voir 1.7), nous donnent

$$\sum_{\substack{t\bar{t}=1 \\ t\neq t_0, \bar{t}_0}} \pi_1(t)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right) = 0$$

pour $g = \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$, $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, $t_0\bar{t}_0 = 1$. D'ici et de la relation (5.7.2) on tire $\varphi_1^+(g_\sigma) = -\frac{1}{2}(\pi_1(t_0) + \pi_1(t_0^{-1}))$; puisque $\varphi_1^- = \varphi_1 - \varphi_1^+$, on aboutit à la proposition:

IV. *Soient* φ_1^+, φ_1^- *les caractères des représentations* $S_{\pi_1}^+$, $S_{\pi_1}^-$ *respectivement. Alors* $\varphi_1^+(e) = (q-1)/2$; $\varphi_1^+(-e) = (q-1)\,\pi_1(-1)/2$;

$\varphi_1^+(e_1^+) = (\Gamma(\pi_0)-1)/2$; $\varphi_1^+(e_\varepsilon^+) = -(\Gamma(\pi_0)+1)/2$;

$\varphi_1^+(e_1^-) = (\Gamma(\pi_0)-1)\,\pi_1(-1)/2$;

$\varphi_1^+(e_\varepsilon^-) = -(\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_1(-1)/2$;

$\varphi_1^+(g_\lambda) = 0$; $\varphi_1^+(g_\lambda) = -(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1}))/2 = -\pi_1(t_0)$,

où $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, $t_0\bar{t}_0 = 1$;

$\varphi_1^-(e) = (q-1)/2$; $\varphi_1^-(-e) = (q-1)\,\pi_1(-1)/2$;

$\varphi_1^-(e_1^+) = -(\Gamma(\pi_0)+1)/2$;

$\varphi_1^-(e_\varepsilon^+) = (\Gamma(\pi_0)-1)/2$; $\varphi_1^-(e_1^-) = -(\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_1(-1)/2$;

$\varphi_1^-(e_\varepsilon^-) = (\Gamma(\pi_0)-1)\,\pi_1(-1)/2$; $\varphi_1^-(g_\lambda) = 0$;

$\varphi_1^-(g_\sigma) = -(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1}))/2 = -\pi_1(t_0)$,

où $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, $t_0\bar{t}_0 = 1$.

Les représentations du groupe G de la forme S_π ($\pi^2 \neq 1$), $S^+_{\pi_1}$, $S^-_{\pi_1}$ constituent une famille de $(q - 1)/2 + 2 = (q + 3)/2$ représentations deux à deux non équivalentes. En comparant les caractères de ces représentations avec les caractères des représentations T_π et de leurs sous-représentations, nous voyons que nous avons construit $q + 4$ représentations deux à deux non équivalentes. Puisque le nombre de classes d'éléments conjugués dans G est égal à $q + 4$, on obtient la proposition:

V. *Une famille constituée par les $q + 4$ représentations 1_G; T_π; $\pi^2 \not\equiv 1$; $\widetilde{T}_1$; $T^+_{\pi_0}$; $T^-_{\pi_0}$; S_π, $\pi^2 \not\equiv 1$;] $S^+_{\pi_1}$; $S^-_{\pi_1}$ est un système complet de représentations irréductibles du groupe G.*

Les caractères des représentations unitaires irréductibles du groupe $SL(n, \mathbf{F}_q)$ pour $n > 3$ ont été calculés par J. A. Green [1*]; une étude de diverses propriétés des représentations du groupe $SL(n, \mathbf{F}_q)$ fait l'objet de l'article de S. I. Guelfand [1*].

CHAPITRE III

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES TOPOLOGIQUES

§ 1. Espaces topologiques

1.1. Définition de l'espace topologique. Un ensemble X est appelé *espace topologique* s'il est muni d'un système $\mathcal{U} = \{U\}$ de sous-ensembles U satisfaisant aux trois propriétés suivantes *):

1) $\varnothing \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;

2) la réunion de toute famille d'ensembles de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$;

3) l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$.

Les ensembles $U \in \mathcal{U}$ s'appellent ensembles *ouverts* de l'espace topologique X, et les éléments $x \in X$ *points* de cet espace. On dit également que le système d'ensembles $\mathcal{U}$ définit la *topologie* T sur X, ou bien que $\mathcal{U}$ munit X de la topologie T.

Un même ensemble X peut être muni de systèmes $\mathcal{U}$ différents; ils définissent alors des topologies différentes sur X. Un ensemble X muni de plusieurs topologies doit être considéré comme plusieurs espaces topologiques. Une des topologies s'obtient si l'on considère comme ouverts tous les sous-ensembles de X; il est évident que les conditions 1) à 3) sont vérifiées. La topologie ainsi définie sur X s'appelle topologie *discrète*.

Un système $\mathcal{V} = \{V\}$ d'ensembles $V \subset X$ est dit *base* d'un espace topologique si chaque ensemble ouvert $\mathcal{U}$ dans X est la réunion d'ensembles $V \in \mathcal{V}$. Il est évident que l'on peut se donner une topologie dans X en indiquant quel système $\mathcal{V}$ est sa base; les ensembles ouverts seront alors toutes les réunions possibles d'ensembles de $\mathcal{V}$. Il est évident que le système $\mathcal{V}$ est une base d'un espace topologique si et seulement si: 1) $\varnothing \in \mathcal{V}$; 2) l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$ est la réunion de certains éléments de $\mathcal{V}$; 3) la réunion de tous les ensembles de $\mathcal{V}$ coïncide avec X.

EXEMPLES.

1. Soit $\mathbf{R}^1$ l'ensemble de tous les nombres réels. Définissons dans $\mathbf{R}^1$ une topologie en prenant pour éléments de la base tous les intervalles $a < x < b$ et l'ensemble vide $\varnothing$. On vérifie immédiatement

*) Ici et par la suite $\varnothing$ désignera toujours l'ensemble vide.

que les conditions 1) à 3) sont satisfaites et que les ensembles ouverts seront les ensembles ouverts usuels de $\mathbf{R}^1$. La topologie ainsi définie dans $\mathbf{R}^1$ est dite topologie *naturelle* de $\mathbf{R}^1$. Il est évident que cette topologie diffère de la topologie discrète dans $\mathbf{R}^1$. Par la suite, sauf mention du contraire, $\mathbf{R}^1$ désignera toujours l'espace topologique de tous les nombres réels avec la topologie naturelle.

2. Soit $X = \mathbf{R}^n$ l'ensemble de tous les systèmes $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_k \in \mathbf{R}^1$. Définissons dans $\mathbf{R}^n$ une topologie en prenant pour base le système $\mathscr{V}$ constitué de l'ensemble vide et de tous les parallélépipèdes ouverts:

$$a_k < x_k < b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1.1}$$

Les ensembles ouverts seront l'ensemble vide et toutes les réunions des parallélépipèdes (1.1.1); ce sont les ensembles ouverts usuels de l'espace à n dimensions (pour $n = 2$ et $n = 3$ ce sont les ensembles ouverts usuels du plan et de l'espace usuel respectivement). Il est évident que les conditions 1) à 3) seront alors satisfaites. La topologie ainsi définie est dite topologie *naturelle* dans $\mathbf{R}^n$.

3. Soit $X = \mathbf{C}^n$ l'ensemble de toutes les suites finies $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ de nombres complexes $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}^1$. Faisons correspondre au système $z = \{x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n\}$ le système $x = \{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\} = \mathbf{R}^{2n}$. Nous appliquerons alors $\mathbf{C}^n$ bijectivement sur $\mathbf{R}^{2n}$. Nous considérerons comme ouverts les ensembles de $\mathbf{C}^n$ qui sont les images inverses des ensembles de $\mathbf{R}^{2n}$ par cette application. Il est évident qu'une base dans $\mathbf{C}^n$ sera constituée par l'ensemble vide et tous les ensembles

$$a_k < x_k < b_k, \quad c_k < y_k < d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La topologie ainsi définie s'appelle topologie *naturelle* dans $\mathbf{C}^n$.

Par la suite, sauf mention du contraire, $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ désigneront toujours les ensembles $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ munis de la topologie naturelle.

4. Supposons que X est constitué de deux points: $X = \{a, b\}$. Introduisons dans X une topologie en prenant pour ouverts l'ensemble X tout entier, l'ensemble vide et l'ensemble $\{a\}$ qui se réduit au seul point a. Il est évident que les conditions 1) à 3) seront satisfaites.

Exercice. Démontrer que l'ensemble vide et toutes les boules ouvertes $U(a, r) = \{x: (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}, r > 0$, $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{R}^n$ forment une base de $\mathbf{R}^n$.

1.2. Voisinages. Soit X un espace topologique. On appelle *voisinage* d'un point x de X, et l'on note $U(x)$, tout ensemble ouvert qui contient x.

I. *L'ensemble $M \subset X$ est ouvert si et seulement si chaque point $x \in M$ possède un voisinage $U(x)$ contenu dans M.*

En effet, si M est ouvert, il est lui-même un voisinage de chaque point $x \in M$. Réciproquement, si chaque point $x \in M$ possède un voisinage $U(x) \subset M$, alors M est la réunion de tous les $U(x)$, et donc M est ouvert en vertu de 2), 1.1.

Un système $\mathcal{W}$ de voisinages d'un point x s'appelle *base de voisinages* de ce point si chaque voisinage $U(x)$ contient un certain $W(x) \in \mathcal{W}$. On déduit immédiatement de cette définition que la base de voisinages d'un point doit satisfaire aux conditions suivantes: 1) $x \in W(x)$; 2) chaque intersection $W_1(x) \cap W_2(x)$ de voisinages de la base contient un voisinage qui appartient à la base; 3) si $y \in W(x)$, alors la base des voisinages du point y contient un voisinage $W(y) \subset W(x)$.

Réciproquement, si à chaque point $x \in X$ on associe un système d'ensembles $W(x)$ satisfaisant aux conditions 1) à 3) ci-dessus, on peut définir une topologie sur X en prenant pour ouverts l'ensemble $\varnothing$ et toutes les réunions possibles des ensembles $W(x)$. On vérifie aisément que les conditions 1) à 3) de 1.1 sont alors satisfaites. Les ensembles $W(x)$, $x \in X$, eux-mêmes forment une base de cet espace topologique. Par conséquent, on peut également munir X d'une topologie en indiquant la base de voisinages de chaque point $x \in X$. Ainsi, dans l'exemple 1 de 1.1, on peut prendre pour base de voisinages de chaque point x_0 tous les intervalles de la forme $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

1.3. Ensembles fermés; adhérence d'un ensemble. Les ensembles complémentaires des ensembles ouverts s'appellent *ensembles fermés* ou *fermés* tout court. Il découle des propriétés 1) à 3) des ensembles ouverts (voir. 1.1) que:

1) l'ensemble vide et l'espace tout entier sont fermés;

2) l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles fermés est fermée;

3) la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermée.

Les ensembles fermés sont généralement désignés par la lettre F, et l'ensemble de tous les F par la lettre $\mathcal{F}$. L'intersection de tous les ensembles fermés qui contiennent l'ensemble donné $M \subset X$ s'appelle *adhérence* de l'ensemble M; on la désigne par $\overline{M}$. En vertu de 2) $\overline{M}$ est fermé et, évidemment, le plus petit fermé contenant M. Il est en outre évident que $\overline{M} = M$ si et seulement si M est fermé, et que

1') $M \subset \overline{M}$;

2') $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (puisque $\overline{M}$ est fermé);

3') $\overline{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \ldots \cup \overline{M}_n$ pour tout nombre fini d'ensembles;

4') $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Chaque point x de $\overline{M}$ s'appelle *point adhérent* à l'ensemble M ; $x \in \overline{M}$ si et seulement si chaque voisinage $U(x)$ contient au moins un point de M. La notion de limite d'une suite est proche de celle de point adhérent. Un point x est appelé *limite de la suite* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (ce qu'on note $x = \lim_{n\to\infty} x_n$) si chaque voisinage $U(x)$ contient tous les membres de cette suite à partir d'un certain numéro. Un ensemble $M \subset X$ est dit *dense dans* X si $\overline{M} = X$. L'espace X est dit *séparable* si X contient un sous-ensemble dénombrable dense dans X.

EXEMPLE. Les espaces $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{R}^n$ ont pour ensembles fermés les ensembles fermés usuels, l'adhérence coïncide avec l'adhérence usuelle, la limite avec la limite usuelle. Ces espaces sont séparables, puisque l'ensemble des nombres rationnels en est un sous-ensemble dénombrable et dense.

1.4. Comparaison des topologies. Supposons que l'ensemble X est muni de deux topologies, T_1, T_2, définies par les systèmes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ d'ensembles ouverts. La topologie T_1 est dite *majorée* par la topologie T_2, ce qu'on écrit $T_1 \leqslant T_2$, si $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$; si en outre $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, on dit que T_2 est *plus forte que* T_1 (resp. T_1 est *plus faible que* T_2) et l'on écrit alors $T_1 < T_2$ (ou $T_2 > T_1$). Il est évident que la topologie discrète sur X majore chaque topologie sur X.

Désignons par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les ensembles de tous les sous-ensembles fermés, et par $\overline{M}^1$ et $\overline{M}^2$ les adhérences de $M \subset X$ pour les topologies T_1 et T_2.

I. *Si $T_1 \leqslant T_2$ sur X, alors $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ et donc*

$$\overline{M}^1 \supset \overline{M}^2$$

pour chaque ensemble $M \subset X$.

1.5. L'intérieur et la frontière d'un ensemble. La réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans un ensemble donné $M \subset X$ est le plus grand ouvert (en vertu de 2), 1.1) contenu dans M ; on l'appelle *intérieur* de l'ensemble M et on le désigne par int M. L'ensemble $\overline{M}$ — int M s'appelle *frontière* de M ; on le désigne par ∂M.

EXEMPLES. Soient $X = \mathbf{R}^n$ et

$$M_1 = \{x : x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqslant r^2\},$$
$$M_2 = \{x : x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\},$$
$$M_3 = \{x : x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\},$$
$$M_4 = \{x : x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2\},$$

où $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $r > 0$ sont fixes. Il est évident que M_1 est une boule fermée, M_2 une boule ouverte, M_3 une boule ouverte moins le pont a, et enfin M_4 est la sphère de $\mathbf{R}^n$ de centre a et de

rayon r. On vérifie facilement que

$$\overline{M}_1 = M_1, \quad \text{int}\, M_1 = M_2, \quad \partial M_1 = M_4,$$
$$\overline{M}_2 = M_1, \quad \text{int}\, M_2 = M_2, \quad \partial M_2 = M_4,$$
$$\overline{M}_3 = M_1, \quad \text{int}\, M_3 = M_3, \quad \partial M_3 = \{a, M_4\},$$
$$\overline{M}_4 = M_4, \quad \text{int}\, M_4 = \varnothing, \quad \partial M_4 = M_4.$$

1.6. Sous-espaces. Chaque sous-ensemble Y d'un espace topologique X peut être transformé en espace topologique, si l'on considère comme ouverts les intersections avec Y des ouverts de X. L'espace Y avec la topologie ainsi définie s'appelle *sous-espace* de l'espace X; on dit que la topologie de Y est induite par la topologie de X. Il découle immédiatement de cette définition que:

1) si $\mathscr{V} = \{V\}$ est une base de X, alors $\{V \cap Y\}$ est une base de Y;

2) chaque ensemble fermé de Y est l'intersection avec Y d'un ensemble fermé de X;

3) l'adhérence dans Y de tout ensemble $M \subset Y$ est l'intersection avec Y de l'adhérence de l'ensemble M dans X.

On déduit de 2):

I. *Si Y est fermé dans X, alors chaque ensemble $M \subset Y$, fermé dans Y, l'est également dans X.*

II. *Si $M_1 \subset M_2 \subset X$, alors l'adhérence dans M_1 de chaque ensemble $A \subset M_1$ est l'intersection avec M_1 de l'adhérence de l'ensemble A dans M_2.*

Démonstration. Soient $(\overline{A})_{M_1}$, $(\overline{A})_{M_2}$, $\overline{A}$ les adhérences de l'ensemble A dans M_1, M_2 et X respectivement. Alors $(\overline{A})_{M_1} = \overline{A} \cap M_1$ et $(\overline{A})_{M_2} \cap M_1 = (\overline{A} \cap M_2) \cap M_1 = \overline{A} \cap (M_2 \cap M_1) = \overline{A} \cap M_1 = (\overline{A})_{M_1}$.

EXEMPLES

1. Les ensembles $[a, b] = \{x\colon x \in \mathbf{R}^1,\ a \leqslant x \leqslant b\}$ et $(a, b) = \{x\colon x \in \mathbf{R}^1,\ a < x < b\}$, envisagés comme sous-espaces de l'espace $\mathbf{R}^1$, s'appellent respectivement *segment* et *intervalle*.

2. D'une manière analogue, les ensembles $[a_1, b_1; a_2, b_2] = \{x\colon x \in \mathbf{R}^2,\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$ et $(a_1, b_1; a_2, b_2) = \{x\colon x \in \mathbf{R}^2,\ a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\}$, envisagés comme sous-espaces de l'espace $\mathbf{R}^2$ s'appellent respectivement rectangles *ouvert* et *fermé*.

REMARQUE. Un ensemble ouvert (resp. fermé) de $Y \subset X$ peut ne pas être ouvert (resp. fermé) dans X. En particulier, si $X = \mathbf{R}^1$, $Y = [a, b]$ (voir l'exemple 1) ci-dessus), chaque ensemble $[a, \alpha] =$

$= \{x : x \in \mathbf{R}^1,\ a \leqslant x < \alpha\}$, $a < \alpha < b$, est ouvert dans Y, mais ne l'est pas dans X.

1.7. Applications d'espaces topologiques. Soient X et Y des espaces topologiques et f une application de X dans Y. On dit que l'application f est *continue en un point* $x_0 \in X$ si l'image inverse de tout voisinage $V(y_0)$ du point $y_0 = f(x_0)$ contient un certain voisinage $U(x_0)$ de x_0. L'application f de l'espace X dans l'espace Y est dite *continue* sur X si elle est continue en tout point $x \in X$.

Il découle immédiatement de cette définition et de la proposition I de 1.2, que:

I. *Une application f d'un espace X dans un espace Y est continue si et seulement si l'image inverse de chaque ensemble ouvert de Y est un ensemble ouvert de X (ou lorsque l'image inverse de chaque ensemble fermé de Y est un ensemble fermé de X).*

En outre,

II. *Si une application continue f d'un espace X dans un espace Y applique un ensemble $M \subset X$ dans un ensemble $N \subset Y$, alors elle applique également $\overline{M}$ dans $\overline{N}$.*

En effet, $f^{-1}(\overline{N})$ est fermé en vertu de I et contient M, et donc $\overline{M}$.

Si f est une application continue d'un espace X dans un espace Y, alors f s'appelle également *fonction continue* sur X à valeurs dans Y, tandis que $f(X)$ s'appelle *image continue* de X (dans Y). Si, en particulier, X est un segment: $X = [a, b]$ (voir l'exemple 1 de 1.5), alors l'image continue $f(X) = f([a, b])$ dans Y est dite *courbe continue* dans Y; le point $f(a)$ s'appelle *origine*, et de point $f(b)$ *extrémité* de cette courbe. On dit également que cette courbe *joint* le point $f(a)$ au point $f(b)$. Une courbe est dite *fermée* si son origine et son extrémité coïncident.

Une application f d'un espace X sur un espace Y s'appelle *homéomorphisme* (ou application topologique), si:

1) f est une bijection;

2) les applications f et f^{-1} sont continues.

Une application f d'un espace X dans un espace Y s'appelle *plongement de X dans Y* si f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$, ce dernier espace étant envisagé avec une topologie induite par celle de Y. Deux espaces topologiques X et Y sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de X sur Y. On tire immédiatement de la proposition I:

III. *Tout homéomorphisme de X sur Y applique les ensembles ouverts sur les ensembles ouverts, les fermés sur les fermés et l'adhérence de chaque ensemble de X sur l'adhérence de l'image de cet ensemble dans Y. Ainsi, tout homéomorphisme conserve les propriétés suivantes*

d'un ensemble: être fermé, ouvert ou être l'adhérence d'un certain ensemble.

Les propriétés qui se conservent par homéomorphismes sont dites *topologiques*, et la branche des mathématiques qui étudie les propriétés topologiques s'appelle *topologie*.

1.8. Espaces séparés. Un espace topologique X s'appelle *séparé* (ou *espace de Hausdorff*) s'il satisfait à l'axiome de séparation suivant: pour tout couple (x, y) de points distincts de X il existe un voisinage de x et un voisinage de y disjoints.

Ainsi les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ (voir les exemples de 1.1) sont séparés. L'espace $X = \{a, b\}$ dans l'exemple 4 de 1.1 n'est pas séparé. En effet, l'unique voisinage du point b est l'espace X tout entier, mais celui-ci coupe tout voisinage du point a.

I. *Si f et φ sont deux applications continues d'un espace X dans un espace séparé Y, alors l'ensemble $M_1 = \{x: f(x) \neq \varphi(x)\}$ est ouvert tandis que l'ensemble $M_2 = \{x: f(x) = \varphi(x)\}$ est fermé.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de démontrer que M_1 est ouvert, M_2 étant le complément de M_1 dans X. Soit $x \in M$, i.e. $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$. Il existe alors des voisinages disjoints $U = U(f(x_0))$ et $V = V(\varphi(x_0))$. Etant donné la continuité de f et φ, on peut trouver un voisinage $W(x_0)$ dont les images par les applications f et φ sont contenues respectivement dans U et V. Puisque U et V sont disjoints, on a $W(x_0) \subset M_1$. Ainsi, pour chaque point $x \in M_1$, il existe un voisinage $W(x_0) \subset M_1$, et en vertu de I de 1.2, M_1 est ouvert.

Corollaire. *Si f_j, φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, sont des applications continues d'un espace X dans un espace séparé Y, alors l'ensemble $M = \{x: f_j(x) = \varphi_j(x), j = 1, \ldots, m\}$ est fermé.*

En effet, M est l'intersection des ensembles $M_j = \{x: f_j(x) = \varphi_j(x)\}$, $j = 1, \ldots, m$, qui sont fermés en vertu de I.

II. *Si deux applications continues f et φ d'un espace X dans un espace séparé Y coïncident sur un ensemble $N \subset X$, alors elles coïncident également sur $\overline{N}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit M_2 le même ensemble que dans I. Alors $N \subset M_2$ et donc $\overline{N} \subset \overline{M}_2 = M_2$; par conséquent, $f(x) = \varphi(x)$ sur $\overline{N}$.

III. *Si f et φ sont deux fonctions réelles sur un espace séparé X, alors l'ensemble $M_1 = \{x: f(x) < \varphi(x)\}$ est ouvert, tandis que l'ensemble $M_2 = \{x: f(x) \geqslant \varphi(x)\}$ est fermé.*

Cette assertion se démontre comme la proposition I. Dans le cas considéré $Y = \mathbf{R}^1$.

IV. *Chaque ensemble fini dans un espace séparé est fermé.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de démontrer la proposition IV pour l'ensemble $\{x_0\}$ qui se réduit à un seul point x_0, puisque la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermé (propriété 3), 1.3). Mais si $x_1 \neq x_0$, il existe un voisinage $U(x_1)$ qui ne contient pas x_0 car X est séparé. Par conséquent, $X - \{x_0\}$ est ouvert et donc $\{x_0\}$ est fermé.

1.9. Produit topologique d'espaces. Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces topologiques. Désignons par $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ l'ensemble de toutes les suites finies $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, où $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, n$; en général, si $M_1, \ldots, M_n$ sont des ensembles quelconques dans $X_1, \ldots, X_n$ respectivement, alors $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ désigne l'ensemble de toutes les suites finies $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ que l'on obtient lorsque les points $x_1, \ldots, x_n$ parcourent indépendamment $M_1, \ldots, M_n$.

Introduisons sur $X_1 \times \ldots \times X_n$ une topologie en prenant pour base de voisinages d'un point $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ la famille de tous les ensembles $U_1(x_1^0) \times \ldots \times U_n(x_n^0)$, où $U_i(x_i^0)$ sont des voisinages quelconques appartenant à la base des voisinages du point x_i^0. Il est évident que les axiomes 1) à 3) pour la base des voisinages (voir 1.2) seront satisfaits, de sorte que $X_1 \times \ldots \times X_n$ se trouve être un espace topologique; on appelle cet espace *produit topologique* *) des espaces $X_1, \ldots, X_n$.

Dans la suite $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, x_j est la *j-ième coordonnée du point* x ou *projection du point* x *sur* X_j.

I. *L'application* $\{x_1, \ldots, x_n\} \to x_j$ *de l'espace* $X_1 \times \ldots \times X_n$ *sur* X_j *est continue.*

Cette assertion découle directement de la définition de la topologie sur $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Exemples et exercices

1. L'espace $\mathbf{R}^n$ est le produit topologique de n copies de l'espace $\mathbf{R}$ (voir les exemples 1 et 2 de 1.1). En effet, les intervalles (a_j, b_j) qui contiennent le point x_j en forment une base des voisinages, tandis que les parallélépipèdes $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ qui contiennent $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ forment une base des voisinages du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. D'une manière analogue, $\mathbf{C}^n$ est le produit topologique de n copies de l'espace $\mathbf{C}^1$ (voir l'exemple 3 de 1.1).

2. Démontrer que le produit topologique d'espaces séparés est également séparé.

---

*) Cette définition peut être généralisée au cas d'un nombre infini d'espaces (voir, par exemple, N. B o u r b a k i [3] ou M. N a ï m a r k [1]); cette généralisation ne nous sera pas nécessaire.

§ 2. Groupes topologiques

2.1. Définition du groupe topologique. L'ensemble G est appelé groupe topologique si :

a) G est un groupe ;

b) G est un espace topologique séparé *) ;

c) les fonctions $f_1(g) = g^{-1}$ et $f_2(g, h) = gh$ sont continues (la deuxième relativement au couple de points $g, h \in G$).

La condition c) signifie que f_1 est une application continue de G dans G, et f_2 une application continue de $G \times G$ dans G (voir 1.9). Il découle de la définition d'un groupe (voir 1.1, chap. I) qu'en réalité f_1 et f_2 sont des applications *sur* G.

Chaque groupe G devient un groupe topologique si on le munit d'une topologie discrète, puisque sur un espace topologique discret toutes les fonctions, en particulier, les fonctions f_1 et f_2 de la condition c), sont continues (voir I de 1.7). Un tel groupe topologique est dit *discret*.

I. *L'application $g \to g^{-1}$ est un homéomorphisme d'un espace topologique G sur G.*

En effet, l'application f_1: $g \to g^{-1}$ est continue en vertu de la condition c) ; l'application inverse de $g \to g^{-1}$ coïncide avec f_1 (parce que f_1: $g^{-1} \to (g^{-1})^{-1} = g$) ; donc elle est également continue.

On déduit de I que si U est un voisinage de l'élément neutre, U^{-1} est également un voisinage de l'élément neutre.

II. *Chaque voisinage U de l'élément neutre contient un voisinage symétrique de l'élément neutre, i.e. un voisinage V qui satisfait à la condition $V^{-1} = V$.*

En effet, ce voisinage sera l'ensemble $V = U \cap U^{-1}$.

III. *Chaque voisinage U de l'élément neutre contient un voisinage V de l'élément neutre tel que $VV \subset U$.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la continuité de la fonction $f_2(g_1, g_2) = g_1g_2$ pour $g_1 = e$, $g_2 = e$, il existe des voisinages V_1, V_2 de l'élément neutre tels que $V_1V_2 \subset U$; alors le voisinage $V = V_1 \cap V_2$ satisfait à la condition $VV \subset U$.

EXEMPLES

1. $\mathbf{R}^1$ est un groupe (voir l'exemple 1 de 1.1) et $\mathbf{R}^1$ avec la topologie naturelle est un espace topologique séparé. Il est évident que

*) En principe, la séparabilité de l'espace G (et même une assertion plus forte) découle des conditions a), c) et d'une condition plus faible que la condition de séparabilité : quels que soient deux éléments distincts $g_1, g_2 \in G$, il existe pour chacun d'eux un voisinage qui ne contient pas l'autre (voir, par exemple, L. P o n t r i a g u i n e [1], § 17).

la condition c) est vérifiée ; il en découle que $f_1(x) = -x$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sont des fonctions continues. Par conséquent, $\mathbf{R}^1$ avec la topologie naturelle est un groupe topologique. D'une manière analogue, $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$, munis de la topologie naturelle, sont des groupes topologiques.

2. $\mathbf{R}_0^1$ est un groupe et $\mathbf{R}_0^1$ est un espace topologique pour la topologie naturelle (la topologie induite par la topologie de $\mathbf{R}^1$). La condition c) étant satisfaite, $f_1(x) = x^{-1}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2$ sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}_0^1$ et $\mathbf{R}_0^1 \times \mathbf{R}_0^1$. Par conséquent, $\mathbf{R}_0^1$, muni de la topologie naturelle, est un groupe topologique. D'une manière analogue, $\mathbf{R}_0^+$ et $\mathbf{C}_0^1$ sont des groupes topologiques si on les prend avec la topologie naturelle.

3. Groupe linéaire général $GL(n, \mathbf{C})$. Chaque élément

$$g = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{Vmatrix} \in GL(n, \mathbf{C})$$

peut être envisagé comme un point $(g_{11}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{2n}, g_{n1}, \dots, g_{nn})$ de l'espace $\mathbf{C}^{n^2}$, et donc le groupe tout entier $GL(n, \mathbf{C})$, comme un sous-ensemble de $\mathbf{C}^{n^2}$. Munissons $GL(n, \mathbf{C})$ de la topologie induite par la topologie naturelle de $\mathbf{C}^{n^2}$ (voir l'exemple 3 de 1.1), et appelons-la *topologie naturelle* du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Prouvons la continuité des fonctions f_1 et f_2 de la condition c). Soit G_{jl} le complément algébrique de l'élément g_{jl} dans la matrice g. Par définition de la topologie sur $\mathbf{C}^{n^2}$ et $GL(n, \mathbf{C})$, la continuité des fonctions f_1 et f_2 signifie que sont continus sur $GL(n, \mathbf{C})$ leurs éléments matriciaux

$$\begin{aligned} f_{1jl} &= (g^{-1})_{jl} = \frac{G_{lj}}{\det g}, \\ f_{2jl} &= (gh)_{jl} = \sum_{s=1}^{n} g_{js}h_{sl}, \quad j, \ l = 1, \ \dots, \ n. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Mais G_{jl} et $\det g$ sont des polynômes en g_{jl} et donc sont continus sur $\mathbf{C}^{n^2}$ et aussi sur $GL(n, \mathbf{C})$. En outre, $\det g \neq 0$ sur $GL(n, \mathbf{C})$; par conséquent, les f_{1jl} sont continues sur $GL(n, \mathbf{C})$. D'autre part, la fonction $f_{2jl} = \sum_{s=1}^{n} g_{js}h_{sl}$ est un polynôme en g_{jl}, h_{jl}; elle est donc continue sur tout l'espace $\mathbf{C}^{n^2} \times \mathbf{C}^{n^2}$ et par conséquent sur $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C})$. La condition a) est satisfaite; ainsi $GL(n, \mathbf{C})$, muni de la topologie naturelle, est un groupe topologique.

On définit d'une manière analogue la topologie naturelle sur $GL(n, \mathbf{R})$ et l'on démontre que $GL(n, \mathbf{R})$ est un groupe topologique pour cette topologie ; il suffit simplement de remplacer $\mathbf{C}^{n^2}$ par $\mathbf{R}^{n^2}$.

On déduit de la définition de la topologie sur $GL(n, \mathbf{C})$ que les ensembles

$$W(g^0, \varepsilon) = \{g: g \in GL(n, \mathbf{C}), |g_{jl} - g^0_{jl}| < \varepsilon, \quad j, l = 1, 2, \ldots, n\}$$

constituent pour cette topologie une base de voisinages de l'élément $g^0 \in G$. Notons également que $GL(n, \mathbf{C})$ et $GL(n, \mathbf{R})$ sont des ensembles ouverts dans $\mathbf{C}^{n^2}$ et $\mathbf{R}^{n^2}$ respectivement. En effet,

$$GL(n, \mathbf{C}) = \{g: g \in \mathbf{C}^{n^2}, \det g \neq 0\},$$

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{g: g \in \mathbf{R}^{n^2}, \det g \neq 0\},$$

et la dernière assertion découle de I, 1.8 et de la continuité de la fonction $\det g$. Par la suite, si nous n'indiquons pas le contraire, tous les groupes des exemples 1) à 3) seront envisagés comme des groupes topologiques avec la topologie naturelle.

2.2. Translations sur un groupe topologique.

I. *La translation à droite $g \to gg_0$ et la translation à gauche $g \to g_0g$ sur un groupe topologique G sont des homéomorphismes de G sur G.*

Démonstration. La translation à droite $g \to gg_0$ est une bijection de G sur G; elle est continue en vertu de la condition c) de 2.1. L'application inverse à la translation $g \to gg_0$ est la translation $g \to gg_0^{-1}$; elle est donc également continue; par conséquent, la translation à droite est un homéomorphisme. On démontre d'une manière analogue que la translation à gauche est un homéomorphisme.

II. *Si $\{W(g)\}$ est une base des voisinages de l'élément g d'un groupe topologique G, alors $\{W(g)g_0\}$ et $\{g_0W(g)\}$ sont des bases des voisinages des éléments gg_0 et g_0g respectivement. En particulier, si $\{W(e)\}$ est une base des voisinages de l'élément neutre e du groupe G, alors $\{W(e)g_0\}$ et $\{g_0W(e)\}$ sont des bases des voisinages de l'élément $g_0 \in G$.*

Cette assertion découle directement de I et III, 1.7. On déduit de la proposition II que la topologie sur un groupe est entièrement déterminée par la donnée de la base des voisinages $\{W(e)\}$ de l'élément neutre; les bases de voisinages des autres éléments s'obtiennent de cette base par translation à droite ou à gauche.

2.3. Sous-groupes d'un groupe topologique. Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe du groupe G. Munissons H d'une topologie induite par la topologie de G (voir 1.6). La condition c) de 2.1 sera alors satisfaite sur H puisqu'elle est satisfaite sur tout le groupe G. Par conséquent, H, dont la topologie est ainsi définie, sera un groupe topologique. Par la suite, si nous n'indiquons pas le contraire, *un sous-groupe d'un groupe topologique G sera toujours supposé muni de la topologie induite par celle de G.*

Un sous-groupe H du groupe G est dit *fermé* si c'est un sous-ensemble fermé de l'espace G. Un groupe topologique G s'appelle *groupe linéaire* s'il est isomorphe (comme groupe topologique) à un sous-groupe des groupes $GL(n, \mathbf{C})$ ou $GL(n, \mathbf{R})$.

EXEMPLES

1. $GL(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbf{C})$; il est fermé en vertu du corollaire de 1.8. En effet,

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{g:\ g \in GL(n, \mathbf{C}),\ \operatorname{Im} g_{jl} = 0,\ j,\ l = 1, \ldots, n\}$$

et $\operatorname{Im} g_{jl}$ sont des fonctions continues sur $GL(n, \mathbf{C})$.

2. $SL(n, \mathbf{C})$ est un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbf{R})$; il est fermé puisque

$$SL(n, \mathbf{C}) = \{g:\ g \in GL(n, \mathbf{C}),\quad \det g = 1\}$$

et $\det g$ est une fonction continue sur $GL(n, \mathbf{C})$. D'une manière analogue, $SL(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe fermé du groupe $GL(n, \mathbf{R})$, et donc également du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

3. $U(n)$ et $SU(n)$ sont des sous-groupes des groupes $GL(n, \mathbf{C})$ et $SL(n, \mathbf{C})$ respectivement. Ils sont fermés puisque

$$U(n) = \left\{g:\ g \in GL(n, \mathbf{C}),\ \sum_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl} = \delta_{jl},\ j,\ l = 1, \ldots, n\right\},$$

$$SU(n) = \left\{g:\ g \in SL(n, \mathbf{C}),\ \sum_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl} = \delta_{jl},\ j,\ l = 1, \ldots, n\right\},$$

où

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l, \\ 0 & \text{si } j \neq l, \end{cases}$$

tandis que les fonctions $\sum_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl}$, $j,\ l = 1, \ldots, n$ sont continues sur $GL(n, \mathbf{C})$ et $SL(n, \mathbf{C})$.

2.4. Espace quotient. Groupe quotient. Soient G un groupe topologique et H son sous-groupe. Posons $\widetilde{G} = G/H$, où G/H est l'espace des classes d'équivalence à droite du groupe G par H, et désignons par φ l'application canonique de G sur $\widetilde{G}$. Introduisons une topologie sur $\widetilde{G}$ en prenant pour ouverts de $\widetilde{G}$ les images $\varphi(U)$ d'ouverts U de G par φ. Il est évident que les conditions 1) à 3) de 1.1 seront satisfaites; par conséquent, la famille de tous les $\varphi(U)$ possibles détermine une topologie sur $\widetilde{G}$. Par la suite, nous supposons toujours que $\widetilde{G}$ est muni de cette topologie.

Une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite *ouverte* si l'image de chaque ensemble ouvert dans X est ouvert.

I. *L'application canonique φ d'un espace G sur $\widetilde{G} = G/H$ est ouverte et continue.*

Démonstration. Par définition même de la topologie sur $\widetilde{G}$, φ est ouverte. En outre, supposons que $\widetilde{U}$ est un ouvert dans $\widetilde{G}$. Par définition de la topologie sur $\widetilde{G}$, on a $\widetilde{U} = \varphi(U)$, où U est ouvert dans G. Par conséquent, l'image inverse de l'ensemble $\widetilde{U}$

$$\varphi^{-1}(\widetilde{U}) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$$

est ouverte, étant la réunion d'ouverts Uh (voir I de 2.2); par conséquent φ est continue.

II. *Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe topologique G, l'espace quotient $\widetilde{G} = G/H$ est séparé.*

Démonstration. Soient $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2 \in \widetilde{G}$, $\widetilde{g}_1 \neq \widetilde{g}_2$. Soient $g_1 \in \widetilde{g}_1$, $g_2 \in \widetilde{g}_2$. Puisque $\widetilde{g}_1 \neq \widetilde{g}_2$, on a $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Comme H est fermé, il doit exister un voisinage U de l'élément $g_1^{-1}g_2$ disjoint de H:

$$U \cap H = \varnothing. \tag{2.4.1}$$

D'autre part, en vertu de la continuité des fonctions $f_1(g) = g^{-1}$ et $f_2(g, h) = gh$ (voir 2.1), il existe des voisinages U_1 et U_2 des éléments g_1 et g_2 tels que

$$U_1^{-1}U_2 \subset U. \tag{2.4.2}$$

Posons $\widetilde{U}_1 = \varphi(U_1)$, $\widetilde{U}_2 = \varphi(U_2)$; par définition de la topologie sur $\widetilde{G}$, les ensembles $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{U}_2$ sont des voisinages des classes $\widetilde{g}_1$ et $\widetilde{g}_2$. Démontrons que $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$. Supposons le contraire; soit

$$\widetilde{g}_0 \in \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2). \tag{2.4.3}$$

On tire de (2.4.3) l'existence d'éléments

$$g_0, \ g_0' \in \widetilde{g}_0 \tag{2.4.4}$$

tels que $g_0 \in U_1$, $g_0' \in U_2$; par conséquent

$$g_0^{-1}g_0' \in U_1^{-1}U_2. \tag{2.4.5}$$

D'autre part, on déduit de (2.4.4) que

$$g_0^{-1}g_0' \in H. \tag{2.4.6}$$

Mais les relations (2.4.5) et (2.4.6) contredisent (2.4.1); par conséquent $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$, ce qui démontre que l'espace $\widetilde{G}$ est séparé.

III. *Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Alors pour chaque $g_0 \in G$ l'application $\widetilde{g}_0$: $\widetilde{g} \to \widetilde{g}g_0$ est un homéomorphisme de l'espace $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}$.*

Démonstration. L'application $g \to \tilde{g}g_0$ est une bijection de $\tilde{G}$ sur $\tilde{G}$ (voir 1.7, chapitre I); démontrons qu'elle est continue.

Soit $\tilde{U}$ un ensemble ouvert de $\tilde{G}$; il faut démontrer que son image inverse $\tilde{U}\overline{g_0^{-1}}$ est ouverte dans $\tilde{G}$. Mais $\tilde{U} = \varphi(U)$, où U est ouvert dans G, et par définition de la transformation $\bar{g}_0$, on a

$$\tilde{U}\overline{g_0^{-1}} = \varphi(Ug_0^{-1}),$$

où Ug_0^{-1} est ouvert en vertu de I, 2.2; par conséquent, $\tilde{U}\overline{g_0^{-1}}$ est ouvert dans $\tilde{G}$ et $\bar{g}_0$ est continue. En appliquant ce résultat à g_0^{-1} à la place de g_0, nous voyons que $(\bar{g}_0)^{-1} = \overline{g_0^{-1}}$ est continue. Ainsi, l'application $\bar{g}_0$ est un homéomorphisme.

D'une manière analogue on peut définir une topologie dans l'espace des classes d'équivalence à gauche (par un sous-groupe donné); on a alors des propositions analogues aux propositions II et III.

IV. *Si H est un sous-groupe distingué du groupe topologique G, alors G/H est un groupe topologique.*

Démonstration. G/H est un groupe et G/H est un espace topologique séparé. Il reste donc à démontrer que G/H satisfait à la condition c), 2.1. Posons à nouveau $\tilde{G} = G/H$ et désignons toujours par φ l'application canonique $G \to \tilde{G}$. Supposons que $\tilde{U}$ est un voisinage de l'élément $\tilde{g}_1^{-1} \in \tilde{G}$. Il existe alors un élément $g_1^{-1} \in \tilde{g}_1^{-1}$ et un voisinage U de g_1^{-1} tels que $\tilde{U} = \varphi(U)$. En vertu de la continuité de la fonction $f(g) = g^{-1}$, on peut trouver un voisinage U_1 de l'élément g_1 tel que

$$U_1^{-1} \subset U. \tag{2.4.7}$$

Posons $\tilde{U}_1 = \varphi(U_1)$; alors $\tilde{U}_1$ est un voisinage de l'élément $\tilde{g}_1$ et d'après (2.4.7), on a

$$\tilde{U}_1^{-1} = \varphi(U_1)^{-1} \subset \varphi(U) = \tilde{U}.$$

Par conséquent, la fonction $f_1(\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1}$ est continue sur $\tilde{G}$. En outre, supposons que U est un voisinage de l'élément $\tilde{g}\tilde{h}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h} \in \tilde{G}$. On peut alors trouver des éléments $g \in \tilde{g}$, $h \in \tilde{h}$ et un voisinage U de l'élément gh tels que $\tilde{U} = \varphi(U)$. En vertu de la continuité de la fonction $f_2(g, h) = gh$, il existe des voisinages U_1, U_2 des éléments g, h tels que

$$U_1U_2 \subset U. \tag{2.4.8}$$

Posons $\tilde{U}_1 = \varphi(\tilde{U}_1)$, $\tilde{U}_2 = \varphi(U_2)$; alors $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ sont des voisinages des éléments $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ et, d'après (2.4.8), on a

$$\tilde{U}_1\tilde{U}_2 = \varphi(U_1)\,\varphi(U_2) = \varphi(U_1U_2) \subset \varphi(U) = \tilde{U}.$$

Par conséquent, la fonction $f_2(\tilde{g}, \tilde{h}) = \widetilde{gh}$ est continue sur $\tilde{G}$. La condition c) de 2.1 se trouve être vérifiée et $\tilde{G}$ est un groupe topologique.

2.5. Homomorphisme et isomorphisme de groupes topologiques. Soient G et G' des groupes topologiques. L'application f de G dans G' s'appelle *homomorphisme continu de* G *dans* G', si

a) f est une application continue de l'espace G dans l'espace G';

b) f est un homomorphisme du groupe G dans le groupe G'.

Si en outre $f(G) = G'$, alors on dit que f est un *homomorphisme continu* du groupe G *sur* le groupe G'.

I. *Si H est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe topologique G, alors l'application canonique φ du groupe G sur le groupe quotient G/H est un homomorphisme ouvert continu de G sur G/H.*

En effet, φ est un homomorphisme (voir 1.6, chapitre I) et φ est ouvert et continu en vertu de I de 2.4.

L'application f d'un groupe G dans un groupe G' s'appelle *monomorphisme continu de* G *dans* G', si

a') f est une application continue de l'espace G dans l'espace G';

b') f est un monomorphisme du groupe G dans le groupe G'.

Si en outre $f(G) = G'$, alors f s'appelle *isomorphisme continu du groupe* G *sur le groupe* G'.

L'application f d'un groupe G dans un groupe G' s'appelle *monomorphisme topologique de* G *dans* G'', si

a'') f est un homéomorphisme de l'espace G sur un sous-espace de G';

b'') f est un monomorphisme du groupe G dans le groupe G'.

Si en outre on a $f(G) = G'$, alors f s'appelle *isomorphisme topologique du groupe* G *sur le groupe* G'. Deux groupes topologiques G et G' sont dits *topologiquement isomorphes* s'il existe un isomorphisme topologique de G sur G'.

II. 1. *Si f est un homomorphisme continu d'un groupe G sur un groupe G' et $H = \ker f$, alors:*

a) *H est un sous-groupe distingué fermé du groupe G;*

b) *$f = \psi\varphi$, où φ est l'homomorphisme canonique du groupe G sur le groupe $\tilde{G} = G/H$, tandis que ψ est l'isomorphisme continu du groupe $\tilde{G}$ sur le groupe G'.*

2. *Si en outre f est ouvert, alors ψ est un isomorphisme topologique du groupe $\tilde{G} = G/H$ sur le groupe G', de sorte que $\tilde{G}$ et G' sont topologiquement isomorphes.*

Démonstration. 1. H est fermé, étant image inverse d'un point (l'élément neutre e' du groupe G'). En outre, la relation $f = \psi\varphi$, où φ est l'homomorphisme canonique de G sur $\tilde{G} = G/H$,

et ψ est l'isomorphisme de $\widetilde{G}$ sur G', a été démontré dans III de 1.5, chapitre I. Par conséquent, pour prouver l'assertion b) il ne reste qu'à montrer la continuité de ψ. Soit U' un ensemble ouvert de G'. Posons $\psi^{-1}(U') = \widetilde{U}$; il s'agit de démontrer que $\widetilde{U}$ est ouvert. Posons $f^{-1}(U') = U$; U est ouvert car f est une application continue et $U' = f(U) = (\psi\varphi)(U) = \psi(\varphi(U))$. Puisque ψ est bijectif (ψ est un isomorphisme!), on en tire

$$\widetilde{U} = \psi^{-1}(U') = \varphi(U),$$

de sorte que $\widetilde{U} = \varphi(U)$ est ouvert d'après la définition de la topologie dans $\widetilde{G}$.

2. Supposons que f est une application continue et ouverte; démontrons que ψ est un isomorphisme topologique. D'après ce que nous venons de démontrer (l'assertion 1), ψ est continu; il reste donc à démontrer que ψ^{-1} est continu.

Soit $\widetilde{U}$ un ensemble ouvert de $\widetilde{G}$. Posons

$$U' = (\psi^{-1})^{-1}(\widetilde{U}) = \psi(\widetilde{U}); \tag{2.5.1}$$

il faut démontrer que U' est ouvert dans G'. Par définition de la topologie dans $\widetilde{G}$,

$$\widetilde{U} = \varphi(U), \tag{2.5.2}$$

où U est ouvert dans G. Mais alors d'après (2.5.1)

$$U' = \psi(\varphi(U)) = f(U),$$

de sorte que U' est ouvert dans G', f étant ouverte.

Remarque. Pour de larges classes de groupes topologiques, en particulier pour $GL(n, C)$ et tous ses sous-groupes fermés, la continuité d'un homomorphisme implique déjà qu'il est ouvert (voir L. Pontriaguine [1], § 20, théorème 12).

L'isomorphisme topologique d'un groupe topologique G sur G s'appelle *automorphisme topologique* (comparer avec 1.6, chapitre I). Par exemple, l'application

$$g \to g_1^{-1} g g_1 \tag{2.5.3}$$

est un automorphisme topologique (I de 2.2) pour chaque $g_1 \in G$. Les automorphismes topologiques donnés par la formule (2.5.3) sont dits *intérieurs*, tandis que tous les autres sont dits *extérieurs*.

Par la suite, appliqués aux groupes topologiques, les termes *homomorphisme*, *monomorphisme*, *automorphisme*, *isomorphisme* signifieront respectivement *homomorphisme continu*, *monomorphisme topologique*, *automorphisme topologique* et *isomorphisme topologique*. Lorsqu'il s'agira d'homomorphisme, de monomorphisme, d'automorphisme et d'isomorphisme dans le sens des définitions du chapitre I, nous ajouterons l'adjectif algébrique à ces termes.

11—0883

EXEMPLES ET EXERCICES

1. Démontrer que : a) l'application $f: g \to \det g$ (exemple 1 de 1.6, chapitre I) est un homomorphisme ouvert continu du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ sur le groupe $\mathbf{C}_0^1$; b) le groupe quotient $\widetilde{G} = GL(n, \mathbf{C})/SL(n, \mathbf{C})$ est topologiquement isomorphe au groupe $\mathbf{C}_0^1$.

2. Démontrer que le groupe G_X pour $\dim X = n$, et le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ sont topologiquement isomorphes (voir l'exemple 3 de 1.6, chapitre I).

3. Le tore $\mathcal{T}^1$ de dimension 1 est isomorphe au groupe quotient $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ (voir l'exemple 4 de 1.6, chapitre I). Définissons une topologie sur $\mathcal{T}^1$ en considérant comme ouverts les ensembles de $\mathcal{T}^1$ qui sont les images d'ensembles ouverts de $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ par cet isomorphisme. Alors $\mathcal{T}^1$ deviendra un groupe topologique et le groupe $\mathcal{T}^1$ sera topologiquement isomorphe au groupe $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$. Décrire explicitement la topologie de $\mathcal{T}^1$. En se servant de l'isomorphisme des groupes $\mathcal{T}^1$ et Γ^1 (Γ^1 est le groupe des rotations du cercle, voir l'exemple 1 de 1.7, chapitre I), définir une topologie sur Γ^1 de manière à ce que $\mathcal{T}^1$ et Γ^1 soient topologiquement isomorphes. Par la suite, si nous n'indiquons pas le contraire, $\mathcal{T}^1$ et Γ^1 sont envisagés comme des groupes topologiques munis de topologies ainsi définies, topologies qui seront dites *naturelles*. Démontrer que les espaces $\mathcal{T}^1$ et Γ^1 sont homéomorphes au cercle avec sa topologie naturelle.

4. Démontrer que *si un homomorphisme f d'un groupe topologique G dans un groupe topologique G_1 est continu en l'élément neutre $e \in G$, alors f est continu.*

Indication. Se servir de la proposition I de 2.2.

2.6. Groupes de transformations d'un espace topologique. On appelle *transformation d'un espace topologique X* tout homéomorphisme de X sur X. Le produit de deux homéomorphismes de l'espace X ainsi que l'application inverse d'un homéomorphisme de X sont également des homéomorphismes de cet espace. En outre, l'application identique est évidemment un homéomorphisme. Il s'ensuit que *la famille de toutes les transformations d'un espace topologique X est un groupe*; son élément neutre est l'application identique. Chaque sous-groupe G de ce groupe s'appelle *groupe de transformations* de l'espace X, et le couple (X, G) *espace topologique X à groupe de transformations G.*

Chaque transformation d'un espace topologique X est également une transformation de l'ensemble X (voir 1.5, chapitre I); par conséquent, nous pouvons appliquer aux transformations des espaces topologiques les notations, la terminologie et les résultats de 1.5, 1.7, chapitre I. En particulier, nous nous servirons des notations à gauche : $x \to gx$ et à droite $x \to xg$ pour les transformations g. S'il faut l'expliciter, nous désignerons par G_r le groupe des trans-

formations à droite, et par G_l le groupe des transformations à gauche. Par la suite, pour fixer les idées, nous considérerons les groupes des transformations à droite et nous écrirons G à la place de G_r. Les résultats obtenus pour G_r resteront valables pour G_l, à condition de faire un changement de notation approprié.

Souvent le groupe G de transformations de l'espace X est un groupe topologique. Cette considération, ainsi que le fait que les transformations de l'espace X sont des homéomorphismes de cet espace, nous amène à envisager des compléments de caractère topologique aux résultats de 1.5, 1.7 du chapitre I.

Chaque groupe topologique G peut être représenté comme groupe de transformations de la manière suivante.

Posons $X = G$ et faisons correspondre à chaque élément $g_0 \in G$ la translation à droite $\hat{g}_0$: $g \to gg_0$. Alors $\hat{g}_0$ est un homéomorphisme de l'espace G (I de 2.2) et l'application $g_0 \to \hat{g}_0$ est un isomorphisme algébrique du groupe G sur le groupe $\hat{G}$ de toutes les translations à droite (II de 1.6, chapitre I). Introduisons une topologie sur $\hat{G}$ en considérant comme ouverts dans $\hat{G}$ les ensembles qui sont les images par l'application $g_0 \to \hat{g}_0$ d'ensembles ouverts dans G. On voit facilement que $\hat{G}$ est alors un groupe topologique, tandis que l'application $g_0 \to \hat{g}_0$ devient un isomorphisme topologique du groupe G sur le groupe topologique $\hat{G}$. Ainsi:

I. *Chaque groupe topologique G est isomorphe au groupe topologique $\hat{G}$ des translations à droite sur G.*

Une assertion analogue est valable pour le groupe des translations à gauche.

II. *Soient G un groupe topologique, H son sous-groupe fermé et $\tilde{G} = G/H$ l'espace topologique des classes d'équivalence à droite du groupe G par le sous-groupe H. Alors:*

1) *pour chaque $g_0 \in G$ l'application $\bar{g}_0$ définie par la formule*

$$\{g\}\,\bar{g}_0 = \{gg_0\}, \tag{2.6.1}$$

où $\{g\} \in \tilde{G}$, est une transformation de l'espace topologique $\tilde{G}$;

2) *$\tilde{G}$ est un espace homogène relativement au groupe $\bar{G}$ de toutes les transformations $\bar{g}_0$, $g_0 \in G$;*

3) *l'application f: $g \to \bar{g}$ est un homomorphisme du groupe G sur le groupe $\bar{G}$ et le noyau N de cet homomorphisme est un sous-groupe distingué (du groupe G) contenu dans H.*

D é m o n s t r a t i o n. L'assertion 1) coïncide avec III de 2.4, tandis que 2) et 3) sont démontrés dans 1.7, chapitre I.

Supposons maintenant que le noyau N de l'homomorphisme $f: g \to \overline{g}$ est fermé dans G. Posons $\dot{G} = G/N$. Alors $\dot{G}$ est un groupe topologique (IV de 2.4) et $\dot{f} = \dot{\psi}\dot{\varphi}$, où $\dot{\varphi}$ est l'application canonique de G sur $\dot{G}$, tandis que $\dot{\psi}$ est l'isomorphisme algébrique de $\dot{G}$ sur $\overline{G}$ (1.7, chapitre I). Définissons une topologie sur $\overline{G}$ en prenant pour ouverts les ensembles de $\overline{G}$ qui sont les images par l'isomorphisme $\dot{\psi}$ des ensembles ouverts de $\dot{G}$. Il est alors évident que $\overline{G}$ est un groupe topologique, topologiquement isomorphe au groupe $\dot{G}$. Par la suite nous supposons toujours (à condition, bien entendu, que N soit fermé) que $\overline{G}$ est un groupe topologique avec la topologie définie ci-dessus. En particulier, si $N = \{e\}$, alors $\dot{G} = G$ et $\overline{G}$ est topologiquement isomorphe au groupe G.

III. *Soient* (X, G) *un espace topologique à groupe topologique des translations à droite* G, *homogène relativement à* G, H *le sous-groupe stationnaire d'un point donné* $x_0 \in X$, *et* f *une application qui fait correspondre à chaque point* $x \in X$ *la classe d'équivalence à droite* $\widetilde{g} = \{g\} \in G/H$ *de tous les éléments* g *de* G *pour lesquels* $x_0 g = x$. *Supposons que la condition suivante est vérifiée:*

α) *l'application* $\omega : g \to x_0 g$ *est une application continue et ouverte du groupe* G *dans* X.

Alors f *est un homéomorphisme de l'espace* X *sur l'espace* $\widetilde{G} = G/H$, *qui applique chaque transformation* $g_0 \in G$ *dans la transformation* $\overline{g}_0$ *de l'espace* $\widetilde{G}$ *définie par la formule*

$$\{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\} \quad pour \quad \{g\} \in \widetilde{G},$$

de sorte que $f(xg) = f(x)\,\overline{g}$. *L'application obtenue* $\psi: g_0 \to \overline{g}_0$ *est un isomorphisme topologique du groupe* G *sur le groupe* $\overline{G}$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous avons démontré dans III de 1.7, chapitre I, que f est une bijection et que ψ est un isomorphisme du groupe G sur le groupe $\overline{G}$. Il ne reste donc qu'à démontrer que f et ψ sont des homéomorphismes. Notons tout d'abord que H est fermé, étant l'image inverse du point x_0 par l'application continue ω (voir la condition α)); par conséquent, $\widetilde{G} = G/H$ est un espace topologique séparé (II de 2.4). Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de $\widetilde{G}$; alors $\widetilde{U} = \varphi(U)$, où U est un ouvert de G, tandis que φ est l'application canonique $G \to \widetilde{G}$ (voir 2.4). Mais il découle des définitions des applications f et ω que

$$f\omega = \varphi \tag{2.6.2}$$

et donc $f\omega(U) = \varphi(U) = \widetilde{U}$. D'où l'on tire que $f^{-1}(\widetilde{U}) = \omega(U)$ est ouvert, car ω est une application ouverte (d'après la condition α)); par conséquent f est continue.

Supposons maintenant que V est un ouvert de X. Posons $U = \omega^{-1}(V)$; alors U est un ouvert de G en vertu de la continuité de l'application ω. D'autre part, on déduit de (2.6.2) que $f(V) = f\omega(U) = \varphi(U)$ est ouvert dans $\widetilde{G}$, par définition de la topologie sur $\widetilde{G}$. Ainsi f^{-1} est également continue et l'application f est un homéomorphisme. Il découle de la définition même de la topologie sur $\overline{G}$ (voir ci-dessus) que ψ est également un homéomorphisme.

La proposition III que nous venons de démontrer nous amène à la définition suivante:

Deux espaces homogènes X et X' à groupes de transformations topologiques G, G' respectivement s'appellent *topologiquement équivalents* s'il existe: a) un isomorphisme topologique $\varphi: g \to g'$ du groupe G sur le groupe G' ; b) un homéomorphisme $f: g \to g'$ de l'espace X sur X', tels que $x \to x'$ implique $xg \to x'g'$, i.e. tels que

$$f(xg) = f(x)\,\varphi(g).$$

La proposition III signifie que *chaque espace homogène X à groupe de transformations topologique G, qui satisfait à la condition α) pour un certain $x_0 \in X$, est topologiquement isomorphe à l'espace $\widetilde{G} = G/H$ à groupe de transformations $\overline{G}$, où H est le sous-groupe stationnaire du point $x_0 \in X$.* On identifie généralement X avec $\widetilde{G}$, et G avec $\overline{G}$; cette identification s'appelle *réalisation canonique* du couple (X, G), et le couple $(\widetilde{G}, \overline{G})$ lui-même est appelé *modèle canonique* de l'espace homogène.

Ainsi, *chaque espace homogène satisfaisant à la condition α) pour un certain $x_0 \in X$ est topologiquement isomorphe à un certain modèle canonique.* S'agissant des espaces topologiques homogènes à groupes de transformations topologiques, le mot *isomorphisme* signifiera toujours *isomorphisme topologique*. Lorsqu'il s'agira de l'isomorphisme dans le sens de la définition de 1.7, chapitre I, nous ajouterons à ce mot l'adjectif « *algébrique* ».

REMARQUE. *La condition α) de la proposition* III *implique qu'en fait pour chaque $x \in X$ la correspondance $\omega_x: g \to xg$ est une application ouverte du groupe G dans X.* En effet, supposons la condition α) satisfaite pour le point x_0. Puisque X est homogène, il existe un élément $g_0 \in G$ tel que $x_0 g_0 = x$. Alors, en vertu de la relation $xg = (x_0 g_0)\, g = x_0 (g_0 g)$, l'application ω_x est ouverte, étant le produit de l'homéomorphisme $g \to g_0 g$ (I de 2.1) par l'application ouverte ω.

§ 3. Définition d'une représentation de dimension finie d'un groupe topologique; exemples

3.1. Fonctions continues sur un groupe topologique. Soit $f(g)$ une fonction numérique définie sur un groupe topologique G; la fonction $f(g)$ est dite *continue* sur G, si $f(g)$ est continue sur l'espace topologique G.

Soient, en outre, X un espace vectoriel complexe de dimension finie, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ($n = \dim X$) une base fixe dans X, $f(g)$ une fonction vectorielle à valeurs dans X, définie sur le groupe topologique G, et $f_1(g), \ldots, f_n(g)$ les composantes de la fonction f dans la base $e_1, \ldots, e_n$. La fonction $f(g)$ est dite *continue* sur le groupe G si les fonctions numériques $f_1(g), \ldots, f_n(g)$ sont continues sur G. Cette définition ne dépend pas du choix de la base $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ dans X. En effet, les composantes $f'_j(g)$ de la fonction $f(g)$ dans une autre base $e'_1, \ldots, e'_n$ sont des combinaisons linéaires des composantes $f_j(g)$ à coefficients constants; par conséquent, on déduit de la continuité des fonctions f_j celle des fonctions f'_j.

Supposons enfin que $A(g)$ est une fonction sur G, dont les valeurs sont des opérateurs linéaires dans X. La fonction $A(g)$ est dite *continue* sur G si $A(g)x$ est une fonction vectorielle continue sur G pour tout $x \in X$. On déduit facilement de cette définition que:

I. *La continuité de la fonction $A(g)$ est équivalente à la continuité de ses éléments matriciaux $a_{jl}(g)$ dans une base $e_1, \ldots, e_n$ de X, et donc dans une base quelconque.*

En effet, la continuité de la fonction $A(g)x$ est équivalente à la continuité des fonctions vectorielles

$$A(g)e_l = \sum_{j=1}^{n} a_{jl}(g)e_j,$$

et donc des fonctions numériques $a_{jl}(g)$.

3.2. Définition d'une représentation de dimension finie d'un groupe topologique. Soient G un groupe topologique, et X un espace complexe de dimension finie non nul. On appelle *représentation* du groupe topologique G dans l'espace X une application T qui fait correspondre à chaque élément g du groupe G l'opérateur linéaire $T(g)$ dans l'espace X de manière à satisfaire les conditions suivantes:

1) $T(e) = 1$, où 1 est l'opérateur unité dans X;
2) $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$;
3) $T(g)$ est une fonction opératoire continue sur G.

En comparant cette définition avec celle donnée dans 2.1, chapitre I, on trouve ici la condition 3) de continuité *) de la fonction opératoire $T(g)$, qui va jouer un rôle essentiel par la suite. Quant aux représentations répondant à la définition de 2.1 du chapitre I (i.e. celles pour lesquelles la condition 3) n'est pas nécessairement satisfaite) elles seront dorénavant appelées représentations *algébriques*.

I. *Si T est une représentation d'un groupe topologique G dans un espace X, alors sa restriction à un sous-groupe du groupe G, ainsi que sa restriction à un sous-espace invariant de l'espace X, satisfait à la condition* 3), *i.e. est également une représentation de groupe topologique.*

Il en découle que toutes les définitions et les propositions du § 2, chapitre I, sont applicables aux représentations des groupes topologiques.

II. *Les éléments matriciaux $t_{jl}(g)$ et le caractère $\chi_T(g)$ d'une représentation finie d'un groupe topologique G sont des fonctions numériques continues sur G.*

La continuité des éléments matriciaux $t_{jl}(g)$ se déduit de la condition 3) et de la proposition I de 3.1, et celle du caractère $\chi_T(g)$ découle de la formule

$$\chi_T(g) = \sum_{j=1}^{n} t_{jj}(g)$$

(voir (2.9.3), chapitre I).

On déduit de la proposition I et de la définition de la topologie sur $GL(n, \mathbf{C})$ que la représentation d'un groupe topologique G dans un espace de dimension n est un homomorphisme continu de G dans $GL(n, \mathbf{C})$. Notons que cette propriété peut être choisie en guise de nouvelle définition de la représentation de dimension finie d'un groupe topologique.

III. *Toute représentation unidimensionnelle*

$$g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n \to f(g_1, g_2, \ldots, g_n), \quad g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n \qquad (3.2.1)$$

du produit direct $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ des groupes topologiques G_1, $G_2, \ldots, G_n$ est donnée par la formule

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f_1(g_1) \cdot f_2(g_2) \ldots f_n(g_n), \qquad (3.2.2)$$

où

$$g_j \to f_j(g_j), \quad g_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.2.3)$$

*) Pour le souligner, on appelle souvent les représentations d'un groupe topologique *représentations continues*.

sont des représentations unidimensionnelles des groupes $G_1, \ldots, G_n$. *La représentation* (3.2.1) *est unitaire si et seulement si chacune des représentations* (3.2.3) *est unitaire.*

Démonstration. La partie algébrique de l'assertion de la proposition III est démontrée dans II de 2.7, chapitre I. Il reste à remarquer que la continuité de la fonction $f(g_1, \ldots, g_n)$ dans (3.2.2) sur $G_1 \times \ldots \times G_n$ est équivalente à la continuité de chacune des fonctions $f_1(g_1), \ldots, f_n(g_n)$ sur $G_1, \ldots, G_n$ respectivement.

3.3. Description de toutes les représentations unidimensionnelles des groupes topologiques commutatifs les plus simples. Chaque représentation irréductible de dimension finie d'un groupe commutatif est unidimensionnelle (voir le corollaire du lemme 2 de 2.2, chapitre I). Par conséquent, pour les groupes commutatifs, le problème de la description de toutes les représentations irréductibles de dimension finie se réduit simplement à la recherche de toutes les représentations unidimensionnelles de ces groupes.

a) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}^1$. Chaque représentation unidimensionnelle du groupe $\mathbf{R}^1$ se définit par une fonction numérique (en général à valeurs complexes) $\alpha \to f(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$ qui satisfait aux conditions

$$f(0) = 1, \tag{3.3.1}$$

$$f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \tag{3.3.2}$$

et qui doit être continue en vertu de la condition 3) de 3.2 (voir (2.1.4), chapitre I). Trouvons la forme générale d'une fonction qui satisfait à ces conditions; ainsi nous aurons trouvé toutes les représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}^1$. Les égalités

$$f(\alpha) f(-\alpha) = f(\alpha - \alpha) = f(0) = 1$$

impliquent que

$$f(\alpha) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \text{chaque} \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \tag{3.3.3}$$

D'autre part:

I. *La fonction* $f(\alpha)$ *est différentiable et sa dérivée est continue* *) *en chaque point* $\alpha \in \mathbf{R}^1$.

Démonstration. Soit $\omega(\alpha)$ une fonction continûment différentiable sur $\mathbf{R}^1$, nulle en dehors d'un certain voisinage d'un point $\alpha_0 \in \mathbf{R}^1$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, \omega(\alpha)\, d\alpha \neq 0; \tag{3.3.4}$$

---

*) Plus brièvement, $f(\alpha)$ est continûment différentiable sur $\mathbf{R}^1$.

en vertu de (3.3.3) une telle fonction $\omega(\alpha)$ existe. Multiplions les deux membres de (3.3.2) par $\omega(\alpha_2)$ et prenons les intégrales des deux membres de l'égalité obtenue relativement à α_2 de $-\infty$ à $+\infty$. Nous obtiendrons *)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1+\alpha_2)\,\omega(\alpha_2)\,d\alpha_2 = f(\alpha_1)\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_2)\,\omega(\alpha_2)\,d\alpha_2. \quad (3.3.5)$$

Posons $c = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_2)\,\omega(\alpha_2)\,d\alpha_2$; en vertu de (3.3.4) on a $c \neq 0$; par conséquent, il découle de (3.3.5) que

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1+\alpha_2)\,\omega(\alpha_2)\,d\alpha_2 = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\omega(\alpha-\alpha_1)\,d\alpha. \quad (3.3.6)$$

Mais le deuxième membre de (3.3.5) est continûment différentiable relativement à α_1 puisque ceci est vrai pour $\omega(\alpha-\alpha_1)$, tandis que l'intégrale est en fait calculée sur un intervalle fini; par conséquent, $f(\alpha_1)$ est également continûment différentiable.

Remarque 1. Choisissons en guise de $\omega(\alpha)$ une fonction indéfiniment différentiable et servons-nous de (3.3.6); nous trouvons sans peine que $f(\alpha)$ est également indéfiniment différentiable.

II. *La fonction $f(\alpha)$ satisfait à l'équation différentielle suivante*:

$$\frac{df}{d\alpha} = kf, \quad (3.3.7)$$

où k est une constante.

Démonstration. En prenant les dérivées des deux membres de (3.3.2) par rapport à α_1, et en posant ensuite $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, on obtient

$$f'(\alpha) = f'(0)\,f(\alpha) = kf(\alpha), \quad (3.3.8)$$

où $k = f'(0)$; il est évident que (3.3.8) coïncide avec (3.3.7).

Or chaque solution de l'équation (3.3.7) qui satisfait à la condition (3.3.1) est de la forme

$$f(\alpha) = e^{k\alpha};$$

nous avons donc obtenu le résultat suivant:

III. *Toutes les représentations unidimensionnelles $\alpha \to f(\alpha)$ du groupe $\mathbf{R}^1$ sont définies par la formule*

$$f(\alpha) = e^{k\alpha}, \quad (3.3.9)$$

où k est une constante (en général, complexe).

) Cette méthode, appliquée à un cas plus général, est due à I. Guelfand [2].

Trouvons toutes les représentations unidimensionnelles unitaires $\alpha \to f(\alpha)$ du groupe $\mathbf{R}^1$. Dans le cas unidimensionnel, « unitaire » signifie que $|f(\alpha)| = 1$; pour $f(\alpha) = e^{k\alpha}$ ceci est seulement possible lorsque k est purement imaginaire, $k = i\tau$, $\tau \in \mathbf{R}^1$. Ainsi,

IV. *Chaque représentation unidimensionnelle unitaire* $\alpha \to f(\alpha)$ *du groupe* $\mathbf{R}^1$ *est donnée par la formule*

$$f(\alpha) = e^{i\tau\alpha}, \tag{3.3.10}$$

où τ *est une constante réelle; réciproquement, pour chaque* $\tau \in \mathbf{R}^1$ *la formule* (3.3.10) *détermine une représentation unidimensionnelle unitaire du groupe* $\mathbf{R}^1$.

REMARQUE 2. Le lecteur a sans doute noté le fait remarquable suivant: il suffit que la représentation $\alpha \to f(\alpha)$ soit continue pour que la fonction $f(\alpha)$ soit différentiable (et en vertu de (3.3.9), même analytique !). Nous verrons plus loin qu'un fait analogue se rencontre pour de larges classes de groupes.

b) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}^n$. Le groupe $\mathbf{R}^n$ est le produit direct de n copies du groupe $\mathbf{R}^1$. Par conséquent, en combinant les propositions III de 3.2 et les propositions III et IV que nous venons de formuler pour le cas du groupe $\mathbf{R}^1$, nous obtenons:

Toutes les représentations unidimensionnelles $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \to f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *du groupe* $\mathbf{R}^n$ *sont données par la formule*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e^{k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n}, \tag{3.3.11}$$

où $k_1, \ldots, k_n$ *sont des nombres complexes quelconques. Ces représentations sont unitaires si et seulement si*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e^{i(\tau_1\alpha_1 + \ldots + \tau_n\alpha_n)}, \quad \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{R}^1. \tag{3.3.12}$$

c) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{C}^n$. Le groupe $\mathbf{C}^n$ est isomorphe au groupe $\mathbf{R}^{2n}$ et l'application $(z_1, \ldots, z_n) \to (\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ est un isomorphisme du groupe $\mathbf{C}^n$ sur le groupe $\mathbf{R}^{2n}$, où

$$z_j = \alpha_j + i\beta_j. \tag{3.3.13}$$

Par conséquent, la représentation unidimensionnelle

$$(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$$

du groupe $\mathbf{C}^n$ détermine la représentation unidimensionnelle

$$(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) \to f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$$

du groupe $\mathbf{R}^{2n}$ pour

$$f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = \varphi(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n). \tag{3.3.14}$$

Ainsi, en vertu de (3.3.11)

$$f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = e^{k_1\alpha_1 + l_1\beta_1 + \ldots + k_n\alpha_n + l_n\beta_n}. \quad (3.3.15)$$

Mais d'après (3.3.13)

$$\alpha_j = \frac{z_j + \bar{z}_j}{2}, \quad \beta_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}. \quad (3.3.16)$$

Posons en outre

$$p_j = \frac{1}{2}(k_j - il_j), \quad q_j = \frac{1}{2}(k_j + il_j). \quad (3.3.17)$$

On obtient de (3.3.14) et (3.3.17)

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = e^{p_1 z_1 + q_1 \bar{z}_1 + \ldots + p_n z_n + q_n \bar{z}_n}. \quad (3.3.18)$$

Par conséquent, *toutes les représentations unidimensionnelles* $(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ *du groupe* $\mathbf{C}^n$ *sont données par la formule* (3.3.18), *où* $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ *sont des nombres complexes arbitraires.*

La représentation est unitaire si et seulement si les k_j, l_j sont purement imaginaires. Alors on conclut à l'aide de (3.3.17):

Toutes les représentations unidimensionnelles unitaires $(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ *du groupe* $\mathbf{C}^n$ *sont données par la formule*

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = e^{p_1 z_1 - \bar{p}_1 \bar{z}_1 + \ldots + p_n z_n - \bar{p}_n \bar{z}_n}, \quad (3.3.19)$$

où $p_1, \ldots, p_n$ *sont des nombres complexes arbitraires.*

d) Représentations unidimensionnelles du groupe Γ^1 (groupe des rotations du cercle; voir l'exemple 1 de 1.7, chapitre I). Chaque rotation du cercle se détermine par l'angle de rotation α, les rotations d'angles α et $\alpha + 2\pi$ étant identifiées. Par conséquent, dans toute représentation unidimensionnelle

$$\alpha \to f(\alpha) \quad (3.3.20)$$

du groupe Γ^1, la fonction $f(\alpha)$ doit satisfaire, outre les conditions de l'exemple a), à la condition

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha). \quad (3.3.21)$$

Les conditions de l'exemple a) impliquent $f(\alpha) = e^{k\alpha}$, tandis que la condition (3.3.21) implique $k = im$, où m est un nombre entier. Ainsi,

Toutes les représentations unidimensionnelles $\alpha \to f(\alpha)$ *du groupe* Γ^1 *sont données par la formule*

$$f(\alpha) = e^{im\alpha}, \quad (3.3.22)$$

où m *est un nombre entier quelconque.*

Il est évident que *toutes ces représentations sont unitaires.*

e) Représentations unidimensionnelles du tore $\mathcal{T}^1$. Le tore $\mathcal{T}^1$ est isomorphe au groupe Γ^1 et l'application $\alpha \to \beta = \frac{1}{2\pi}\alpha$ est un isomorphisme $\Gamma^1 \to \mathcal{T}^1$ (voir l'exemple 1 de 1.6, chapitre I). Par conséquent, la représentation unidimensionnelle

$$\beta \to \varphi(\beta) \tag{3.3.23}$$

du groupe $\mathcal{T}^1$ détermine une représentation unidimensionnelle

$$\alpha \to f(\alpha)$$

du groupe Γ^1 pour

$$f(\alpha) = \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\alpha\right). \tag{3.3.24}$$

Mais, comme nous l'avons montré dans le cas d) du groupe Γ^1,

$$f(\alpha) = e^{im\alpha},$$

où m est un nombre entier. En combinant cette formule avec (3.3.24), on obtient:

Toutes les représentations unidimensionnelles $\beta \to \varphi(\beta)$ du tore $\mathcal{T}^1$ sont données par la formule

$$\varphi(\beta) = e^{2\pi i m\beta}, \tag{3.3.25}$$

où m est un nombre entier arbitraire.

Il est évident que toutes ces représentations sont unitaires.

f) Représentations unidimensionnelles du tore $\mathcal{T}^n$. Le tore $\mathcal{T}^n$ est le produit direct de n copies du groupe $\mathcal{T}^1$. Par conséquent, en combinant les résultats de l'exemple e) avec III de 2.3, nous obtenons:

Toutes les représentations unidimensionnelles $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \to \to \varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ du tore $\mathcal{T}^n$ sont données par la formule

$$\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n) = e^{2\pi i(m_1\beta_1 + \ldots + m_n\beta_n)}, \tag{3.3.26}$$

où $m_1, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers arbitraires. Toutes ces représentations sont unitaires.

g) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}_0^+$. Désignons par $\mathbf{R}_0^+$ l'ensemble de tous les nombres réels positifs, envisagé comme un sous-groupe topologique du groupe topologique $\mathbf{R}_0$. Il est évident que l'application $\beta \to \alpha = = \ln \beta$ est un isomorphisme du groupe $\mathbf{R}_0^+$ sur le groupe $\mathbf{R}^1$. Par conséquent, la représentation unidimensionnelle $\beta \to \varphi(\beta)$ du groupe $\mathbf{R}_0^+$ définit une représentation unidimensionnelle $\alpha \to f(\alpha)$ du groupe $\mathbf{R}^1$, si l'on pose

$$f(\alpha) = \varphi(e^{\alpha}), \quad \text{donc,} \quad \varphi(\beta) = f(\ln \beta). \tag{3.3.27}$$

D'après la proposition III de l'exemple a), on a $f(\alpha) = e^{k\alpha} = e^{\alpha \ln \beta} = \beta^k$; d'où l'on tire à l'aide de (3.3.27):

Toutes les représentations unidimensionnelles $\beta \to \varphi(\beta)$ *du groupe* $\mathbf{R}_0^+$ *sont données par la formule*

$$\varphi(\beta) = \beta^k = e^{k \ln \beta}, \tag{3.3.28}$$

où k *est un nombre complexe arbitraire. Ces représentations sont unitaires si et seulement si* $k = i\tau$, $\tau \in \mathbf{R}^1$.

h) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}_0$. Désignons par $\mathbf{R}_0$ l'ensemble de tous les nombres négatifs; alors $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0^+ \cup \mathbf{R}_0^-$, et chaque nombre $\beta \in \mathbf{R}_0^-$ est de la forme $\beta = (-1) \mid \beta \mid$. Soit $\beta \to \varphi(\beta)$ une représentation unidimensionnelle du groupe $\mathbf{R}_0$. Sa restriction à $\mathbf{R}_0^+$ est une représentation unidimensionnelle du groupe $\mathbf{R}_0^+$; par conséquent, en vertu de (3.3.28)

$$\varphi(\beta) = \beta^k \quad \text{pour} \quad \beta > 0, \tag{3.3.29}$$

où k est un nombre complexe arbitraire. Pour $\beta < 0$, d'après (3.3.29), on a

$$\varphi(\beta) = \varphi((-1) \mid \beta \mid) = \varphi(-1)\, \varphi(\mid \beta \mid) = \varphi(-1) \mid \beta \mid^k. \tag{3.3.30}$$

Mais

$$\varphi(-1)\, \varphi(-1) = \varphi((-1)^k) = \varphi(1) = 1$$

implique que $\varphi(-1) = \pm 1 = (-1)^\varepsilon$, où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$. Par conséquent, la formule (3.3.30) peut être écrite sous la forme

$$\varphi(\beta) = (-1)^\varepsilon \mid \beta \mid^k \quad \text{si} \quad \beta < 0. \tag{3.3.31}$$

Les formules (3.3.29), (3.3.31) peuvent être réunies en une seule expression:

$$\varphi(\beta) = (\operatorname{sign} \beta)^\varepsilon \mid \beta \mid^k. \tag{3.3.32}$$

Ainsi,

Toutes les représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{R}_0$ *sont données par la formule* (3.3.32), *où* k *est un nombre complexe arbitraire, et* $\varepsilon = 0$ *ou* $\varepsilon = 1$. *Ces représentations sont unitaires si et seulement si* k *est purement imaginaire.*

i) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{C}_0^1$. Le groupe $\mathbf{C}_0^1$ est isomorphe au produit direct $\mathbf{R}_0^1 \times \Gamma^1$ et l'application $z \to (r, \alpha)$ pour $r = \mid z \mid$, $\alpha = \arg z$ est un isomorphisme du groupe $\mathbf{C}_0^1$ sur $\mathbf{R}_0^+ \times \Gamma^1$. En combinant II de 3.2 avec (3.3.22) et (3.3.28), nous obtenons:

Toutes les représentations unidimensionnelles $z \to \varphi(z)$ *du groupe* $\mathbf{C}_0^1$ *sont données par la formule*

$$\varphi(z) = |z|^k e^{im \arg z}, \tag{3.3.33}$$

où k est un nombre complexe arbitraire, et m un entier quelconque. Ces représentations sont unitaires si et seulement si k est purement imaginaire.

j) Représentations unidimensionnelles du groupe $\mathbf{C}_0^n$. Le groupe $\mathbf{C}_0^n$ est le produit direct de n copies du groupe $\mathbf{C}_0^1$. Par conséquent, en combinant III de 3.2 avec (3.3.33), nous obtenons:

Toutes les représentations unidimensionnelles $(z_1, \ldots, z_n) \to \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ du groupe $\mathbf{C}_0^n$ sont données par la formule

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = |z_1|^{k_1} \ldots |z_n|^{k_n} e^{i(m_1 \arg z_1 + \ldots + m_n \arg z_n)}, \quad (3.3.34)$$

où $k_1, \ldots, k_n$ sont des nombres complexes arbitraires, et $m_1, \ldots, m_n$ des entiers quelconques. Ces représentations sont unitaires si et seulement si $k_1, \ldots, k_n$ sont purement imaginaires.

3.4. Représentations tensorielles des groupes linéaires. Les éléments matriciaux de chaque représentation tensorielle du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ (i.e. du produit tensoriel de m copies de la représentation identique $g \to g$, $g \in GL(n, \mathbf{C})$ sont des monômes relativement aux éléments matriciaux du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ et, par conséquent, sont des fonctions continues sur $GL(n, \mathbf{C})$. Cela signifie que l'on a la condition 3) de 2.2 (condition de continuité) pour les opérateurs de représentations tensorielles du groupe $GL(n, \mathbf{C})$; ainsi:

I. *Les représentations tensorielles du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ sont des représentations du groupe topologique $GL(n, \mathbf{C})$.*

D'où l'on tire à l'aide de I de 3.2:

II. *Les représentations tensorielles d'un groupe linéaire G* (voir 2.3), *envisagé comme sous-groupe du groupe topologique $GL(n, \mathbf{C})$, ainsi que les restrictions de ces représentations aux sous-espaces invariants, sont des représentations du groupe topologique G.*

§ 4. Définition générale de la représentation d'un groupe topologique

4.1. Espaces linéaires topologiques. Un ensemble X s'appelle *espace linéaire topologique*, si:

1) X est un espace linéaire;

2) X est un espace topologique séparé;

3) l'application $\{x_1, x_2\} \to x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \in X$, est une application continue de l'espace topologique $X \times X$ dans l'espace topologique X;

4) l'application $\{\alpha, x\} \to \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{C}^1$, $x \in X$, est une application continue de l'espace topologique $\mathbf{C}^1 \times X$ dans l'espace topologique X.

L'exemple le plus simple d'un espace topologique linéaire est l'espace linéaire $\mathbf{C}^n$ muni de sa topologie naturelle. D'autres exemples seront donnés plus loin.

Les conditions 3) et 4) impliquent que X est un groupe topologique relativement à l'opération d'addition dans X. Dans la suite de ce paragraphe, X, Y, Z désigneront toujours des espaces linéaires topologiques.

Un ensemble $M \subset X$ est appelé *sous-espace fermé* de l'espace X si

a) M est un sous-espace de l'espace linéaire X;

b) M est un sous-ensemble fermé de l'espace topologique X.

I. *L'adhérence $\overline{M}$ d'un sous-espace M dans X est également un sous-espace de X.*

Démonstration. 1. En vertu de 3), l'application $x \to x + x_1$, $x \in M$, $x_1 \in M$, est une application continue de X dans X; elle envoie M dans M et donc $\overline{M}$ dans $\overline{M}$; par conséquent, $x + x_1 \in \in \overline{M}$ pour $x \in \overline{M}$, $x_1 \in M$. Mais alors l'application $x_1 \to x + x_1$, $x_1 \in X$, $x \in \overline{M}$, est une application continue de X dans X qui envoie M dans $\overline{M}$ et donc $\overline{M}$ dans $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; ainsi $x + x_1 \in \overline{M}$ pour x, $x_1 \in \overline{M}$.

2. En vertu de 4), l'application $x \to \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in X$, est une application continue de X dans X; elle envoie M dans M et donc $\overline{M}$ dans $\overline{M}$; par conséquent, $\alpha x \in \overline{M}$ pour $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in \overline{M}$. Les assertions que nous venons de démontrer (1 et 2) permettent de conclure que $\overline{M}$ est un sous-espace de l'espace linéaire X; il est évident que $\overline{M}$ est fermé, donc $\overline{M}$ est un sous-espace fermé de X.

Un opérateur A de X dans Y à ensemble de définition X est dit *continu* si l'application $A: x \to Ax$ est une application continue de X dans Y; en particulier, un opérateur continu A de X dans X s'appelle *opérateur continu sur X*.

II. *Si A est un opérateur linéaire continu sur X, et M est un sous-espace de X, invariant relativement à A, alors $\overline{M}$ est également invariant relativement à A.*

Démonstration. L'application $A: x \to Ax$, $x \in X$, est une application continue de X dans X; elle envoie M dans M et donc $\overline{M}$ dans $\overline{M}$.

Exemples

1. Espaces normés. Soit X un espace normé (voir G. Chilov [1]). Introduisons une topologie sur X en prenant pour base des voisinages de chaque point $x_0 \in X$ l'ensemble de toutes les boules ouvertes

$$W(x_0, \varepsilon) = \{x: \| x - x_0 \| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.1.1}$$

On vérifie facilement que tous les axiomes des bases des voisinages (voir 1.1), ainsi que l'axiome d'espace séparé (voir 1.8) sont satisfaits pour les ensembles (4.1.1); par conséquent, ces ensembles déterminent une topologie séparée dans X. La topologie ainsi définie sur l'espace normé X s'appelle *topologie forte sur* X.

Un espace normé muni de la topologie forte est un espace topologique linéaire.

En effet, on prouve facilement qu'un espace normé muni de la topologie forte vérifie les axiomes 1) à 4) de 4.1.

EXERCICE. Démontrer qu'*un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y est continu si et seulement s'il est borné.*

2. Espaces euclidiens (en particulier, hilbertiens). Un espace euclidien X est un espace normé de norme $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$, où (x, y) est le produit scalaire dans X. Ainsi:

Un espace euclidien X (en particulier hilbertien) muni de la topologie forte déterminée par la norme $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$ est un espace topologique linéaire.

3. Espaces localement convexes. Soit X un espace linéaire. On appelle *segment* $[x_1, x_2]$ joignant les deux points $x_1, x_2 \in X$ l'ensemble $tx_1 + (1 - t) x_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; les points x_1, x_2 s'appellent *extrémités* du segment $[x_1, x_2]$. (Si X est un plan, ou l'espace à trois dimensions, alors les extrémités des vecteurs $x \in [x_1, x_2]$ forment effectivement le segment qui joint les points x_1 et x_2.) Un ensemble $Q \subset X$ est dit *convexe* s'il contient le segment $[x_1, x_2]$ qui joint chaque couple x_1, x_2 de ses points. Il est évident que *l'intersection d'ensembles convexes est convexe*. Un ensemble Q est dit symétrique si le fait que $x \in Q$, $| \alpha | = 1$, implique $\alpha x \in Q$.

Une fonction numérique $p(x)$ sur X s'appelle semi-norme si:

1) $p(x) \geqslant 0$ pour chaque $x \in X$;

2) $p(\alpha x) = | \alpha | p(x)$ quels que soient $x \in X$, $\alpha \in \mathbf{C}$;

3) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ quels que soient $x_1, x_2 \in X$.

La condition 2) implique que $p(0) = 0$.

I. *Si p est une semi-norme sur X, alors pour chaque $c > 0$ l'ensemble*

$$Q = \{x : x \in X,\ p(x) < c\}$$

est convexe et symétrique.

Démonstration. Si $x_1, x_2 \in Q$, alors $p(x_1) < c$, $p(x_2) < c$; d'où l'on tire à l'aide des propriétés 2) et 3) de la semi-norme, que l'on a pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$p(tx_1 + (1 - t) x_2) \leqslant p(tx_1) + p((1 - t) x_2) =$$
$$= tp(x_1) + (1 - t) p(x_2) < ct + c(1 - t) = c$$

et donc $[x_1, x_2] \subset Q$, de sorte que Q est convexe. En outre, si $x \in Q$, alors $p(x) < c$; ainsi pour $|\alpha| = 1$, $\alpha \in \mathbf{C}$, on a également

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x) < c,$$

i.e. $\alpha x \in Q$; par conséquent, Q est symétrique.

Soit P une famille de semi-normes p donnée sur un espace linéaire X. La famille P est dite *suffisante* s'il existe pour chaque $x \in X$ une semi-norme $p \in P$ telle que $p(x) > 0$. Supposons que P est une famille suffisante de semi-normes sur X. Définissons une topologie sur X en prenant pour base de voisinages de chaque point $x_0 \in X$ tous les ensembles de la forme

$$W(x_0, p_1, \ldots, p_n, \varepsilon) = \\ = \{x : x \in X,\ p_1(x - x_0) < \varepsilon, \ldots, p_n(x - x_0) < \varepsilon\}, \quad (4.1.2)$$

où $p_1, \ldots, p_n$ est un ensemble fini quelconque de semi-normes de P, et ε est un nombre positif arbitraire. On vérifie facilement que les axiomes de la base de voisinages, ainsi que l'axiome d'espace séparé, sont satisfaits pour les ensembles (4.1.2). On en déduit que ces ensembles déterminent une topologie séparée sur X. Il est également facile de vérifier que X, muni de cette topologie, satisfait aux axiomes 1) à 4) de 4.1. Par conséquent, muni de cette topologie, X est un espace topologique linéaire. On l'appelle *espace localement convexe.*

Notons que $W(x_0, p_1, \ldots, p_n, \varepsilon)$ est l'intersection des ensembles convexes

$$W(x, p_j, \varepsilon) = \{x : x \in X,\ p_j(x - x_0) < \varepsilon\}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

(voir III); il est donc également convexe. Ainsi, la base (4.1.2) de voisinages est constituée par des ensembles convexes. Ceci explique la terminologie: espaces localement convexes. *Les espaces normés* (voir l'exemple 1) *sont localement convexes.* En effet, dans ce cas P est constitué par un seul élément $p(x) = \|x\|$; P est une famille suffisante, puisque, par définition de la norme, $x \neq 0$ implique $\|x\| > 0$.

4. L'espace $C(-\infty, \infty)$. Désignons par $C(-\infty, \infty)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $x = x(t)$ à valeurs complexes, définies et continues sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Définissons l'addition et la multiplication par un nombre comme des opérations sur les valeurs des fonctions en chaque point. En outre, posons pour chaque segment $[a, b]$, $a < b$ et $x \in C(-\infty, \infty)$

$$p_{[a,b]}(x) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

On voit facilement que $p_{[a,b]}(x)$ est une semi-norme sur $C(-\infty, \infty)$. Désignons par P l'ensemble de tous les $p_{[a,b]}$ qui correspondent à tous les segments $[a, b]$. L'ensemble P est suffisant. En effet,

supposons que $x = x(t) \neq 0$. Ceci implique l'existence d'un point $t_0 \in (-\infty, \infty)$ en lequel $x(t_0) \neq 0$. Soit $[a, b]$ un segment contenant le point t_0. Alors

$$p_{[a, b]}(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \geqslant |x(t_0)| > 0.$$

Par conséquent P détermine une topologie localement convexe sur $C(-\infty, \infty)$ tandis que $C(-\infty, \infty)$, muni de cette topologie, est un espace localement convexe. Il est évident que dans tous les raisonnements de l'exemple 4, on peut remplacer $C(-\infty, \infty)$ par l'espace de toutes les fonctions à valeurs complexes, définies sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et bornées sur chaque segment fini.

5. L'espace $D^\infty(a, b)$. Désignons par $D^\infty(a, b)$ l'ensemble de toutes les fonctions $x = x(t)$ à valeurs complexes, continues et admettant des dérivées continues d'ordre arbitraire sur le segment $[a, b]$. Définissons dans $D^\infty(a, b)$ l'addition et la multiplication par un nombre de même que dans l'exemple 4, et posons pour $x \in D^\infty(a, b)$

$$p_k(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|,$$

$$P = \{p_k, k = 0, 1, \ldots\}.$$

On vérifie facilement que les p_k sont des semi-normes et que P est un ensemble suffisant de semi-normes sur $D^\infty(a, b)$. Par conséquent, P définit une topologie localement convexe sur $D^\infty(a, b)$, et $D^\infty(a, b)$, muni de cette topologie, est un espace localement convexe.

4.2. Définition de la représentation d'un groupe topologique; notions fondamentales. Donnons maintenant la définition générale de la représentation d'un groupe topologique. Soient G un groupe topologique, et X un espace linéaire topologique. Nous dirons qu'une représentation $T: g \to T(g)$ du groupe G dans l'espace X est donnée si à chaque élément $g \in G$ on fait correspondre un opérateur linéaire $T(g)$ de X, défini sur X tout entier, et les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $T(e) = 1$, où e est l'élément neutre du groupe G, et 1 est l'opérateur unité sur X;

2) $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$;

3) l'application $\{x, g\} \to T(g)x$ est une application continue du produit topologique $X \times G$ dans X.

L'espace X s'appelle *espace de la représentation* T, et les opérateurs $T(g)$ *opérateurs de représentation*. La définition que nous venons de donner diffère de celle du § 2, chapitre I, par la présence de la condition de continuité 3). Elle signifie que $T(g)x$ est une fonction vectorielle sur G à valeurs dans X, continue relativement aux cou-

ples de variables g, x. En particulier, la continuité de l'opérateur $T(g)$ dans X découle de la condition 3). Toute représentation d'un groupe topologique satisfait toujours à la condition 3) ; et pourtant parfois, pour mettre en valeur cette condition, on dit que la représentation est continue. Les représentations dans le sens de la définition donnée au § 2, chapitre I, seront dorénavant appelées *algébriques*. Dans le cas d'un espace X de dimension finie la condition 3) coïncide avec la condition 3) de 3.2. Ceci découle de la linéarité de chacune des coordonnées

$$(T(g)x)_j = \sum_{l=1}^{r} t_{jl}(g)\, x_l, \quad r = \dim X,$$

du vecteur $T(g)x$ relativement aux coordonnées x_l du vecteur x pour une base donnée de X (voir, par exemple, G. Fichtengolz [1]). Deux représentations T^1 et T^2 d'un groupe G dans des espaces X^1 et X^2 sont dites *équivalentes* (on écrit alors $T^1 \sim T^2$ s'il existe une application bijective linéaire de l'espace X^1 sur l'espace X^2 qui possède les propriétés suivantes:

1') S est un homéomorphisme de l'espace linéaire topologique X^1 sur l'espace linéaire topologique X^2;

2') pour chaque $g \in G$

$$ST^1(g) = T^2(g)\, S. \tag{4.2.1}$$

Une représentation T d'un groupe topologique dans un espace linéaire topologique X est dite *irréductible* si X ne possède aucun sous-espace *fermé*, différent de (0) et de X et invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$. Ainsi, à la différence des définitions données au § 2 du chapitre I, la définition de l'équivalence de représentations des groupes topologiques contient maintenant la condition 1') qui exige l'homéomorphie de l'application S, tandis que la définition de l'irréductibilité contient la condition exigeant que les sous-espaces invariants soient fermés.

Dans certains cas, lorsqu'il s'agit de le souligner, des représentations équivalentes de groupes topologiques seront dites *topologiquement équivalentes*, tandis que des représentations irréductibles de groupes topologiques seront appelées *topologiquement irréductibles*. L'équivalence et l'irréductibilité dans le sens de la définition du § 2, chapitre I, seront maintenant appelés *équivalence algébrique* et *irréductibilité algébrique* respectivement. Il est évident que *l'équivalence topologique entraîne l'équivalence algébrique, et l'irréductibilité algébrique entraîne l'irréductibilité topologique.* Les réciproques sont généralement fausses. Une représentation T d'un groupe G dans X s'appelle *unitaire* si X est hilbertien (en particulier, euclidien) et tous les opérateurs $T(g)$ de la représentation T sont unitaires.

I. *Soit T une représentation algébrique unitaire d'un groupe topologique G dans un espace X; si la fonction vectorielle $T(g)x$ est continue relativement à g pour chaque $x \in X$ donné, alors T est continue relativement au couple des variables g, x.*

Démonstration. Supposons donnés $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, $g_0 \in G$. En vertu de la continuité de la fonction $T(g)x_0$ au point g_0, il existe un voisinage $U(g_0)$ tel que $\| T(g)x_0 - T(g_0)x_0 \| < \varepsilon$. Alors pour $\| x - x_0 \| < \varepsilon$ et $g \in U(g_0)$ on a

$$\| T(g)x - T(g_0)x_0 \| = \| T(g)x - T(g)x_0 + \\ + T(g)x_0 - T(g_0)x_0 \| \leqslant \| T(g)(x - x_0) \| + \\ + \| T(g)x_0 - T(g_0)x_0 \| < \| x - x_0 \| + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

puisque $\| T(g) \| = 1$.

Exemple. Soit $G = \Gamma^1$. Les éléments du groupe Γ^1 sont donnés par les angles de rotation γ de sorte que les fonctions f sur Γ^1 peuvent être considérées comme des fonctions $f(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}^1$ qui satisfont à la condition

$$f(\gamma + 2\pi) = f(\gamma), \tag{4.2.2}$$

puisque $\gamma + 2\pi$ et γ définissent un même élément du groupe Γ^1.

Dans cet exemple, nous allons considérer les fonctions f mesurables suivant Lebesgue et définies presque partout sur $\mathbf{R}^1$. Pour de telles fonctions nous exigerons (ce qui est naturel) que la condition (4.2.2) soit satisfaite pour presque tous les $\gamma \in \mathbf{R}^1$. Mais chacune de ces fonctions f est entièrement (i.e. pour presque chaque $\gamma \in \mathbf{R}^1$) déterminée par ses valeurs sur un segment quelconque de longueur 2π, par exemple sur le segment $[-\pi, \pi]$. Désignons par $L^2(\Gamma^1)$ et aussi par $L^2(-\pi, \pi)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(\gamma)$, $\gamma \in [-\pi, \pi]$ mesurables suivant Lebesgue, définies pour presque chaque $\gamma \in$ $\in [-\pi, \pi]$ et satisfaisant à la condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\gamma)|^2 \, d\gamma < \infty. \tag{4.2.3}$$

Ceci posé, deux fonctions, différant seulement sur un ensemble de mesure nulle, seront envisagées comme un même élément de l'espace $L^2(\Gamma^1)$. (Pour plus de détail, voir G. Chilov [1].) Définissons sur $L^2(\Gamma^1)$ l'addition et la multiplication par un nombre comme les opérations correspondantes sur les valeurs des fonctions. Définissons ensuite le produit scalaire (f_1, f_2) des fonctions f_1, $f_2 \in$ $\in L^2(\Gamma^1)$ en posant

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma) \overline{f_2(\gamma)} \, d\gamma. \tag{4.2.4}$$

Alors $L^2(\Gamma^1)$ devient un espace hilbertien (voir également G. Chilov [1]). Définissons une représentation T du groupe Γ^1 de la manière suivante. Soient $X = L^2(\Gamma^1)$ et $T(\gamma)$ des opérateurs sur $L^2(\Gamma^1)$ définis par la formule

$$T(\gamma_0) f(\gamma) = f(\gamma + \gamma_0). \qquad (4.2.5)$$

Démontrons que l'application $T: \gamma \to T(\gamma)$ est une représentation unitaire du groupe Γ^1 dans l'espace $L^2(\Gamma^1)$. Il est évident que pour $f_1, f_2, f_3 \in L^2(\Gamma^1)$ on a

α) $T(0) f(\gamma) = f(\gamma)$, i.e. $T(0) = 1$ (0 étant l'élément neutre du groupe Γ^1),

β) $T(\gamma_1) T(\gamma_2) \ f(\gamma) = T(\gamma_1) \ f(\gamma + \gamma_2) = f(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2) = T(\gamma_1 + \gamma_2) f(\gamma)$, i.e. $T(\gamma_1 + \gamma_2) = T(\gamma_1) T(\gamma_2)$. Ceci signifie que T est une représentation algébrique du groupe Γ^1.

En outre, pour $f_1, f_2 \in L^2(\Gamma^1)$, on a

$$(T(\gamma_0) f_1, T(\gamma_0) f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma + \gamma_0) \overline{f_2(\gamma + \gamma_0)} \, d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma) \overline{f_2(\gamma)} \, d\gamma$$

et donc T est unitaire.

Démontrons enfin que T est continue. En vertu de I, il suffit de montrer que l'application $\gamma \to T(\gamma) f$ est une application continue de Γ^1 dans $L^2(\Gamma^1)$. Désignons par $C(\Gamma^1)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur Γ^1. Il est évident que les fonctions de $C(\Gamma^1)$ peuvent être envisagées comme des fonctions continues sur $\mathbf{R}^1$ satisfaisant à la condition (4.2.2). De telles fonctions sont uniformément continues; par conséquent, si l'on a $\varphi \in C(\Gamma^1)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $\gamma_0 \in \Gamma$ il existe un voisinage $U(0)$ de l'élément 0 dans Γ^1 tel que

$$|\varphi(\gamma + \gamma_1) - \varphi(\gamma)| < \varepsilon \quad \text{pour tous les} \quad \gamma_1 \in U(0) \quad \text{et tous les } \gamma \in \mathbf{R}^1; \qquad (4.2.6)$$

d'où l'on tire

$$\| T(\gamma_1) \varphi - T(\gamma_0) \varphi \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\gamma + \gamma_1) - \varphi(\gamma + \gamma_0)|^2 \, d\gamma < \varepsilon^2. \qquad (4.2.7)$$

Soit maintenant f une fonction quelconque sur $L^2(\Gamma^1)$. Puisque $C(\Gamma^1)$ est dense dans $L^2(\Gamma^1)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi \in C(\Gamma^1)$ telle que

$$\| f - \varphi \|_2 < \varepsilon. \qquad (4.2.8)$$

Alors en vertu de (4.2.7) et (4.2.8) on a

$$\| T(\gamma_1) f - T(\gamma_0) f \|_2 \leqslant \| T(\gamma_1)(f - \varphi) \|_2 + \\ + \| T(\gamma_1)\varphi - T(\gamma_0)\varphi \|_2 + \| T(\gamma_0)(\varphi - f) \|_2 = \\ = \| f - \varphi \|_2 + \| T(\gamma_1)\varphi - T(\gamma_0)\varphi \|_2 + \| f - \varphi \|_2 < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de T.

La représentation T s'appelle *représentation régulière* du groupe Γ^1. La définition générale d'une représentation régulière sera donnée au chapitre IV.

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES COMPACTS

§ 1. Groupes topologiques compacts

1.1. Espaces topologiques compacts. Soit M un sous-ensemble d'un espace topologique X. Une famille $\{G\}$ d'ensembles de X est appelé *recouvrement* de l'ensemble M si la réunion de tous les ensembles G contient M.

L'espace topologique X est dit *compact* *) si chaque recouvrement $\{G\}$ de cet espace par des ensembles ouverts G contient un nombre fini d'ensembles $\{G_1, \ldots, G_n\}$ qui forment également un recouvrement de X.

L'ensemble $M \subset X$ est dit *compact* si, envisagé comme un sous-espace de X, il est compact **). En passant aux ensembles complémentaires, on obtient:

I. *Un espace X est compact si et seulement si chaque famille $\{F\}$ de sous-ensembles fermés à intersection vide contient un nombre fini d'ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ à intersection vide.*

On déduit de I que

II. *Tout sous-ensemble fermé F_0 d'un espace compact X est compact.*

En effet, soit $\{F\}$ une famille de sous-ensembles fermés dans F_0 à intersection vide. Alors $\{F\}$ est également une famille d'ensembles fermés dans X (voir I de 1.6) à intersection vide et contient donc (en vertu de I) un nombre fini d'ensembles $F_1, \ldots, F_n$ à intersection vide.

On peut donner une autre définition de l'espace compact, équivalente à la précédente. Une famille $\{M\}$ d'ensembles sera dite *centrée* si toute sous-famille finie d'ensembles de $\{M\}$ possède une intersection non vide. En vertu de I, l'espace X est compact si et seulement si chaque famille centrée d'ensembles fermés y possède une intersection non vide.

Cette proposition peut être énoncée sous la forme suivante:

---

*) P. Alexandrov, qui introduisit ce concept, appela les espaces de ce type *espaces bicompacts*; nous employons l'expression *ensemble compact* que l'on rencontre plus fréquemment aujourd'hui.

**) Il est évident que tout ensemble fini est compact.

III. *Un espace X est compact si et seulement si chaque famille centrée de sous-ensembles de X possède au moins un point d'adhérence commun.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que X est compact, et $\{M\}$ est une famille centrée d'ensembles. Alors $\{\overline{M}\}$ est une famille centrée d'ensembles fermés et par conséquent $\{\overline{M}\}$ possède une intersection non vide; chaque point de cette intersection est un point commun de l'adhérence des ensembles M.

Inversement, supposons que chaque famille centrée d'ensembles de X possède un point d'adhérence commun. En particulier, chaque famille $\{F\}$ centrée d'ensembles fermés F doit avoir un point d'adhérence commun, mais, les ensembles F étant fermés, ce point appartient à leur intersection; ainsi F est compact.

IV. *Si F est un ensemble compact d'un espace séparé X et $x \notin F$, alors il existe des ensembles ouverts disjoints U et V qui contiennent respectivement x et F.*

D é m o n s t r a t i o n. Pour chaque point $y \in F$ on peut trouver des voisinages disjoints U_y, V_y des points x et y. En vertu de la compacité de F, on peut choisir parmi les ensembles V_y une famille finie $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, qui forme un recouvrement de F. Alors les ensembles $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$, $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$ satisfont aux exigences énoncées.

V. *Un ensemble compact d'un espace séparé est fermé.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que F est compact et $x \notin F$. En vertu de IV, il existe un voisinage U du point x, sans points communs avec F; par conséquent, $x \notin \overline{F}$ (1.3, chapitre III). D'où l'on a $\overline{F} \subset F$, et donc $\overline{F} = F$.

VI. *Un ensemble $M \subset \mathbf{R}^n$ est compact dans $\mathbf{R}^n$ si et seulement s'il est fermé et borné* *) *dans $\mathbf{R}^n$.*

D é m o n s t r a t i o n. La suffisance fait l'objet du lemme bien connu de Borel-Lebesgue (voir par exemple G. F i c h t e n h o l z [1], volume I). Réciproquement, supposons que M est compact dans $\mathbf{R}^n$. En vertu de V, M est fermé. Démontrons que M est borné. Pour cela recouvrons chaque point de M par une boule de rayon 1. En vertu de la compacité de M, on peut choisir un nombre fini de ces boules qui forment toujours un recouvrement de M. Une boule qui contient cet ensemble fini de boules contient l'ensemble M tout entier.

VII. *Une image continue d'un espace compact est compact.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit f une application continue d'un espace X sur un espace Y, et soit $\{G'\}$ un recouvrement de l'espace

*) Un ensemble $M \subset \mathbf{R}^n$ est dit *borné* s'il est contenu dans une boule de $\mathbf{R}^n$.

Y par des ensembles ouverts. Les ensembles $G = f^{-1}(G')$ sont alors ouverts dans X et forment un recouvrement $\{G\}$ de l'espace X. En vertu de la compacité de l'espace X, le recouvrement $\{G\}$ contient une sous-famille finie $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ qui recouvre également l'espace X. Mais alors $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_n\}$ est un recouvrement contenu dans $\{G'\}$ de l'espace Y. Ainsi, chaque recouvrement $\{G'\}$ de l'espace Y par des ensembles ouverts contient un recouvrement fini de Y, i.e. Y est compact.

VIII. *Les images par une application continue des ensembles fermés d'un espace compact dans un espace séparé sont fermées*

Démonstration. Soit M un ensemble fermé d'un espace compact X. En vertu de II, M est compact, et donc son image par une application continue est également compacte (voir VII); elle est donc fermée dans l'espace séparé qui la contient (voir V).

Une application continue f de X dans $\mathbf{R}^1$ s'appelle *fonction réelle continue sur* X.

IX. *Une fonction réelle continue f sur un espace compact X prend sur cet espace ses valeurs maximale et minimale.*

Démonstration. En vertu de VII et VI, $f(X)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbf{R}^1$; par conséquent, il possède un élément maximal et un élément minimal. En effet, le fait que l'ensemble $f(X)$ est borné implique l'existence des nombres $\inf f(X)$ et $\sup f(X)$; puisque $f(X)$ est fermé, on a $\inf f(X), \sup f(X) \in f(X)$, donc ces nombres sont l'élément minimal et l'élément maximal de $f(X)$.

Soit f est fonction numérique sur un espace topologique X. Désignons par U_f la réunion de tous les ensembles ouverts pour lesquels $f(x) = 0$; soit Q_f le complément de U_f. Il est évident que U_f est l'ensemble ouvert maximal sur lequel $f(x)=0$, et donc Q_f est l'ensemble fermé minimal *) en dehors duquel $f(x) = 0$. On appelle Q_f *support de la fonction* f. Une fonction f est dite *finie* si son support Q_f est un ensemble compact.

X. *Toute fonction numérique f sur un espace compact X est finie.*

En effet, Q_f est compact comme sous-ensemble fermé d'un ensemble compact X (voir II).

Soient X, Y des espaces topologiques, et $M \subset X \times Y$; l'ensemble de tous les $x \in X$ tels que $x \times y \in M$ pour un certain $y \in M$ s'appelle *projection de l'ensemble M sur X*; on définit d'une manière analogue la projection de l'ensemble M sur Y.

XI. *Si Y est compact, alors la projection sur X de chaque ensemble fermé $F \subset X \times Y$ est fermée.*

---

*) Eventuellement $U_f = \varnothing$ et alors $Q_f = X$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit M la projection de l'ensemble F sur X, et $x_0 \in \overline{M}$. Alors chaque voisinage $U(x_0)$ a une intersection non vide avec M ; alors les ensembles

$$N_U = \{y: x \times y \in F,\ x \in U(x_0)\}$$

forment une famille centrée dans l'espace compact Y et possèdent donc un point d'adhérence commun y_0. Mais alors $x_0 \times y_0 \in \overline{F} = F$; par conséquent $x_0 \in M$. Ainsi $x_0 \in \overline{M}$ implique $x_0 \in M$; mais cela signifie que M est fermé.

XII. *Le produit topologique d'un nombre fini* *) *d'espaces compacts est compact.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient X, Y des espaces compacts. Supposons que $\{F_\alpha\}$ est une famille centrée d'ensembles fermés dans l'espace $X \times Y$, et Φ_α est la projection de l'ensemble F_α sur l'espace X. Il est légitime de supposer que $\{F_\alpha\}$ contient un nombre fini d'intersections de ses éléments. L'ensemble Φ_α est fermé en vertu de XI. La famille des sous-ensembles fermés $\{\Phi_\alpha\}$ de l'espace X est centrée, et possède donc une intersection non vide. Soient $x_0 \in \bigcap_\alpha \Phi_\alpha$, et M_{x_0} l'ensemble de tous les couples de la forme (x_0, y), $y \in Y$. Alors l'application $\{x_0, y\} \rightarrow y$ est un homéomorphisme de l'espace M_{x_0} sur Y ; par conséquent M_{x_0} est un espace compact. Par construction de x_0, la famille des intersections $F_\alpha \cap M_{x_0}$ est centrée et les ensembles $F_\alpha \cap M_{x_0}$ sont fermés dans M_{x_0}. En vertu de la compacité de l'ensemble M_{x_0} la famille $\{F_\alpha \cap M_{x_0}\}$ possède un point commun $\{x_0, y_0\}$. Ainsi $\bigcap (F_\alpha \cap M_{x_0}) \neq \varnothing$; alors *a fortiori* $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$ d'où l'on tire que $X \cap Y$ est compact.

On démontre de même cette assertion pour un nombre fini quelconque d'espaces compacts.

XIII. *Si G et F sont des ensembles ouvert et fermé respectivement dans le produit topologique $X \times Y$ d'espaces topologiques X et Y, et Q est un ensemble compact de X, alors l'ensemble* $\bigcup_{x \in Q} \{y: x \times y \in F\}$ *est fermé, et l'ensemble* $\bigcap_{x \in Q} \{y: x \times y \in G\}$ *est ouvert.*

D é m o n s t r a t i o n. La première assertion découle du fait que $\bigcup_{x \in Q} \{y: x \times y \in F\}$ est la projection sur Y d'un ensemble fermé $(Q \times Y) \cap F$ (voir XI); la deuxième assertion s'obtient de la première en passant aux ensembles complémentaires.

---

*) La proposition XII est également valable pour une famille infinie d'espaces compacts pour une topologie appropriée de leur produit (voir, par exemple, M. N a ï m a r k [1]). Ce résultat, dû à A. Tichonov, ne nous sera pas nécessaire par la suite.

XIV. *Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le produit topologique $X \times Y$ d'espaces topologiques X, Y, à valeurs dans un espace topologique Z, et soient Q un ensemble compact de X, et G un ensemble ouvert de Z. Alors l'ensemble $W = \{y : f(x, y) \in G$ pour tous les $x \in Q\}$ est ouvert dans Y.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\hat{G}$ l'image inverse de G par l'application $z = f(x, y)$; alors $\hat{G}$ est ouvert dans $X \times Y$ et

$$W = \bigcap_{x \in Q} \{y : x \times y \in \hat{G}\},$$

de sorte qu'il reste seulement à appliquer la proposition XIII.

Un sous-ensemble Q d'un groupe topologique G est dit *compact* si Q est un sous-ensemble compact de l'espace topologique G.

XV. *Si Q_1, Q_2 sont des sous-espaces compacts d'un groupe topologique G, alors Q_1^{-1} et Q_1Q_2 sont également compacts.*

D é m o n s t r a t i o n. L'assertion découle de la proposition VII, puisque Q_1^{-1} et Q_1Q_2 sont des images continues des espaces compacts Q_1 et $Q_1 \times Q_2$ (voir XII) par des applications continues $g \to g^{-1}$ et $\{g_1, g_2\} \to g_1g_2$ respectivement.

1.2. Espaces localement compacts; groupes localement compacts. Un espace topologique X est dit *localement compact* si chaque point $x \in X$ possède un voisinage dont l'adhérence est compacte. Par exemple, l'espace $\mathbf{R}^n$ est localement compact; chacun de ces points $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ possède un voisinage $U(x^0) = \{x : |x_j - x_j^0| < \varepsilon, j = 1, \ldots, n\}$ dont l'adhérence est un ensemble fermé borné et partant compact de $\mathbf{R}^n$.

L'espace $\mathbf{C}^n$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{2n}$; il est donc aussi localement compact.

Un espace hilbertien de dimension infinie n'est pas localement compact (à démontrer!).

I. *Un sous-espace fermé F d'un espace localement compact X est localement compact.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $x_0 \in F$ et V un voisinage du point x_0 dans X tel que $\overline{V}$ soit compact. Alors $V \cap F$ est un voisinage du point x_0 dans F, et $\overline{V \cap F}$ est un sous-ensemble fermé de l'espace compact $\overline{V}$; il est donc compact (II de 1.1).

Un groupe topologique G est dit *localement compact* si l'espace topologique G est localement compact.

II. *Un groupe topologique G est localement compact si l'on peut trouver un voisinage V, à adhérence compacte, de l'élément neutre e du groupe G.*

En effet, l'homéomorphisme $g \to g_0 g$ applique V sur le voisinage $g_0 V$ de l'élément g_0, et $\overline{g_0 V}$ est compact, étant l'image topologique de l'ensemble compact $\overline{V}$.

Par exemple, le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est localement compact. En effet, posons

$$V = \{g \colon |g_{jl} - \delta_{jl}| < \varepsilon\}, \text{ où } \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l, \\ 0 & \text{si } j \neq l. \end{cases}$$

Pour un ε suffisamment petit, on a $V \subset GL(n, \mathbf{C})$, et donc V est un voisinage de l'élément neutre $e = \| \delta_{jl} \|_{j,l=1}^{n}$, tandis que $\overline{V}$ est un ensemble borné fermé de $\mathbf{C}^{n^2}$ qui doit donc être compact (VI de 1.1). Par conséquent, $GL(n, \mathbf{C})$ est localement compact en vertu de II.

Les groupes $SL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ sont fermés dans $GL(n, \mathbf{C})$ et donc localement compacts en vertu de I.

Une fonction f sur un groupe topologique G est dite *uniformément continue sur* G si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de l'élément neutre du groupe G tel que

$$|f(g_1) - f(g_2)| < \varepsilon \text{ pour } g_2 \in g_1 V. \qquad (1.2.1)$$

Si G est le groupe additif $\mathbf{R}^1$, alors V sera de la forme $V = \{x \colon |x| < \delta\}$, où $\delta > 0$; soit $f = f(x)$ une fonction sur $\mathbf{R}^1$; la condition $g_1 \in g_2 V$ peut alors être écrite sous la forme $x_1 \in x_2 V$, i.e. $x_1 - x_2 \in V$; par conséquent, la condition (1.2.1) signifie que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ pour $|x_1 - x_2| < \delta$, et nous sommes ramenés à la définition usuelle de la continuité uniforme d'une fonction sur $\mathbf{R}^1$.

III. (Théorème de continuité uniforme). *Toute fonction finie continue f sur un groupe localement compact G est uniformément continue sur G.*

Démonstration. Supposons que Q est le support de la fonction f, et U un voisinage symétrique de l'élément neutre e, tel que $\overline{U}$ soit compact. Par hypothèse, Q est compact et donc $Q\overline{U}$ le sera aussi (voir XV de 1.1). Posons

$$W = \{g \colon |f(g_1 g) - f(g_1)| < \varepsilon \text{ pour tous les } g_1 < Q\overline{U}\}.$$

Il est évident que $e \in W$; en vertu de XIV, 1.1, W est ouvert; par conséquent, W est un voisinage de l'élément neutre e. Si $g \in U$, alors $f(g_1 g_2)$ et $f(g_1)$ s'annulent lorsque $g_1 \notin Q\overline{U}$ et donc $|f(g_1 g) - f(g_1)| < \varepsilon$ pour $g \in W \cap U$ quel que soit $g_1 \in G$. Si l'on pose $g_1 g = g_2$ et $V = W \cap U$, on obtient $|f(g_2) - f(g_1)| < \varepsilon$ pour $g_2 \in g_1 V$.

1.3. Lemme de Urysohn. Un espace topologique X est dit *normal* lorsque pour chaque paire d'ensembles fermés disjoints F_1, $F_2 \subset X$ on peut trouver des ensembles ouverts U_1, U_2 qui contiennent respectivement F_1 et F_2. Cette condition est équivalente à la suivante: pour chaque ensemble fermé F et chaque ensemble ouvert $U \supset F$, il existe un ensemble ouvert V tel que $F \subset V$ et $\overline{V} \subset U$. En effet, il suffit de considérer l'ensemble fermé $X \setminus U$ qui ne se rencontre pas avec F.

I. *Un espace séparé compact est normal.*

Démonstration. Soient F_1, F_2 des ensembles disjoints fermés (et donc compacts) de X. En vertu de IV de 1.1, il existe pour chaque point $y \in F_2$ des ensembles ouverts disjoints U_y, V_y qui contiennent F_1 et y_1 respectivement. Les ensembles V_y, $y \in F_2$, forment un recouvrement de F_2. Puisque F_2 est compact, on peut choisir parmi les ensembles V_y une famille finie $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ qui forme un recouvrement de F_2. Alors

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}, \quad V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{y_k}$$

sont des ensembles ouverts disjoints qui contiennent F_1 et F_2 respectivement.

II. (Lemme de Urysohn). *Pour toute paire d'ensembles fermés disjoints F_0, F_1 d'un espace normal X, il existe une fonction réelle f, continue sur X, qui satisfait aux conditions suivantes*:

1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;
2) $f(x) = 0$ *sur* F_0;
3) $f(x) = 1$ *sur* F_1.

Démonstration. L'assertion est triviale si l'un des ensembles F_0, F_1 est vide. Si c'est, par exemple, F_0, il suffit de poser $f(x) = 1$ pour chaque $x \in X$. Ecartons cette éventualité et supposons que F_0 et F_1 sont des ensembles non vides.

Posons $V_1 = X - F_1$. Alors $F_0 \subset V_1$ et, en vertu de la normalité de l'espace X, il existe un ensemble ouvert, que nous désignerons par V_0, tel que $F_0 \subset V_0$, $\overline{V}_0 \subset V_1$.

D'une manière analogue, il existe un ensemble ouvert, que nous désignerons par $V_{1/2}$, tel que $\overline{V}_0 \subset V_{1/2}$ et $\overline{V}_{1/2} \subset V_1$. En reprenant ce raisonnement, nous obtiendrons pour chaque nombre r de la forme $m/2^n$, $0 \leqslant m \leqslant 2^n$, un ensemble ouvert V_r tel que $\overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2}$ lorsque $r_1 < r_2$.

Posons maintenant pour chaque nombre réel t choisi dans l'intervalle $0 < t < 1$

$$V_t = \bigcup_{r \leqslant t} V_r,$$

en outre $V_t = \varnothing$ pour $t < 0$ et $V_t = X$ pour $t > 1$. Ainsi nous avons défini les ensembles ouverts V_t pour tous les réels t. On aura alors

$$\overline{V}_{t_1} \subset V_{t_2} \text{ si } t_1 < t_2. \tag{1.3.1}$$

En effet, lorsque $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$, on peut trouver des nombres rationnels r_1, r_2 de la forme $m/2^n$ qui vérifient les conditions $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$, et alors $\overline{V}_{t_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2} \subset V_{t_2}$.

Mais lorsque $t_1 < 0$ et $t_2 > 0$, la relation (1.3.1) est évidente, puisqu'alors $V_{t_1} = \varnothing$ (respectivement $V_{t_2} = X$ pour $t_2 > 1$).

Posons

$$f(x) = \inf \{t : x \in V_t\} \tag{1.3.2}$$

et démontrons que $f(x)$ satisfait à toutes les conditions exigées.

Pour $t > 1$ l'ensemble $V_t = X$ contient chaque point x; par conséquent, $\{t : x \in V_t\} \supset (1, \infty)$, d'où l'on tire, en vertu de (1.3.2), que $f(x) \leqslant 1$. Pour $t < 0$ l'ensemble $V_t = \varnothing$ ne contient aucun point x. Par conséquent, l'ensemble $\{t : x \in V_t\}$ ne contient pas de points $t < 0$, de sorte qu'en vertu de (1.3.2) on a $f(x) \geqslant 0$. Si $x \in V_0$, alors $0 \in \{t : x \in V_t\}$; donc $f(x) \leqslant 0$. En réunissant $f(x) \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$, on obtient $f(x) = 0$ sur V_0; en particulier $f(x) = 0$ sur $F_0 \subset V_0$. D'une manière analogue, $x \notin V$, i.e. $x \in F_1$, implique $1 \notin \{t : x \in V_t\}$; d'où l'on tire, en vertu de (1.3.2), que $f(x) \geqslant 1$. D'autre part, d'après ce que nous avons démontré ci-dessus, $f(x) \leqslant 1$. Par conséquent, $f(x) = 1$ sur F_1.

Il reste à démontrer la continuité de la fonction $f(x)$. Supposons que $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; posons $y_0 = f(x_0)$. En vertu de (1.3.1) et (1.3.2), $x_0 \in V_t$ pour $t > y_0$ et $x_0 \notin \overline{V}_t$ pour $t < y_0$. En particulier, $x_0 \in V_{y_0+\varepsilon} \setminus \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$, de sorte que, étant un ensemble ouvert, $V_{y_0+\varepsilon} \setminus \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$ est un voisinage du point x_0. Lorsque $x \in V_{y_0+\varepsilon} \setminus \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$, on a $y_0 + \varepsilon \in \{t : x \in V_t\}$ et $y_0 - \varepsilon \notin \{t : x \in V_t\}$. Par conséquent, en vertu de (1.3.1) et (1.3.2), on a $y_0 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant y_0 + \varepsilon$, i.e. $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Cela signifie que f est continue.

Remarque. En vertu de I, tout espace compact est normal; par conséquent, le lemme de Urysohn est vrai pour les ensembles fermés d'un espace compact.

1.4. Théorème de Stone. Soit Q un ensemble quelconque. Introduisons pour des fonctions réelles f sur Q les notations

$$(f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n)(q) = \max \{f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)\},$$

$$(f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n)(q) = \min \{f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)\}.$$

On appelle *treillis* un ensemble A de toutes les fonctions réelles sur Q muni de lois de composition internes associant à tout couple de

fonctions f_1, f_2 leur réunion $f_1 \cup f_2$ et leur intersection $f_1 \cap f_2$; il est évident que dans ce cas à chaque suite $f_1, \ldots, f_n$ de A sont associés $f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ et $f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n$. On appelle *algèbre de fonctions réelle* un ensemble A de fonctions réelles muni de lois de composition internes associant à chacune des fonctions de A son produit par un nombre réel arbitraire, et à chaque couple de fonctions de A leur somme et leur produit. Une algèbre réelle A de fonctions sur Q est dite *uniformément fermée* si la limite de chaque suite de fonctions $f_n \in A$ qui converge uniformément sur Q appartient à A. Si l'algèbre A n'est pas uniformément fermée, alors, en y adjoignant toutes les limites indiquées, on obtient un nouvel ensemble de fonctions qui contient A et qui sera, comme on le voit facilement, une algèbre uniformément fermée. Cette algèbre s'appelle *adhérence uniforme* de l'algèbre A et se note $\overline{A}$.

En guise d'exemple d'algèbre de fonctions réelle uniformément fermée on peut citer l'ensemble $C^r(X)$ de toutes les fonctions réelles continues sur un espace topologique X donné.

I. *Chaque algèbre réelle A uniformément fermée de fonctions bornées, et contenant toutes les constantes réelles, forme un treillis.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de démontrer que si $f \in A$, on a $|f| \subset A$, puisqu'alors le fait que $f_1, f_2 \in A$ implique l'appartenance à A des fonctions

$$f_1 \cup f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|), \quad f_1 \cap f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|).$$

Supposons que $f \in A$ et $|f(x)| \leqslant c$ quel que soit $x \in X$. Alors

$$|f(x)| = \sqrt{c^2 - [c^2 - (f(x))^2]} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{(f(x))^2}{c^2}\right)} =$$

$$= c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\left(1 - \frac{(f(x))^2}{c^2}\right)^n\right\},$$

où la série dans le membre de droite converge uniformément sur X, puisque $0 \leqslant 1 - \frac{(f(x))^2}{c^2} \leqslant 1$, et tous les termes de la série appartiennent à A. Par conséquent, $|f| \in A$.

II. *Soit A l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues $f = f(x)$ sur un espace compact X telles que les conditions suivantes sont satisfaites:*

1) *A est un treillis;*

2) *pour chaque couple de points distincts $\xi, \eta \in X$ et pour tous nombres réels a, b, on peut trouver une fonction* $f_{\xi\eta} \in A$ telle que $f_{\xi\eta}(\xi) = a$, $f_{\xi\eta}(\eta) = b$.

Alors toute fonction réelle continue sur X est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions $f_n \in A$.

D é m o n s t r a t i o n. Soient f une fonction quelconque réelle continue sur X, ε un nombre positif arbitraire, et $f_{\xi\eta}(x)$ une fonction de A qui satisfait à la condition 2) pour $a = f(\xi)$, $b = f(\eta)$. Posons

$$U_{\xi\eta} = \{x : f_{\xi\eta}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \quad V_{\xi\eta} = \{x : f_{\xi\eta}(x) > f(x) - \varepsilon\};$$

$U_{\xi\eta}$, $V_{\xi\eta}$ sont des ensembles ouverts sur X qui contiennent ξ et η. Pour un ξ donné, les ensembles $U_{\xi\eta}$ forment un recouvrement de l'espace compact X ; en choisissant dans ce recouvrement un recouvrement fini $\{U_{\xi_1\eta}, U_{\xi_2\eta}, \ldots, U_{\xi_n\eta}\}$ et en posant $\varphi_\xi = f_{\xi_1\eta} \cap f_{\xi_2\eta} \cap \ldots \cap f_{\xi_n\eta}$, $V_\xi = \bigcap_{j=1}^{n} V_{\xi_j\eta}$, nous obtenons une fonction $\varphi_\xi \in A$ vérifiant les conditions

$$\varphi_\xi(x) < f(x) + \varepsilon \text{ sur } X,$$

$$\varphi_\xi(x) > f(x) - \varepsilon \quad \text{si} \quad x \in V_\xi.$$

Choisissons maintenant dans le recouvrement $\{V_\xi\}$ de l'espace X un recouvrement fini $\{V_{\xi_1}, \ldots, V_{\xi_m}\}$ et posons $\psi = \varphi_{\xi_1} \cup \varphi_{\xi_2} \cup \ldots \cup \varphi_{\xi_m}$; nous obtenons alors une fonction $\psi \in A$ qui satisfait aux conditions $f(x) - \varepsilon < \psi(x) < f(x) + \varepsilon$ quel que soit X.

Posons maintenant $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, et désignons par ψ_n la fonction correspondante ψ. Alors $\psi_n \in A$ et $f(x) - 1/n < \psi_n(x) < f(x) + 1/n$ pour tout $x \in X$. Par conséquent ψ_n converge uniformément vers f.

Un ensemble A de fonctions sur Q s'appelle *séparateur de points* si pour deux points quelconques distincts $q_1, q_2 \in Q$ il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(q_1) \neq f(q_2)$.

THÉORÈME 1. (M. S t o n e). *Soit A une algèbre réelle de fonctions continues (sur un espace compact X) qui contient toutes les constantes réelles et qui sépare les points. L'adhérence uniforme $\bar{A}$ de l'algèbre A est alors isomorphe à l'algèbre $C^r(X)$ de toutes les fonctions continues sur X.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la proposition I, l'algèbre $\bar{A}$ est un treillis. Démontrons que $\bar{A}$ (et même A) satisfait à la condition 2) de la proposition II. D'où l'on pourra conclure, en vertu de II, que $\bar{A} = C^r(X)$.

Supposons donnés $\xi, \eta \in X$, $\xi \neq \eta$. Il existe dans A une fonction $f(x)$ telle que

$$f(\xi) \neq 0, \quad f(\xi) \neq f(\eta). \tag{1.4.1}$$

En effet, on peut trouver des fonctions $\varphi \in A$, $\psi \in A$ qui satisfont aux conditions $\varphi(\xi) \neq \varphi(\eta)$ et $\psi(\xi) \neq 0$ (par exemple $\psi(\xi) =$

$= C \neq 0$ sur X). Alors la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } \varphi(\xi) \neq 0; \\ \psi(x) & \text{si } \varphi(\xi) = 0, \ \psi(\xi) \neq \psi(\eta); \\ \varphi((x) + \psi(x) & \text{si } \varphi(\xi) = 0, \ \psi(\xi) = \psi(\eta), \end{cases} \qquad (1.4.2)$$

satisfait aux conditions (1.4.1). Nous pouvons alors supposer que $f(\eta) = 0$; dans le cas contraire, nous pouvons remplacer $f(x)$ par la fonction

$$f_0(x) = \frac{1}{f(\eta)} f(x) - \left[\frac{1}{f(\eta)} f(x)\right]^2.$$

Mais alors, en posant $f_1(x) = \frac{1}{f(\xi)} f(x)$ nous obtiendrons une fonction $f_1 \in A$ qui satisfait aux conditions $f_1(\xi) = 1$, $f_1(\eta) = 0$. D'une manière analogue, il existe une fonction $f_2 \in A$ qui satisfait aux conditions $f_2(\xi) = 0$, $f_2(\eta) = 1$. Alors la fonction $af_1 + bf_2$ appartient à A et prend les valeurs a et b aux points ξ et η respectivement. Par conséquent, $\bar{A}$ satisfait à toutes les conditions de la proposition II, et est donc isomorphe à $C^r(X)$.

THÉORÈME 2 (théorème de Weierstrass). *Soit X un sous-ensemble fermé borné de l'espace $\mathbf{R}^n$; alors chaque fonction réelle continue sur X $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients réels.*

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème de Stone à l'algèbre A de tous les polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels, envisagés comme fonctions sur X.

On appelle *algèbre de fonctions complexe* un ensemble A de fonctions complexes sur Q muni de lois de composition internes associant à chaque fonction de A son produit par un nombre complexe quelconque et, à chaque couple de fonctions, leur somme et leur produit. Pour une algèbre complexe de fonctions, les notions de fonction uniformément fermée et d'adhérence uniforme se définissent mot pour mot comme pour une algèbre de fonctions réelle.

Comme exemple d'algèbre de fonctions complexe uniformément fermée on peut citer l'algèbre $C(X)$ de toutes les fonctions complexes continues sur un espace topologique donné X.

THÉORÈME 3. *Soit A une algèbre complexe de fonctions continues sur un espace compact X qui satisfait aux conditions suivantes:*

1) *A sépare les points sur X;*

2) *si $f(x) \in A$, alors on a également $\overline{f(x)} \in A$;*

3) *f contient toutes les constantes complexes.*

Alors l'adhérence uniforme $\bar{A}$ de l'algèbre A est isomorphe à $C(X)$.

Démonstration. Soit A_1 l'ensemble de toutes les fonctions réelles qui appartiennent à A. Il est évident que A_1 est une

algèbre réelle de fonctions. Si $f \in A$, alors, en vertu de la condition 2), les éléments $\mathrm{Re}\, f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ et $\mathrm{Im}\, f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ appartiennent à A et donc à A_1. On peut en déduire que A_1 sépare les points sur X. En effet, si $x_1, x_2 \in X$ et $x_1 \neq x_2$, alors en vertu de la condition 1) il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$. On a alors au moins une des inégalités $\mathrm{Re}\, f(x_1) \neq \mathrm{Re}\, f(x_2)$, $\mathrm{Im}\, f(x_1) \neq \neq \mathrm{Im}\, f(x_2)$, où $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f \in A_1$. D'après le théorème de Stone

$$\bar{A}_1 = C^r(X). \tag{1.4.3}$$

Supposons maintenant que f est une fonction continue quelconque sur X. En vertu de (1.4.3), il existe des suites $\varphi_n \in A_1$, $\psi_n \in A_1$ telles que $\varphi_n \to \mathrm{Re}\, f$ et $\psi_n \to \mathrm{Im}\, f$ uniformément sur X. Alors $\varphi_n + i\psi_n \in A$ et $\varphi_n + i\psi_n \to f$ uniformément sur X.

1.5. Définition du groupe topologique compact. Exemples. Un groupe topologique G est dit *compact* si l'espace topologique G est compact.

I. *Chaque sous-groupe fermé d'un groupe topologique compact est compact.*

L'assertion découle directement de II, 1.1.

II. *Une fonction continue sur un groupe compact G est uniformément continue sur G.*

Cette assertion découle directement de III, 1.2 et de X, 1.1.

EXEMPLES.

1. Groupes finis. Chaque groupe fini (muni d'une topologie discrète) est compact (voir la note au bas de la page 183).

2. Le groupe $U(n)$. Rappelons qu'une matrice u est dite *unitaire* lorsque

$$u^* u = 1, \tag{1.5.1}$$

où 1 est la matrice unité. Désignons par $U(n)$ l'ensemble de toutes les matrices unitaires d'ordre n. Si $u_1, u_2 \in U(n)$, i.e. $u_1^* u_1 = 1$, $u_2^* u_2 = 1$, on a également $(u_1 u_2)^* (u_1 u_2) = u_2^* u_1^* u_1 u_2 = 1 \cdot 1 = 1$, i.e. $u_1 u_2 \in U(n)$. En outre, si $u \in U(n)$, on a en vertu de (1.5.1) $u^{-1} = u^*$ et $(u^{-1})^* u^{-1} = u^{**} u^{-1} = u u^{-1} = 1$, i.e. $u^{-1} \in U(n)$ également. Par conséquent $U(n)$ est un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Munissons le groupe $U(n)$ de la topologie induite par celle de l'espace topologique $GL(n, \mathbf{C})$ et convenons par la suite d'entendre par $U(n)$ le groupe topologique avec la topologie ainsi définie. Le groupe $U(n)$ est appelé *groupe unitaire d'ordre n.*

III. *Le groupe $U(n)$ est compact.*

Démonstration. D'après la définition de la topologie sur $GL(n, \mathbf{C})$ (voir l'exemple 3 de 2.1, chapitre III), la topologie

sur $U(n)$ est une topologie induite par celle de l'espace topologique C^{n^2}. Démontrons que $U(n)$ est un ensemble fermé borné de C^{n^2}; en vertu de VI, 1.1, on en tirera que $U(n)$ est compact. Ensuite, (1.5.1) signifie que $U(n)$ est l'ensemble des seuls points $(u_{11}, \ldots$ $\ldots, u_{1n}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nn}) \in C^{n^2}$ pour lesquels

$$\sum_{l=1}^{n} \bar{u}_{lj}u_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j=k, \\ 0 & \text{pour } j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Puisque le premier et le deuxième membre de (1.5.1) sont des fonctions continues sur C^{n^2}, $U(n)$ est donc fermé d'après I, 1.8, chapitre III. En posant ensuite $j = k$ dans (1.5.1) et en calculant la somme sur k de 1 à n, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |u_{lk}|^2 = n.$$

Cela signifie que $U(n)$ se trouve dans la boule (plus exactement, sur la sphère qui limite la boule) de l'espace C^{n^2} de rayon $\sqrt{n}$ et de centre au point $(0, \ldots, 0)$, de sorte que l'ensemble $U(n)$ est borné dans C^{n^2}. Par conséquent, $U(n)$ est compact.

En particulier, le groupe $U(1)$ $(n=1)$ est compact. Il est évident que $U(1)$ est le groupe multiplicatif des nombres $e^{i\varphi}$, $\varphi \in R^1$, égaux à un en valeur absolue. On voit facilement que $U(1)$ est (topologiquement) isomorphe au groupe Γ^1 des rotations du cercle et donc au tore de dimension 1 $\mathcal{T}^1$ (voir l'exemple 3 de 2.5, chapitre III). Par conséquent, *les groupes* Γ^1 *et* $\mathcal{T}^1$ *sont compacts.*

REMARQUE 1. Il découle de (1.5.1) que $\det u^* \cdot \det u = 1$, i.e.

$$|\det u| = 1$$

pour chaque matrice $u \in U(n)$. Il est évident que l'application $u \rightarrow \det u$ est un homomorphisme continu du groupe $U(n)$ sur le groupe $U(1)$.

3. Le groupe $SU(n)$. On note ainsi l'ensemble de toutes les matrices $u \in U(n)$ qui vérifient la condition $\det u = 1$.

On tire de la relation évidente $SU(n) = U(n) \cap SL(n, C)$ que $SU(n)$ est un sous-groupe fermé du groupe $U(n)$. D'où l'on obtient en attirant I:

IV. *Le groupe* $SU(n)$ *est compact.*

Faisons correspondre à chaque matrice $u \in U(n)$ un élément $\{\alpha, v\}$ du groupe $U(1) \times SU(n)$ suivant les formules

$$\alpha = \det u, \quad v_{1k} = \frac{1}{\alpha} u_{1k}, \quad v_{jk} = u_{jk} \text{ pour } j > 1.$$

Le lecteur vérifiera sans difficulté que cette application est un homémorphisme du groupe $U(n)$ sur le groupe $U(1) \times SU(n)$; par conséquent

V. *Les groupes* $U(n)$ *et* $U(1) \times SU(n)$ *sont homéomorphes,*

Remarque 2. Il va de soi que l'homéomorphisme défini ci-dessus n'est pas le seul possible. Par exemple, on aurait pu poser

$$\alpha = \det u, \quad v_{2k} = \frac{1}{\alpha} u_{2k}, \quad v_{jk} = u_{jk} \text{ pour } j \neq 2.$$

Envisageons plus en détail le cas $n = 2$. $SU(2)$ est constitué par toutes les matrices $u = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{Vmatrix}$ telles que

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \quad a_1\bar{a}_1 + b_1\bar{b}_1 = 1, \quad a\bar{a}_1 + b\bar{b}_1 = 0, \quad a_1 b - b_1 a = 1, \tag{1.5.3}$$

d'où l'on tire

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1 (a_1 b - b_1 a) = -a_1 a \bar{a}_1 - \bar{b}_1 b_1 a = -a (a_1 \bar{a}_1 + b_1 \bar{b}_1) = -a,$$

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 (a_1 b - b_1 a) = \bar{a}_1 a_1 b + b_1 (\bar{b}_1 b) = b (\bar{a}_1 a_1 + \bar{b}_1 b_1) = b.$$

Réciproquement lorsque $\bar{b}_1 = -a$ et $\bar{a}_1 = b$, et en outre $|a|^2 + |b|^2 = 1$, on a $u \in SU(2)$. Ainsi

VI. *Le groupe* $SU(2)$ *est constitué par toutes les matrices*

$$u = \begin{Vmatrix} \bar{b} & -\bar{a} \\ a & b \end{Vmatrix} \tag{1.5.4}$$

qui vérifient la condition

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{1.5.5}$$

Posons

$$a = x_1 + ix_2, \quad b = x_3 + ix_4; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}; \tag{1.5.6}$$

alors (1.5.5) s'écrit sous la forme

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 = 1. \tag{1.5.7}$$

Nous voyons que les formules (1.5.6) définissent une application $u \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de l'espace topologique $SU(2)$ sur la sphère unité de $\mathbf{R}^4$. D'où l'on obtient, en comparant les topologies sur $SU(2)$ et dans $\mathbf{R}^4$:

VII. *L'application* $u \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *déterminée par les formules* (1.5.6) *est un homéomorphisme de* $SU(2)$ *sur la sphère unité de* $\mathbf{R}^4$; *par conséquent,* $SU(2)$ *est homéomorphe à la sphère unité de* $\mathbf{R}^4$.

4. Le groupe $O(n, \mathbf{R})$. Nous désignons par $O(n, \mathbf{R})$ l'ensemble de toutes les matrices g d'ordre n (à éléments réels) qui

vérifient la condition

$$g'g = 1, \tag{1.5.8}$$

où g' désigne la matrice transposée de g. Il est évident que les conditions (1.5.1) et (1.5.8) sont équivalentes pour les matrices réelles; par conséquent

$$O(n, \mathbf{R}) = U(n) \cap GL(n, \mathbf{R}). \tag{1.5.9}$$

Mais $U(n)$ et $GL(n, \mathbf{R})$ sont des sous-groupes fermés du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ (voir les exemples 1 et 3 dans 2.3, chapitre III); par conséquent on tire de (1.5.9) que $O(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe fermé du groupe $U(n)$. D'où en vertu de II, 1.1 on tire:

VIII. *Le groupe* $O(n, \mathbf{R})$ *est compact.*

Le groupe $O(n, \mathbf{R})$ est appelé *groupe orthogonal réel* et ses éléments, *matrices orthogonales réelles.*

Remarque 3. On déduit de la relation (1.5.8) que det $g' \times$ $\times$ det $g = 1$, i.e. $(\det g)^2 = 1$; donc

$$\det g = \pm 1 \text{ quand } g \in O(n, \mathbf{R}). \tag{1.5.10}$$

Il est évident que l'application $g \to \det g$ est un homomorphisme du groupe $O(n, \mathbf{R})$ sur le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$.

5. Le groupe $SO(n, \mathbf{R})$. Nous désignons par $SO(n, \mathbf{R})$ l'ensemble de toutes les matrices réelles orthogonales g telles que $\det g = 1$. Il est évident que

$$SO(n, \mathbf{R}) = O(n, \mathbf{R}) \cap SL(n, \mathbf{R}); \tag{1.5.11}$$

mais comme $O(n, \mathbf{R})$ et $SL(n, \mathbf{R})$ sont des sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbf{R})$, on déduit de (1.5.11) que $SO(n, \mathbf{R})$ *est un sous-groupe fermé de* $O(n, \mathbf{R})$.

D'où l'on tire à l'aide de II de 1.1:

IX. *Le groupe* $SO(n, \mathbf{R})$ *est compact.*

Le groupe $SO(n, \mathbf{R})$ est appelé *groupe orthogonal réel unimodulaire.*

X. *Le groupe* $O(n, \mathbf{R})$ *est homéomorphe au groupe* $\{-1, 1\} \times$ $\times SO(n, \mathbf{R})$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition V, sauf qu'il faut se servir de la relation (1.5.10) à la place de la relation (1.5.2).

Envisageons maintenant en détail les cas $n = 2$ et $n = 3$. Le groupe $SO(2, \mathbf{R})$ est constitué par toutes les matrices

$$g = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}$$

à éléments réels, qui vérifient, d'après (1.5.11), les conditions

$$\left.\begin{array}{c} g_{11}^2+g_{12}^2=1, \quad g_{21}^2+g_{22}^2=1, \\ g_{11}g_{21}+g_{12}g_{22}=0, \quad g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}=1. \end{array}\right\} \qquad (1.5.12)$$

En vertu de la première des conditions (1.5.12), nous pouvons poser

$$g_{11}=\cos\theta, \quad g_{12}=-\sin\theta, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \qquad (1.5.13)$$

θ étant déterminé à un terme additif multiple de 2π près. Alors il découle de la troisième condition (1.5.12) que $g_{21}=\lambda\sin\theta$ et $g_{22}= =\lambda\cos\theta$. En substituant ces expressions dans la dernière des conditions (1.5.12), nous voyons que $\lambda=1$, de sorte que $g_{21}= =\sin\theta$, $g_{22}=\cos\theta$. La deuxième condition (1.5.13) est évidente. Ainsi

XI. *Le groupe* SO (2, **R**) *est constitué par toutes les matrices de la forme*

$$g=\left\|\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right\|, \qquad (1.5.14)$$

où θ *est un nombre réel.*

Posons

$$\left.\begin{array}{l} x_1'=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, \\ x_2'=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta. \end{array}\right\} \qquad (1.5.15)$$

Des égalités $(x_1+ix_2)e^{i\theta}=(x_1+ix_2)\,(\cos\theta+i\sin\theta)=x_1'+ +ix_2'$ on tire directement que x_1', x_2' sont les coordonnées de l'image du point (x_1, x_2) par la rotation de centre (0, 0) du plan $\mathbf{R}^2$ d'un angle θ dans le sens antihoraire. Ainsi, l'application linéaire (1.5.15) de matrice g est simplement une rotation du plan $\mathbf{R}^2$ d'un angle θ. Le groupe SO (2, **R**) est donc appelé *groupe des rotations de l'espace de dimension deux*. Faisons correspondre à la rotation g_θ du plan $\mathbf{R}^2$ autour de (0, 0) d'un angle θ la rotation γ_θ du cercle de centre (0, 0) d'un même angle θ (voir l'exemple 1.17, chapitre I). Il est évident que l'application $g_\theta\to\gamma_\theta$ ainsi obtenue est un isomorphisme; en comparant les topologies sur SO (2, **R**) et sur Γ^1 on voit aisément que cet isomorphisme est topologique. Ainsi,

XII. *Le groupe* SO (2, **R**) *est isomorphe au groupe* Γ^1 *et donc au groupe* $\mathcal{T}^1$.

6. L e g r o u p e SO (3, **R**). Désignons par G_0 l'ensemble de toutes les rotations de l'espace $\mathbf{R}^3$ relativement à l'origine $O= =(0, 0, 0)$. Choisissons un système de coordonnées orthogonal fixe d'origine O et désignons par e_1, e_2, e_3 les vecteurs directeurs unité des axes de coordonnées. La rotation $g\in G_0$ applique e_1, e_2, e_3 dans trois vecteurs g_1, g_2, g_3 orthogonaux entre eux possédant la mê-

me orientation que e_1, e_2, e_3. Soit g_{ik} la projection du vecteur g_k sur l'axe i. Les vecteurs g_1, g_2, g_3 sont complètement déterminés par leurs projections g_{ik}, i.e. par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right\| .$$

Cette matrice sera également désignée par la lettre g et appelée *matrice de la rotation* g. Il est évident que les g_{ik} sont réels. On déduit de l'orthogonalité des vecteurs g_1, g_2, g_3 que g est une matrice orthogonale. En outre, puisque les orientations de e_1, e_2, e_3 et g_1, g_2, g_3 coïncident, on a $\det g = 1$. Donc $g \in SO(3, \mathbf{R})$.

La rotation g est entièrement déterminée par sa matrice g.

En effet, chaque vecteur $x \in \mathbf{R}^3$ est de la forme $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, où x_1, x_2, x_3 sont les projections du vecteur x sur les axes de coordonnées correspondants. La rotation g étant linéaire et appliquant e_1, e_2, e_3 sur g_1, g_2, g_3, elle envoie le vecteur x sur le vecteur

$$x' = x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3. \tag{1.5.16}$$

Soient x'_1, x'_2, x'_3 les projections du vecteur sur les axes du système de départ. En projetant les deux membres de (1.5.16) sur ces axes, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3, \\ x'_2 &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3, \\ x'_3 &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.5.17}$$

i.e. la rotation g est une transformation linéaire de l'espace $\mathbf{R}$ de matrice $g \in SO(3, \mathbf{R})$. Réciproquement, pour chaque matric $g \in SO(3, \mathbf{R})$ la formule (1.5.17) détermine une rotation $g \in G_0$. Par conséquent, le groupe $SO(3, \mathbf{R})$ est appelé *groupe des rotations de l'espace de dimension trois* *). Ses représentations irréductibles jouent un rôle important dans de nombreuses applications (voir § 3, chapitre IV et chapitre X).

Dans nombre de cas il s'avère commode de décrire les rotations de l'espace tridimensionnel à l'aide des trois paramètres indépendants suivants, appelés angles d'Euler. Supposons que la rotation g applique les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz dans les axes Ox', Oy', Oz' (fig. 3). Désignons par Ol la droite suivant laquelle se coupent les plans xOy et $x'Oy'$; choisissons sur Ol un sens tel qu'un observateur orienté suivant ce sens voie la rotation d'un angle $\theta \leqslant \pi$ qui amène l'axe Oz sur l'axe Oz' dans le sens antihoraire. Cette condi-

*) Par analogie avec les cas $n = 2$ et $n = 3$, le groupe $SO(n, \mathbf{R})$ est appelé *groupe des rotations de l'espace* $\mathbf{R}^n$.

tion détermine de manière unique le sens de la droite Ol, sauf dans les cas où les axes Oz et Oz' coïncident ou forment un angle π. Désignons ensuite par φ_1 l'angle entre l'axe Ox et la droite Ol, par φ_2 l'angle entre la droite Ol et l'axe Ox' et par θ l'angle entre Oz et Oz'. Les angles φ_1, φ_2, θ sont appelés *angles d'Euler* de la rotation g. D'après leur définition même, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$,

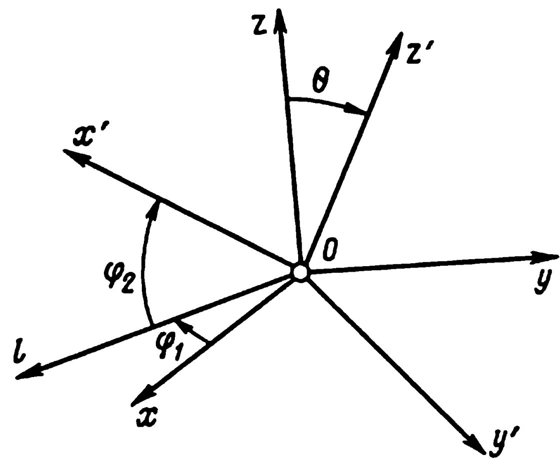


Fig. 3

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. A différents triplets de nombres φ_1, φ_2, θ choisis dans ces intervalles correspondent des rotations différentes, sauf dans les cas $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Dans ces cas, les plans xOy et $x'Oy'$ coïncident et par conséquent la droite Ol n'est pas définie. En la choisissant de manières différentes, nous voyons que les triplets $(\varphi_1, \varphi_2, 0)$ et $(\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 - \alpha, 0)$ déterminent une même rotation; les triplets $(\varphi_1, \varphi_2, \pi)$ et $(\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 - \alpha, \pi)$ déterminent aussi une même rotation.

XIII. *Une rotation g est complètement déterminée par ses angles d'Euler* φ_1, φ_2, θ.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par g_φ et g_θ des rotations autour des axes Oz et Ox d'angles φ et θ respectivement. La rotation g peut être représentée comme le produit

$$g = \tilde{g}_{\varphi_2} \tilde{g}_\theta g_{\varphi_1} \tag{1.5.18}$$

des trois rotations g_{φ_1}, $\tilde{g}_\theta$, $\tilde{g}_{\varphi_2}$ autour des axes Oz, Ol, Oz' respectivement. En effet, la rotation g_{φ_1} fait coïncider l'axe Ox avec l'axe Ol, puis la rotation $\tilde{g}_\theta$ applique l'axe Oz sur Oz' et enfin la rotation $\tilde{g}_{\varphi_2}$ fait coïncider les axes Ox et Oy avec les axes Ox' et Oy'. Ceci démontre la formule (1.5.18) et donc la proposition XIII.

La rotation $\tilde{g}_\theta$ est la rotation g_θ du système de coordonnées auxiliaires obtenu à partir du système donné par la rotation g_{φ_1}, de sorte que $\tilde{g}_\theta = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_1}^{-1}$. D'une manière analogue, $\tilde{g}_{\varphi_2} = (\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1}) \times$

$\times g_{\varphi_2}(\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1})^{-1}$; d'où l'on tire à l'aide de (1.5.18):

$$g = \tilde{g}_{\varphi_2}\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1} = (\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1})\, g_{\varphi_2}(\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1})^{-1}\tilde{g}_\theta g_{\varphi_1} = \tilde{g}_\theta g_{\varphi_1} g_{\varphi_2} = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2}. \quad (1.5.19)$$

En se servant des angles d'Euler on obtient facilement les expressions pour les éléments matriciaux g_{ik} de la rotation g. En effet, les matrices des rotations g_φ, g_θ sont de la forme

$$g_\varphi = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_\theta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

En portant ces expressions dans (1.5.19) et en prenant en considération qu'il faut multiplier les matrices pour faire le produit des rotations, nous obtenons

$$g = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_2\sin\theta & \cos\varphi_2\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \quad (1.5.20)$$

Exercice. Démontrer que l'application

$$f: \begin{Vmatrix} \bar{b} & -\bar{a} \\ a & b \end{Vmatrix} \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + \bar{b}^2 - \bar{a}^2) & \frac{i}{2}(b^2 + a^2 - \bar{b}^2 - \bar{a}^2) & ab + \overline{ab} \\ \frac{i}{2}(-\bar{b}^2 + \bar{a}^2 + b^2 - a^2) & \frac{1}{2}(b^2 + a^2 + \bar{b}^2 + \bar{a}^2) & i(ab - \overline{ab}) \\ -a\bar{b} - \bar{a}b & i(\bar{a}b - a\bar{b}) & b\bar{b} - a\bar{a} \end{Vmatrix}$$

est un homomorphisme ouvert continu du groupe $SU(2)$ sur le groupe $SO(3, \mathbf{R})$ à noyau

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \right\}.$$

I n d i c a t i o n. Démontrer préalablement que f applique les matrices

$$\left\| \begin{matrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{matrix} \right\| \quad \text{et} \quad \left\| \begin{matrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{matrix} \right\|$$

dans g_φ et g_θ respectivement.

§ 2. Représentations des groupes compacts

2.1. Moyenne invariante sur un groupe compact. Soit G un groupe topologique compact. Il existe sur le groupe G une mesure invariante bilatère μ, et cette mesure peut être choisie de manière à avoir $\mu(G) = 1$ (voir G. C h i l o v [1]). Définissons sur le groupe G une moyenne invariante de la manière suivante. Soit $f \in L^1(G)$ (i.e. f est intégrable sur G relativement à la mesure μ) ; le nombre

$$M(f) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$$

est appelé *moyenne invariante* de la fonction f sur G. On écrit parfois $M_g(f(g))$ à la place de $M(f)$.

I. *La moyenne invariante $M(f)$ possède les propriétés suivantes:*

1) $M(1) = 1$, *où le* 1 *à gauche est la fonction* $f \equiv 1$ *sur* G, *tandis que le* 1 *à droite est le nombre*;

2) $M(\bar{f}) = \overline{M(f)}$;

3) $M(f) \geqslant 0$ *pour* $f \geqslant 0$ *et* $M(f) > 0$ *si* f *est continue*, $f \geqslant 0$ *et* $f \not\equiv 0$;

3′) $|M(f_1)| \leqslant M(|f_1|) \leqslant M(|f_2|)$ *pour* $|f_1| \leqslant |f_2|$;

4) $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$;

5) $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, *où* α *est un nombre*;

6) $M(f_h) = M(f)$ *et* $M(f^h) = M(f)$, *où* $f_h(g) = f(gh)$, $f^h(g) = f(hg)$;

7) $M_g(f(g^{-1})) = M_g(f(g))$.

Les propriétés 1), 2), 4), 5) découlent directement des propriétés de l'intégrale, les propriétés 3) et 3′) découlent des propriétés de l'intégrale et du fait que la mesure d'un ensemble ouvert non vide est positive, les propriétés 6) et 7) sont liées à l'invariance de la mesure μ.

Exercice. Démontrer que la propriété 3′) découle des propriétés 3) à 5).

La notion de moyenne invariante peut être généralisée aux fonctions vectorielles et aux fonctions à valeurs dans un ensemble d'opérateurs sur le groupe G (voir M. N a ï m a r k [1]); on a dans

ce cas des propositions analogues aux propositions II et III de 1.1, § 1, chapitre II.

2.2. Réductibilité complète des représentations d'un groupe compact.

Théorème 1. *Chaque représentation continue $g \to T(g)$ d'un groupe compact G dans un espace préhilbertien est équivalente à une représentation continue unitaire.*

Démonstration. Soient H un espace préhilbertien relativement au produit scalaire $(x, y)_1$, et $g \to T(g)$ une représentation continue de G dans H. Définissons la forme (x, y) sur H en posant

$$f(g) = (T(g)x, \quad T(g)y)_1, \tag{2.2.1}$$

$$(x, y) = M(f) = M((T(g)x, T(g)y)_1). \tag{2.2.2}$$

La forme (x, y) est un produit scalaire sur H. En effet, la forme (x, y) est bilinéaire en vertu des propriétés 1), 4), 5) de la moyenne invariante $M(f)$, de la linéarité de l'opérateur $T(g)$ et de la bilinéarité de la forme $(x, y)_1$. En outre, puisque $(x, y)_1$ est hermitienne, on a en vertu de la propriété 2) de I

$$(y, x) = M((T(g)y, T(g)x)_1) = M\overline{((T(g)x, T(g)y)_1)} = \overline{(x, y)},$$

et donc (x, y) est également hermitienne. Enfin $(T(g)x, T(g)x)_1 \geqslant 0$ puisque $(x, y)_1$ est un produit scalaire. D'où l'on tire, à l'aide de la propriété 3) de I

$$(x, y) = M((T(g)x, T(g)x)_1) \geqslant 0.$$

Puisque $g \to T(g)$ est une représentation continue, la fonction $f(g)$ déterminée par la formule (2.2.1) est continue. Par conséquent, il découle de la propriété 3) de I que $(x, x) = 0$ si et seulement si $(T(g)x, T(g)x)_1 = 0$ quel que soit $g \in G$. En posant ici $g = e$, nous voyons que $(x, x)_1 = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi $(x, x) \geqslant 0$ et $(x, x) = 0$ seulement pour $x = 0$. Nous avons donc démontré que (x, y) est un produit scalaire sur H. En vertu de la propriété 6) de I, (2.2.1) et (2.2.2), nous avons pour chaque $h \in G$

$$\begin{aligned}(T(h)x, T(h)y) &= M((T(g)T(h)x, T(g)T(h)y)_1) = \\ &= M((T(gh)x, T(gh)y)_1) = M(f_h) = M(f) = \\ &= M((T(g)x, T(g)y)_1) = (x, y),\end{aligned}$$

et donc T est unitaire relativement à (x, y). Par conséquent, l'application identique $x \to x$ de l'espace H à produit scalaire $(x, y)_1$ sur ce même espace H à produit scalaire (x, y) applique $T(g)$ à nouveau sur $T(g)$, qui est unitaire relativement à (x, y).

Il nous reste à démontrer que $g \to T(g)$ est continue relativement à (x, y). Posons pour un $x \in H$ donné

$$\varphi(g, h) = \| T(hg)x - T(h_0 g)x \|_1, \quad g, h, h_0 \in G, \tag{2.2.3}$$

où $\| x \|_1 = \sqrt{(x, x)_1}$; puisque la représentation $g \to T(g)$ est continue, la fonction $\varphi(g, h)$ est continue sur $G \times G$ et

$$\varphi(g, h_0) = 0. \tag{2.2.4}$$

Posons ensuite

$$V_1 = \{\lambda : \lambda \in C^1, \ |\lambda| < \varepsilon\}, \tag{2.2.5}$$

$$V_2 = \{h : h \in G, \ \varphi(g, h) \in V_1 \text{ pour tous les } g \in G\}; \tag{2.2.6}$$

V_1 est un voisinage de 0 dans C^1, et par conséquent (voir XIV, 1.1, V_2 est un ensemble ouvert (dans G) qui contient h_0 (d'après (2.2.4)) i.e. V_2 est un voisinage de l'élément h_0. En vertu de (2.2.6) et (2.2.3)

$$\| T(hg)x - T(h_0 g)x \|_1 < \varepsilon \quad \text{pour} \quad h \in V_2 \text{ et tous les } g \in G. \tag{2.2.7}$$

En outre $\| T(g) y \|_1$ est une fonction continue de g sur le groupe compact G *) et donc

$$\| T(g) y \|_1 \leqslant C(y) \quad \text{pour tous les} \quad g \in G. \tag{2.2.8}$$

En réunissant (2.2.7) et (2.2.8), nous voyons que lorsque $g \in G$, $h \in V_2$

$$|(T(h) T(g)x, T(g)y)_1 - (T(h_0) T(g)x, T(g)y)_1| =$$
$$= |(T(hg)x - T(h_0 g)x, T(g)y)_1| \leqslant$$
$$\leqslant \| T(hg)x - T(h_0 g)x \|_1 \| T(g)y \|_1 \leqslant \varepsilon C(y),$$

et donc pour $h \in V_2$

$$|(T(h)x, y) - (T(h_0)x, y)| =$$
$$= M_g \{(T(h) T(g)x, T(g)y) - (T(h_0) T(g)x, T(g)y)\} \leqslant$$
$$\leqslant M(\varepsilon C(y)) = \varepsilon C(y). \tag{2.2.9}$$

L'inégalité (2.2.9) démontre la continuité sur G de la fonction $(T(h)x, y)$.

D'après le théorème 1, chaque représentation continue de dimension finie du groupe compact G peut être supposée unitaire.

I. *Si H est hilbertien, alors le produit scalaire (x, y) sur H est équivalent au produit scalaire initial $(x, y)_1$, i.e. il existe un nombre $c > 0$ tel que $(x, x) \leqslant c(x, x)_1$, $(x, x)_1 \leqslant c(x, x)$ quel que soit $x \in H$.*

Démonstration. D'après (2.2.8), $\| T(g)x \|_1^2 = (T(g)x, T(g)x)_1 \leqslant C(x)^2$ pour une certaine constante $C(x)$ qui dépend de x. D'après le théorème de Banach-Steinhaus (voir, par exemple, G. Chilov [1]), on peut en déduire qu'il existe une

*) $\| T(g) y \|_1 = \sqrt{(T(g)y, T(g)y)_1}$, tandis que $(T(g)y, T(g)y)_1$ est continue par suite de la continuité de la fonction $T(g)y$ (voir la définition d'une représentation) et de la continuité du produit scalaire.

constante c, indépendante de $x \in H$, et telle que

$$(T(g)x, \ T(g)x)_1 = \| T(g)x \|_1^2 \leqslant c^2 \| x \|_1^2$$

pour tous les $x \in H$. Donc

$$\| x \|^2 = (x, x) = M((T(g)x, \ T(g)x)_1) \leqslant M(c^2(x, x)_1 = \\ = c^2 \| x \|_1^2,$$

de sorte que $\| x \| \leqslant c \| x \|_1$. Réciproquement, $\| x \|_1 = \| T(g^{-1}) T(g) x \|_1 \leqslant c \| T(g) x \|_1$ et donc

$$M(\| x \|_1^2) \leqslant M(c^2 \| T(g) x \|_1^2) = c^2 \| x \|^2,$$

d'où l'on tire $\| x \|_1^2 \leqslant c^2 \| x \|^2$, i.e. $\| x \|_1 \leqslant c \| x \|$.

La proposition I implique à nouveau, que dans le cas d'un espace hilbertien H, la représentation $g \to T(g)$ est continue relativement à (x, y).

Rappelons que chaque représentation de dimension finie, équivalente à une représentation unitaire, est complètement réductible (voir II, 2.8, chapitre I). D'où l'on tire le

Théorème 2. *Chaque représentation continue de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.*

2.3. L'espace $L^2(G)$; représentation régulière. Désignons par $L^2(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions numériques f sur un groupe compact G telles que: 1) f est mesurable relativement à une mesure invariante sur G; 2) $\int_G |f(g)|^2 dg < +\infty$ *). Identifions les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle (pour plus de détails, voir, par exemple, G. Chilov [1]). Munissons $L^2(G)$ d'opérations usuelles d'addition et de multiplication par un nombre. Alors $L^2(G)$ devient un espace linéaire. Posons

$$(f_1, f_2) = M(f_1 \bar{f}_2) = \int_G f_1(g) \overline{f_2(g)} dg. \qquad (2.3.1)$$

Comme (f_1, f_2) est une forme hermitienne définie positive sur $L^2(G)$, elle transforme $L^2(G)$ en un espace euclidien. L'espace $L^2(G)$ est complet relativement au produit scalaire (2.3.1), i.e. c'est un espace hilbertien (voir G. Chilov [1]). On voit facilement que l'espace $L^2(G)$ est de dimension finie si et seulement si G est un groupe fini.

Définissons maintenant les opérateurs $T(g)$, $g \in G$, en posant pour chaque $h \in G$

$$T(h) f = f_h, \quad \text{i.e.} \quad T(h) f(g) = f(gh). \qquad (2.3.2)$$

---

*) Convenons d'écrire dorénavant dg à la place de $d\mu(g)$.

Il est évident que la fonction f_h est mesurable si f est mesurable. Il découle de l'invariance de la mesure que

$$\int_G |f_h(g)|^2\,dg = \int_G |f(gh)|^2\,dg = \int_G |f(g)|^2\,dg < +\infty\,; \qquad (2.3.3)$$

donc $f_h \in L^2(G)$ pour chaque $f \in L^2(G)$ et chaque $h \in G$. En outre, l'opérateur $T(h)$ est évidemment linéaire. L'application $h \to T(h)$ est une représentation du groupe G; en effet, pour $h_1, h_2 \in G$, on a

$$T(h_1)\,T(h_2)\,f(g) = T(h_1)\,(T(h_2)\,f(g)) =$$
$$= T(h_1)\,(f(gh_2)) = f((gh_1)\,h_2) = f(g\,(h_1h_2)) = T(h_1h_2)\,f(g),$$

et $T(e)\,f(g) = f(ge) = f(g)$. La représentation construite est unitaire; en effet, quels que soient $f_1, f_2 \in L^2(G)$, la fonction $f = f_1\overline{f}_2$ est intégrable et $(T(h)\,f_1, T(h)\,f_2) = M((f_1)_h\,(\overline{f}_2)_h) = M(f_h) = M(f) = M(f_1\overline{f}_2) = (f_1, f_2)$. Enfin la représentation $T: h \to T(h)$ est continue, i.e. pour chaque $f \in L^2(G)$ la fonction $h \to T(h)\,f$ est une application continue de G dans $L^2(G)$. En effet, si φ est continue sur G, alors φ est uniformément continue à gauche sur G, i.e. pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de l'élément neutre e du groupe G tel que la relation $|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)| < \varepsilon$ est satisfaite dès que $g_1 \in g_2U$; si $h \in h_0U$, alors on a également $gh \in gh_0U$ et donc $|T(h)\,\varphi(g) - T(h_0)\,\varphi(g)| = |\varphi(gh) - \varphi(gh_0)| < \varepsilon$ pour $h \in h_0U$ et tous les $g \in G$. Alors $\|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\|^2 = (T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi, T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi) = M(|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi|^2) \leqslant \varepsilon^2$ pour $h \in h_0U$. Soit $f \in L^2(G)$; puisque la famille $C(G)$ de toutes les fonctions continues sur G est partout dense dans $L^2(G)$, il existe une $\varphi \in C(G)$ telle que $\|f - \varphi\| < \varepsilon/3$. La représentation T étant unitaire, on a $\|T(h)\,f - T(h)\,\varphi\| < \varepsilon/3$ et $\|T(h_0)\,f - T(h_0)\,\varphi\| < \varepsilon/3$ pour tous les $h, h_0 \in G$. En utilisant la continuité de φ trouvons un voisinage U de l'élément $e \in G$ tel que pour $h \in h_0U$ on ait l'inégalité $\|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\| \leqslant \varepsilon/3$; alors

$$\|T(h)\,f - T(h_0)\,f\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T(h)\,f - T(h)\,\varphi\| + \|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\| +$$
$$+ \|T(h_0)\,\varphi - T(h_0)\,f\| < \varepsilon$$

lorsque $h \in h_0U$, ce qui démontre la continuité de la représentation T.

La représentation unitaire continue T que nous venons de construire du groupe G dans l'espace $L^2(G)$ est appelée *représentation régulière à droite* du groupe G. D'une manière analogue, on définit la *représentation régulière à gauche* S du groupe G dans l'espace $L^2(G)$ suivant la formule

$$S(h)\,f(g) = f(h^{-1}g). \qquad (2.3.4)$$

La représentation S est unitaire, ce qui découle de l'invariance à gauche de la moyenne $M(f)$ sur un groupe compact G (voir 6) de I, 2.1).

I. *Les représentations régulières à gauche et à droite de G sont unitairement équivalentes.*

Démonstration. A chaque fonction $f \in L^2(G)$ faisons correspondre la fonction

$$f'(g) = f(g^{-1}) \tag{2.3.5}$$

et soit W un opérateur sur $L^2(G)$ qui applique f sur f' pour chaque $f \in L^2(G)$. Il est évident que l'opérateur W est linéaire et applique $L^2(G)$ sur $L^2(G)$. En outre, pour toutes les fonctions $f, f_1 \in L^2(G)$, nous avons en vertu de 7), I, 2.1 :

$$(Wf, Wf_1) = (f', f_1') = M(f(g^{-1}) \overline{f_1(g^{-1})}) = \\ = M(f(g) \overline{f_1(g)}) = (f, f_1);$$

donc W est unitaire. Enfin, pour chaque $h \in G$ et chaque $f \in L^2(G)$

$$(WT(h) f)(g) = (T(h) f)(g^{-1}) = f(g^{-1}h) = \\ = f((h^{-1}g)^{-1}) = (Wf)(h^{-1}g) = (S(h) Wf)(g);$$

donc $WT(h) = S(h) W$ pour chaque $h \in G$, i.e. W applique T sur S.

2.4. Relations d'orthogonalité. Soit T une représentation unitaire continue de dimension finie d'un groupe G dans un espace H, et soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de H ; l'unitarité de la représentation T implique l'unitarité de la matrice $t(g)$ de l'opérateur $T(g)$ relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$ pour chaque $g \in G$ (voir III, 2.8, chapitre I). La continuité de la représentation T entraîne la continuité de tous les éléments matriciaux $t_{jk}(g)$ de la représentation T relativement à la base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$.

Considérons l'ensemble des représentations unitaires continues irréductibles de dimension finie T^α, $\alpha \in A$, du groupe G, deux à deux non équivalentes. L'ensemble des T^α, $\alpha \in A$, est dit *complet* si chaque représentation continue irréductible de dimension finie du groupe G est équivalente à une des T^α. Par la suite nous admettons que l'ensemble des T^α, $\alpha \in A$ est complet.

Soient $t^\alpha_{jk}(g)$, $j, k = 1, \ldots, n_\alpha$, les éléments matriciaux de la représentation T^α dans une certaine base orthonormée de l'espace de la représentation T^α. Soit $n_\alpha = \dim T^\alpha$ la dimension de la représentation T^α.

Théorème 1. *Soient T^α, $T^{\alpha'}$ deux représentations unitaires irréductibles continues de dimension finie d'un groupe compact G; leurs*

éléments matriciaux vérifient les conditions

$$\int_G t_{lj}^{\alpha}(g)\,\overline{t_{l'j'}^{\alpha'}(g)}\,dg = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \alpha' \neq \alpha \text{ ou lorsque } \alpha' = \alpha \\ & \text{mais } l' \neq l \text{ ou } j' \neq j; \\ 1/n_\alpha, & \text{si } \alpha' = \alpha,\ l' = l,\ j' = j. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

REMARQUE. Les relations (2.4.1) s'appellent relations d'orthogonalité d'un groupe compact. Ce sont les généralisations des relations d'orthogonalité (1.4.1), (1.4.2) du chapitre II pour un groupe fini.

La démonstration du théorème 1 reprend mot pour mot celle du théorème 1, 1.4, chapitre II.

Le théorème 1 signifie que les fonctions

$$e_{lj}^{\alpha}(g) = \sqrt{n_\alpha}\, t_{lj}^{\alpha}(g) \qquad (\alpha \in A,\ l,\ j = 1,\ \ldots,\ n_\alpha) \qquad (2.4.2)$$

forment un système orthonormé dans $L^2(G)$.

Rappelons (voir A. Kolmogorov et S. Fomine [1], G. Chilov [1]) qu'un système orthonormé $\{e_n\}$ dans un espace hilbertien H est dit *complet* si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs du système $\{e_n\}$ est dense dans H.

THÉORÈME 2. *Le système orthonormé* $\{e_{lj}^{\alpha}\}$ *est complet dans* $L^2(G)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments du système $\{t_{lj}^{\alpha}\}$ est dense dans $L^2(G)$ relativement à la norme de $L^2(G)$. Démontrons que pour chaque fonction $f \in L^2(G)$ et chaque $\varepsilon > 0$ il existe une combinaison linéaire finie $\sum_{\alpha, j, l} \gamma_{jl}^{\alpha} t_{jl}^{\alpha}(g)$ d'éléments matriciaux des représentations unitaires continues irréductibles du groupe G telle que

$$\| f(g) - \sum_{\alpha, j, l} \gamma_{jl}^{\alpha} c_{jl}^{\alpha}(g) \|_{L^2(G)} < \varepsilon.$$

La démonstration de cette dernière assertion sera faite en plusieurs étapes.

a) Soit $\chi(g)$ une fonction continue réelle sur G non identiquement nulle. Soit $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ *). Considérons une fonction $K(g_1, g_2) = \chi(g_1 g_2^{-1})$. On voit que K est une fonction continue symétrique sur $G \times G$ $(K(g_2, g_1) = \chi(g_2 g_1^{-1}) = \chi((g_1 g_2^{-1})^{-1} = \chi(g_1 g_2^{-1}) = K(g_1, g_2))$. Soit l'équation intégrale

$$\varphi(g) = \chi \int_G K(g, g_1)\,\varphi(g_1)\,dg_1 \qquad (2.4.3)$$

---

*) Par exemple, si $\psi(g) \not\equiv 0$ est une fonction continue non négative, alors la fonction $\chi(g) = \psi(g) + \psi(g^{-1})$ vérifie toutes les conditions imposées à la fonction $\chi(g)$.

(cette équation est la généralisation de l'équation intégrale usuelle de Fredholm pour les fonctions sur un segment; la théorie des équations intégrales de la forme (2.4.3) est analogue à celle des équations intégrales sur un segment; voir, par exemple, A. Kolmogorov et S. Fomine [1], chapitre IX).

Puisque K est une fonction continue, alors pour chaque fonction $\varphi \in L^2(G)$ la fonction $\psi(g)$ définie par l'égalité

$$\psi(g) = \int_G K(g, g_1)\, \varphi(g_1)\, dg_1$$

est une fonction continue sur le groupe G; on dit que la fonction $\psi(g)$ est intégrablement représentable à l'aide du noyau $K(g, g_1)$. En particulier, chaque solution φ de l'équation (2.4.3) qui appartient à $L^2(G)$ est une fonction intégrablement représentable; par conséquent, chaque solution φ de l'équation (2.4.3) est continue. Il découle de la continuité de K que l'intégrale $\int\int_{G\times G} |K(g, g_1)|^2\, dg\, dg_1$ est finie et l'on peut donc faire appel à la théorie de Hilbert-Schmidt des équations intégrales à noyau symétrique de carré intégrable. Rappelons qu'un nombre réel λ s'appelle *valeur propre*, et une fonction $\varphi \neq 0$ *fonction propre* correspondante de l'équation intégrale (2.4.3) si portés dans (2.4.3), ils en font une identité. D'après la théorie de Hilbert-Schmidt, chaque équation intégrale à noyau symétrique de carré intégrable possède au moins une valeur propre λ; soit M_λ le sous-espace de $L^2(G)$ constitué par la fonction 0 et toutes les fonctions propres de l'équation (2.4.3) qui correspondent à la valeur propre λ; alors M_λ est un sous-espace de dimension finie formé de fonctions continues sur G.

I. *Le sous-espace M_λ est invariant relativement aux translations à droite, i.e. $\varphi(g) \in M_\lambda$, on a également $\varphi(gg_0) \in M_\lambda$.*

En effet, soit $\varphi(g) \in M_\lambda$, i.e.

$$\varphi(g) = \lambda \int_G K(g, g_1)\, \varphi(g_1)\, dg_1 = \lambda \int_G \chi(gg_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1,$$

alors

$$\varphi(gg_0) = \lambda \int_G \chi((gg_0)\, g_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1 = \lambda \int_G \chi(gg_0g_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1;$$

posons $h = g_1g_0^{-1}$, alors $g_1 = hg_0$ et, en vertu de l'invariance de la mesure dg_1, nous avons

$$\varphi(gg_0) = \lambda \int_G \chi(g^{-1}h)\, \varphi(hg_0)\, dh,$$

i.e. $\varphi(gg_0) \in M_\lambda$.

Puisque l'espace de dimension finie $M_\lambda \subset L^2(G)$ est invariant relativement aux translations à droite sur G, alors une sous-représentation de la représentation régulière à droite T_λ du groupe G est définie sur M_λ. La représentation T_λ du groupe G sur M_λ ainsi obtenue est continue, de dimension finie et unitaire, elle est donc la somme directe d'un nombre fini de représentations $T_\lambda^{(1)}, \ldots, T_\lambda^{(p)}$ unitaires continues irréductibles du groupe G (voir IX, 2.9, chapitre I); si $M_\lambda^{(1)}, \ldots, M_\lambda^{(p)}$ sont les espaces de ces représentations irréductibles, alors

$$M_\lambda = M_\lambda^{(1)} + \ldots + M_\lambda^{(p)}. \tag{2.4.4}$$

II. *Chaque fonction de l'espace $M_\lambda^{(k)}$ d'une représentation irréductible $T_\lambda^{(k)}$ d'un groupe G est une combinaison linéaire des éléments matriciaux de cette représentation.*

Soit $e_1(g), \ldots, e_n(g)$ une base de l'espace $M_\lambda^{(k)}$; puisque $M_\lambda^{(k)} \subset \subset M_\lambda$, les fonctions $e_1(g), \ldots, e_n(g)$ sont continues. La représentation $T_\lambda^{(k)}$ est une sous-représentation de la représentation régulière à droite; par conséquent, $T_\lambda^{(k)}(g_0) f(g) = f(gg_0)$ pour toutes les $f \in M_\lambda^{(k)}$. Soient $c_{ij}(g_0)$ les éléments matriciaux de l'opérateur $T_\lambda^{(k)}(g_0)$ relativement à la base $e_1(g), \ldots, e_n(g)$, alors

$$\begin{gathered} e_1(gg_0) = c_{11}(g_0)\, e_1(g) + \ldots + c_{n1}(g_0)\, e_n(g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n(gg_0) = c_{1n}(g_0)\, e_1(g) + \ldots + c_{nn}(g_0)\, e_n(g) \end{gathered}$$

pour tous les $g, g_0 \in G$. En substituant $g = e$, $g_0 = h$, nous obtenons

$$\begin{gathered} e_1(h) = e_1(e)\, c_{11}(h) + \ldots + e_n(e)\, c_{n1}(h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n(h) = e_1(e)\, c_{1n}(h) + \ldots + e_n(e)\, c_{nn}(h), \end{gathered}$$

i.e. chaque élément d'une base de $M_\lambda^{(k)}$, et par conséquent chaque élément de $M_\lambda^{(k)}$ est une combinaison linéaire des éléments matriciaux de la représentation unitaire continue irréductible $T_\lambda^{(k)}$. Cette représentation $T_\lambda^{(k)}$ étant équivalente à une des T^α, la base $e_1(g), \ldots, e_n(g)$ peut être choisie de manière à ce que les $c_{jk}(g)$ coïncident avec les $t_{jk}^\alpha(g)$ pour un certain $\alpha \in A$.

D'où l'on tire, à l'aide de (2.4.4):

III. *Chaque fonction de l'espace M_λ est une combinaison linéaire finie des éléments matriciaux des représentations unitaires irréductibles d'un groupe G.*

Conformément à la théorie de Hilbert-Schmidt, toute fonction $\psi(g)$ intégrablement représentable (à l'aide d'un noyau continu K)

sur le groupe G se décompose en une série absolument et uniformément convergente de fonctions propres de l'équation (2.4.3). D'où l'on tire:

IV. *Si ψ est une fonction intégrablement représentable sur un groupe G, alors elle peut être uniformément approchée par des combinaisons linéaires finies des éléments matriciaux des représentations unitaires continues irréductibles de dimension finie du groupe G.*

THÉORÈME 3. *Chaque fonction continue sur G peut être uniformément approchée par des fonctions intégrablement représentables.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur G. Puisque f est uniformément continue sur G, il existe un voisinage U de l'élément neutre e du groupe G tel que $|f(g) - f(g')| < \varepsilon$ pour tous les $g, g' \in G$ pour lesquels on a $g' \in Ug$; en remplaçant U par $U \cap U^{-1}$, nous pouvons supposer par la suite que U est symétrique, i.e. $U = U^{-1}$. Choisissons dans U un voisinage V de l'élément e tel que $\overline{V} \subset U$. Soit ψ une fonction continue non négative sur G telle que $\psi = 1$ sur V et $\psi = 0$ en dehors de U (l'existence d'une telle fonction ψ découle du lemme de Urysohn; voir II, 1.3). Posons $\chi(g) = c(\psi(g) + \psi(g^{-1}))$; alors $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$. Choisissons le nombre c de sorte que $\int \chi(g)\,dg = 1$. Puisque U est symétrique et $\psi(g) = 0$ en dehors de U, on a $\chi(g^{-1}) = 0$ en dehors de U et donc $\chi(g) = 0$ en dehors de U. Construisons une fonction intégrablement représentable

$$\varphi(g) = \int f(g_1)\chi(gg_1^{-1})\,dg_1.$$

En posant $h = g_1g^{-1}$ et en nous servant de l'invariance de la mesure, nous obtenons

$$\varphi(g) = \int f(hg)\chi(h^{-1})\,dh.$$

Puisque $\int \chi(g)\,dg = 1$, on a $\int \chi(h^{-1})\,dh = 1$, donc $f(g) = \int f(g) \times \times \chi(h^{-1})\,dh$ et

$$|f(g) - \varphi(g)| = \left| \int_G f(g)\chi(h^{-1})\,dh - \int_G f(hg)\chi(h^{-1})\,dh \right| =$$

$$= \left| \int_G (f(g) - f(hg))\chi(h^{-1})\,dh \right| \leqslant \int_G |f(g) - f(hg)|\chi(h^{-1})\,dh =$$

$$= \int_U |f(g) - f(hg)|\chi(h^{-1})\,dh, \quad (2.4.5)$$

car $\chi(h^{-1}) = \chi(h) = 0$ en dehors de U. Par construction du voisinage U, nous avons $|f(g) - f(hg)| < \varepsilon$ pour tous les $g \in G$, $h \in U$.

de sorte que $hg \in Ug$ pour $h \in U$; par conséquent $\int\limits_U |f(g) - - f(hg)| \chi(h^{-1})\, dh \leqslant \varepsilon \int\limits_U \chi(h^{-1})\, dh = \varepsilon$, et la relation (2.4.5) permet de conclure que $|f(g) - \varphi(g)| \leqslant \varepsilon$ pour tous les $g \in G$, ce qui démontre le théorème 3.

THÉORÈME 4. *Chaque fonction continue sur un groupe topologique compact G peut être uniformément approchée sur G par des combinaisons linéaires finies des éléments matriciaux des représentations unitaires continues irréductibles de dimension finie du groupe G.*

La démonstration s'obtient immédiatement du théorème 3 et de la proposition IV.

b) Terminons maintenant la démonstration du théorème 2. S oi $f \in L^2(G)$. Puisque l'ensemble des fonctions continues sur G estt partout dense dans $L^2(G)$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction continue $\tilde{f}$ sur G telle que $\| f - \tilde{f} \|_{L^2(G)} < \varepsilon/2$. D'après le théorème 3, on peut trouver pour la fonction continue $\tilde{f}$ une combinaison linéaire finie φ d'éléments matriciaux des représentations unitaires continues irréductibles, de dimension finie, du groupe G telle que $|\tilde{f}(g) - \varphi(g)| < \varepsilon/2$ pour tous les $g \in G$; alors $\| \tilde{f} - \varphi \|_{L^2(G)} = \left(\int\limits_G |\tilde{f}(g) - \varphi(g)|^2\, dg \right)^{1/2} < (\varepsilon^2/4)^{1/2}$, d'où $\| f - \varphi \|_{L^2(G)} \leqslant \leqslant \| f - \tilde{f} \|_{L^2} + \| \tilde{f} - \varphi \|_{L^2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Par conséquent, les combinaisons linéaires finies des fonctions du système $\{e_{ij}^{\alpha}\}$ sont denses dans $L^2(G)$, donc $\{e_{ij}^{\alpha}\}$ est un système orthonormé complet, et le théorème 2 est démontré.

THÉORÈME 5. *Toute fonction $f \in L^2(G)$ peut être mise sous la forme*

$$f = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i, j=1}^{n_\alpha} (f, e_{ij}^{\alpha})\, e_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i, j=1}^{n_\alpha} n_\alpha (f, t_{ij}^{\alpha})\, t_{ij}^{\alpha}, \tag{2.4.6}$$

cù la série converge dans $L^2(G)$; par ailleurs on a l'égalité

$$(f, f) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i, j=1}^{n_\alpha} |(f, e_{ij}^{\alpha})|^2 = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i, j=1}^{n_\alpha} n_\alpha |(f, t_{ij}^{\alpha})|^2. \tag{2.4.7}$$

L'assertion du théorème 5 découle immédiatement du théorème 2 et de la théorie générale des décompositions orthogonales dans un espace hilbertien (voir par exemple A. K o l m o g o r o v et S. F o m i n e [1], § 4, chapitre III). L'égalité (2.4.7) s'appelle *formule de Plancherel.*

2.5. Décompositions de représentations régulières.

THÉORÈME. *Soit T une représentation régulière à droite d'un groupe G dans l'espace hilbertien $L^2(G)$, et soit $\{T^\alpha,\ \alpha \in A\}$ la famille de toutes les représentations unitaires irréductibles de dimension finie du groupe G, non équivalentes deux à deux. Désignons par t^α_{jk} ($j, k = 1, 2, \ldots, n_\alpha$; $n_\alpha = \dim T^\alpha$) l'ensemble des éléments matriciaux de la représentation T^α dans une base orthonormée $\{e_k\}$, et par H^α le sous-espace de l'espace $L^2(G)$ engendré par les fonctions $t^\alpha_{jk}(g)$ ($j, k = 1, 2, \ldots, n_\alpha$). Alors l'espace hilbertien $L^2(G)$ se décompose en somme directe hilbertienne de sous-espaces H^α de dimension finie sur tous les $\alpha \in A$; chaque espace H^α est invariant relativement à la représentation régulière à droite T, et la restriction $\dot{T}^\alpha$ de la représentation T au sous-espace H^α est multiple de la représentation T^α avec multiplicité n_α.*

Démonstration. La définition même d'une représentation permet d'écrire

$$t^\alpha_{ij}(gg_0) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{ik}(g)\, t^\alpha_{kj}(g_0), \tag{2.5.1}$$

ce qu'on peut transcrire sous la forme

$$[T(g_0)(t^\alpha_{ij}](g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{ik}(g)\, t^\alpha_{kj}(g_0). \tag{2.5.2}$$

Il découle de la relation (2.5.2) que les fonctions $t^\alpha_{jk}(g)$, qui forment (pour un α donné) une base dans l'espace H^α, sont envoyées par les opérateurs de la représentation régulière à droite T dans des combinaisons linéaires des mêmes fonctions $t^\alpha_{jk}(g)$. Mais alors chaque élément de H^α, étant une combinaison linéaire des fonctions t^α_{jk}, est à nouveau appliqué par les opérateurs de la représentation T dans un élément de H^α, i.e. chaque sous-espace H^α est invariant relativement aux opérateurs de la représentation régulière à droite. Désignons par $\dot{T}^\alpha$ la restriction de la représentation T au sous-espace H^α; alors la formule (2.5.2) peut s'écrire sous la forme

$$[\dot{T}^\alpha(g_0)\, t^\alpha_{ij}](g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{kj}(g_0)\, t^\alpha_{ik}(g). \tag{2.5.3}$$

Désignons par H^α_i, $i = 1, \ldots, n_\alpha$, les sous-espaces engendrés par les fonctions de la forme $t^\alpha_{ij}(g)$, $j = 1, \ldots, \dim T^\alpha$, i étant fixé. Puisque le sous-espace H^α est une somme orthogonale directe des sous-espaces H^α_i, $i = 1, \ldots, n_\alpha$, on déduit de la formule (2.5.3)

que le sous-espace H_i^α est invariant relativement à tous les opérateurs de la représentation $\dot{T}^\alpha$. Soit $\dot{T}_i^\alpha$ la restriction de la représentation $\dot{T}^\alpha$ au sous-espace H_i^α. La formule (2.5.3) nous montre que les éléments matriciaux de la représentation $\dot{T}_i^\alpha$ dans la base $\{t_{ij}^\alpha(g),\ j=1, \ldots, n_\alpha\}$ coïncident avec les éléments matriciaux de la représentation T^αdans la base $\{e_k\}$. Ainsi, chacune des représentations $\dot{T}_i^\alpha$ est équivalente à la représentation T^α, ce qui termine la démonstration du théorème.

2.6. Caractères des représentations unitaires irréductibles de groupes compacts. Soit T une représentation continue de dimension finie d'un groupe compact G; soit $e_1, \ldots, e_n$ ($n = \dim T$) une base de l'espace H de la représentation T. Désignons par $t_{ij}(g)$, $i, j = 1, \ldots, n$, les éléments matriciaux de la représentation T relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$. La fonction

$$\chi(g) = t_{11}(g) + \ldots + t_{nn}(g) \tag{2.6.1}$$

est un caractère de la représentation T. Il découle des propriétés générales des caractères des représentations de dimension finie (voir IV de 2.9, chapitre I) que la fonction χ, continue sur le groupe G, ne dépend pas du choix de la base dans l'espace de la représentation T, ne change pas lorsqu'on passe de T à une représentation équivalente, est constante sur les classes d'éléments conjugués du groupe G, que la valeur de χ dans l'élément neutre du groupe est égale à la dimension de la représentation, etc.

On déduit des relations d'orthogonalité pour les éléments matriciaux (théorème 1 de 2.4) le

THÉORÈME 1. *Les caractères χ^α, $\chi^{\alpha'}$ des représentations unitaires irréductibles T^α, $T^{\alpha'}$ d'un groupe compact G vérifient les relations*

$$\int_G \chi^\alpha(g)\overline{\chi^{\alpha'}(g)}\,dg = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha' \neq \alpha, \\ 1 & \text{pour } \alpha' = \alpha. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous avons

$$\int_G \chi^\alpha(g)\overline{\chi^{\alpha'}(g)}\,dg = \int_G \sum_{i=1}^{n_\alpha} t_{ii}^\alpha(g) \sum_{j=1}^{n_{\alpha'}} \overline{t_{jj}^{\alpha'}(g)}\,dg =$$

$$= \sum_{i=1,\ j=1}^{n_\alpha,\ n_{\alpha'}} \int_G t_{ii}^\alpha(g)\overline{t_{jj}^{\alpha'}(g)}\,dg; \tag{2.6.3}$$

la valeur du deuxième membre de la formule (2.6.3) se détermine par les formules (2.4.1), ce qui donne immédiatement (2.6.2).

I. *Soit S une représentation unitaire continue de dimension finie d'un groupe G; désignons par* χ *le caractère de la représentation S. Soit*

$$S = n_1 T^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus n_p T^{\alpha_p} \tag{2.6.4}$$

la décomposition de la représentation S en une somme directe de représentations, multiples des représentations unitaires irréductibles $T^{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, T^{\alpha_p}$ *du groupe G. Soient* $\chi_1, \ldots, \chi_p$ *les caractères des représentations* $T^{\alpha_1}, \ldots, T^{\alpha_p}$ *respectivement. Alors*

$$\chi = n_1\chi_1 + \ldots + n_p\chi_p, \tag{2.6.5}$$

où les nombres $n_1, \ldots, n_p$ *se déterminent par la relation*

$$n_k = (\chi, \chi_k), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{2.6.6}$$

Réciproquement, si l'on a l'égalité (2.6.5), *alors la représentation S possède une décomposition donnée par la formule* (2.6.4).

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que la relation (2.6.4) implique la relation (2.6.5). Si l'on a l'égalité (2.6.5), alors la relation (2.6.2) implique

$$(\chi, \chi_k) = n_k (\chi_k, \chi_k) = n_k$$

pour tous les $k = 1, \ldots, p$, ce qui démontre la formule (2.6.6). Supposons maintenant que l'on a la relation (2.6.5) et supposons que

$$S = m_1 T^{\alpha'_1} \oplus \ldots \oplus m_k T^{\alpha'_k} \tag{2.6.7}$$

est la décomposition de la représentation S en une somme directe de représentations multiples de certaines représentations irréductibles $T^{\alpha'_1}, \ldots, T^{\alpha'_k}$. Soit χ'_i le caractère de la représentation $T^{\alpha'_i}$ ($i =$ $= 1, \ldots, k$). La relation (2.6.7) implique l'égalité

$$\chi = m_1\chi'_1 + \ldots + m_k\chi'_k. \tag{2.6.8}$$

Alors les formules (2.6.5) et (2.6.8) donnent deux décompositions d'une même fonction χ relativement au système orthonormé formé des caractères du système complet $\{T^{\alpha}\}$ de représentations unitaires continues de dimension finie du groupe G. Ces deux décompositions ne peuvent différer que par l'ordre des termes; ainsi, si l'on exclut de (2.6.5) et (2.6.8) les termes nuls, on a $k = p$, et à la numération de termes près, on a $T^{\alpha_i} = T^{\alpha'_i}$, $m_i = n_i$, i.e. l'égalité (2.6.4).

II. *Les caractères de deux représentations unitaires continues de dimension finie* T^1, T^2 *d'un groupe G coïncident si et seulement si les représentations* T^1 *et* T^2 *sont équivalentes.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient χ^1, χ^2 les caractères des représentations T^1, T^2 respectivement. Si l'on a $\chi^1 = \chi^2$, alors les décom-

positions de la forme (2.6.5) pour les caractères χ^1 et χ^2 coïncident et donc, en vertu de I, les décompositions de la forme (2.6.4) pour les représentations T^1 et T^2 coïncident également, i.e. T^1 est équivalente à T^2. Réciproquement, l'équivalence des représentations implique immédiatement l'égalité des caractères.

III. *Soit S une représentation unitaire continue de dimension finie d'un groupe G. La représentation S est irréductible si et seulement si* $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\, dg = 1$.

Démonstration. Si la représentation S est irréductible, alors $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\, dg = 1$ en vertu du théorème 1. Réciproquement, supposons que $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\, dg = 1$ et admettons que la formule (2.6.4) donne une décomposition de la représentation S en une somme directe de représentations, multiples de représentations irréductibles. Nous avons alors l'égalité (2.6.5), et donc les relations d'orthogonalité (2.6.2) impliquent

$$\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\, dg = (\chi_S, \chi_S) = n_1^2(\chi_1, \chi_1) + \ldots + n_p^2(\chi_p, \chi_p) = n_1^2 + \ldots + n_p^2, \quad (2.6.9)$$

où $n_1, \ldots, n_p$ sont des nombres naturels. Puisque le premier membre de la formule (2.6.9) est égal à 1 par hypothèse, on a $n_1^2 + \ldots \ldots + n_p^2 = 1$, d'où $p = 1$ et $n_1 = 1$, i.e. S est équivalente à T^{α_1} et elle est donc irréductible.

Soit T une représentation unitaire continue irréductible d'un groupe G, et χ son caractère. La fonction $(\dim T)^{-1}\chi$ est appelée *caractère normalisé* de la représentation T.

THÉORÈME 2. *Soit ψ une fonction complexe continue sur un groupe G. Cette fonction ψ est un caractère normalisé d'une certaine représentation unitaire irréductible continue du groupe G, si et seulement si $\psi \not\equiv 0$ et*

$$\int\limits_G \psi(ghg^{-1}k)\, dg = \psi(h)\, \psi(k) \quad (2.6.10)$$

pour tous les h, $k \in G$.

Démonstration. a) Supposons qu'il existe une représentation unitaire irréductible T du groupe G telle que $\psi = (\dim T)^{-1}\chi$ où χ est le caractère de la représentation T. Soit A un opérateur linéaire dans l'espace H de la représentation T déterminé par la

formule

$$A = \int_G T(ghg^{-1})\, dg. \tag{2.6.11}$$

Puisque la représentation T est continue, l'intégrale (2.6.11) existe. Pour chaque $k \in G$ on a la relation

$$T(k) A = T(k) \int T(ghg^{-1})\, dg = \\ = \int T(k) T(ghg^{-1})\, dg = \int T(kghg^{-1})\, dg. \tag{2.6.12}$$

En posant $g_1 = kg$, nous pouvons transcrire le dernier membre de l'égalité (2.6.12) sous la forme

$$\int T(g_1 h g_1^{-1} k)\, dg_1 = \int T(g_1 h g_1^{-1}) T(k)\, dg_1 = \\ = \left(\int T(g_1 h g_1^{-1})\, dg_1 \right) T(k) = AT(k). \tag{2.6.13}$$

En réunissant (2.6.12) et (2.6.13), on obtient

$$T(k) A = AT(k) \tag{2.6.14}$$

pour tous les $k \in G$. Par hypothèse, la représentation T est irréductible. On tire donc de (2.6.14) et du lemme de Schur que l'opérateur A est multiple de l'opérateur unité:

$$A = \lambda \cdot 1_H, \tag{2.6.15}$$

où λ est un certain nombre, 1_H l'opérateur unité dans l'espace H. Alors

$$\operatorname{tr} A = \lambda \cdot \dim H = \lambda \cdot \dim T. \tag{2.6.16}$$

D'autre part, en calculant la trace des deux membres de l'égalité (2.6.11), on obtient

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \int T(ghg^{-1})\, dg = \int \operatorname{tr} T(ghg^{-1})\, dg = \\ = \int \chi(ghg^{-1})\, dg = \int \chi(h)\, dg = \chi(h). \tag{2.6.17}$$

On déduit de (2.6.11), (2.6.15) et (2.6.17) que

$$\int T(ghg^{-1})\, dg = (\dim T)^{-1} \chi(h)\, 1_H, \tag{2.6.18}$$

tandis que de (2.6.18) on tire

$$\int T(ghg^{-1}k)\, dg = \left(\int T(ghg^{-1})\, dg \right) T(k) = (\dim T)^{-1} \chi(h) T(k). \tag{2.6.19}$$

En calculant la trace des deux membres de l'égalité (2.6.19), on obtient

$$\int \chi(ghg^{-1}k)\,dg = (\dim T)^{-1}\chi(h)\,\chi(k) \qquad (2.6.20)$$

pour tous les $h, k \in G$. En divisant les deux membres de l'égalité (2.6.20) par dim T et en remplaçant $(\dim T)^{-1}\chi$ par la fonction ψ, on obtient la relation (2.6.10).

b) Supposons maintenant que ψ est une fonction continue non nulle sur le groupe G qui satisfait à la relation (2.6.10). Puisque les éléments matriciaux des représentations unitaires irréductibles du groupe G forment dans $L^2(G)$ un système orthogonal complet, il existe une représentation unitaire irréductible T du groupe G dans l'espace hilbertien de dimension finie H telle que pour chaque élément matriciel $t_{ij}(g)$ de la représentation T on a

$$(t_{ij}, \overline{\psi}) = \int t_{ij}(g)\,\psi(g)\,dg \neq 0. \qquad (2.6.21)$$

Il découle de la relation (2.6.21) que l'opérateur $T(\psi)$, défini par l'égalité

$$T(\psi) = \int \psi(g)\,T(g)\,dg, \qquad (2.6.22)$$

possède un élément matriciel non nul; il est donc non nul; en multipliant (2.6.22) par $\psi(h)$, $h \in G$, on obtient l'égalité

$$\psi(h)\,T(\psi) = \int_G \psi(h)\,\psi(k)\,T(k)\,dk. \qquad (2.6.23)$$

En vertu de la relation (2.6.10) la formule (2.6.23) peut s'écrire sous la forme

$$\psi(h)\,T(\psi) = \int\int \psi(ghg^{-1}k)\,T(k)\,dg\,dk. \qquad (2.6.24)$$

En effectuant le changement de variables $k_1 = ghg^{-1}k$ dans (2.6.24) et en inversant ensuite l'ordre d'intégration, on obtient

$$\psi(h)\,T(\psi) = \int\int \psi(k_1)\,T(gh^{-1}g^{-1}k_1)\,dg\,dk_1 = \\ = \int \psi(k_1)\left(\int T(gh^{-1}g^{-1})\,dg\right)T(k_1)\,dk_1. \qquad (2.6.25)$$

Soit χ le caractère de la représentation T. Portant la relation (2.6.18) dans (2.6.25), on obtient

$$\psi(h)\;T(\psi) = \int \psi(k_1)\,(\dim T)^{-1}\,\chi(h^{-1})\;T(k_1)\,dk_1 = \\ = (\dim T)^{-1}\,\chi(h^{-1})\;T(\psi). \qquad (2.6.26)$$

Puisque $T(\psi) \neq 0$ par construction de T, la relation (2.6.26) et la propriété a) de IV, 2.9, chapitre I, impliquent la relation

$$\psi(h) = (\dim T)^{-1} \chi(h^{-1}) = (\dim T)^{-1} \overline{\chi(h)} \qquad (2.6.27)$$

pour tous les $h \in G$. Soit $\overline{T}$ une représentation du groupe G (dans le même espace hilbertien H) telle que, pour une certaine base orthonormée, les éléments de la matrice de l'opérateur $\overline{T}(g)$, pour chaque $g \in G$, sont des conjugués complexes des éléments correspondants de l'opérateur $T(g)$. Le lecteur vérifiera aisément que $\overline{T}$ est une représentation unitaire continue irréductible du groupe G dans H dont le caractère se détermine par la formule

$$\chi_{\overline{T}}(g) = \overline{\chi(g)} \qquad (2.6.28)$$

pour tous les $g \in G$. La représentation $\overline{T}$ est définie à l'équivalence près, on l'appelle représentation *adjointe* de T. En comparant (2.6.27) et (2.6.28), on obtient

$$\psi(g) = (\dim T)^{-1} \chi_{\overline{T}}(g) = (\dim \overline{T})^{-1} \chi_{\overline{T}}(g) \qquad (2.6.29)$$

pour tous les $g \in G$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.

2.7. Décomposition d'une représentation unitaire continue quelconque d'un groupe G en représentations irréductibles. Soient S une représentation unitaire continue d'un groupe G dans un espace hilbertien H, T une représentation unitaire continue irréductible de dimension finie du groupe G, et χ_T le caractère de la représentation T; soient $e_1, \ldots, e_n$ ($n = \dim T$) une base de l'espace de la représentation T, et $t_{ij}^T(g)$, $i, j = 1, \ldots, n$, les éléments matriciaux de la représentation T dans la base $e_1, \ldots, e_n$. Posons

$$\begin{aligned} E_{ij}^T &= (\dim T) \int_G \overline{t_{ij}^T(g)}\, S(g)\, dg; \\ E^T &= (\dim T) \int_G \overline{\chi_T(g)}\, S(g)\, dg. \end{aligned} \qquad (2.7.1)$$

D'après (2.6.28), la deuxième des formules (2.7.1) peut également s'écrire sous la forme

$$E^T = (\dim T) \int_G \chi_{\overline{T}}(g)\, S(g)\, dg, \qquad (2.7.2)$$

où $\chi_{\overline{T}}$ est le caractère de la représentation $\overline{T}$ adjointe de la représentation T. Les $\overline{t_{ij}^T(g)}\, S(g)$ et $\overline{\chi_T(g)}\, S(g)$ étant des fonctions dont les valeurs sont des opérateurs continus sur G, les intégrales des formules (2.7.1) et (2.7.2) existent, de plus E_{ij}^T et E^T sont des opé-

rateurs linéaires continus dans H. Signalons les principales propriétés des opérateurs E^T_{ij}, E^T.

I. *Les opérateurs* E^T_{ij}, E^T *vérifient les relations suivantes*:

$$E^T = \sum_{i=1}^{n} E^T_{ii}; \tag{2.7.3a}$$

$$S(g)\,E^T_{jl} = \sum_{i=1}^{n} t^T_{ij}(g)\,E^T_{il} \quad \textit{pour tous les } g \in G; \tag{2.7.3b}$$

$$E^T_{jl}\,S(g) = \sum_{i=1}^{n} t^T_{li}(g) E^T_{ji} \quad \textit{pour tous les } g \in G; \tag{2.7.3c}$$

$$E^T_{ij}\,E^{T'}_{lk} = 0 \tag{2.7.3d}$$

si T' *est une représentation unitaire irréductible du groupe* G, *non équivalente à* T;

$$E^T_{ij}\,E^T_{lk} = \begin{cases} 0, & \textit{si } j \neq l, \\ E^T_{ik}, & \textit{si } j = l; \end{cases} \tag{2.7.3e}$$

$$E^T_{ii}\,E^T_{jj} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \neq j, \\ E^T_{ii} & \textit{si } i = j; \end{cases} \tag{2.7.3f}$$

$$(E^T_{ij})^* = E^T_{ji}; \tag{2.7.3g}$$

$$E^T E^{T'} = 0 \tag{2.7.3h}$$

si T' *est une représentation unitaire irréductible du groupe* G, *non équivalente à* T;

$$E^{T*} = E^T = E^{T2}; \tag{2.7.3i}$$

$$E^T S(g) = S(g)\,E^T \quad \textit{pour tous les } g \in G. \tag{2.7.3j}$$

D é m o n s t r a t i o n. La relation (2.7.3a) découle immédiatement des formules (2.7.1) et (2.6.1). Démontrons la formule (2.7.3b). On déduit des relations d'orthogonalité, de l'invariance de l'intégrale et des propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs dans un ensemble d'opérateurs, que

$$S(g)\,E^T_{jl} = S(g)\,(\dim T) \int \overline{t^T_{jl}(h)}\,S(h)\,dh =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t^T_{jl}(h)}\,S(gh)\,dh =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t^T_{jl}\,(g^{-1}h)}\,S(h)\,dh =$$

$$= (\dim T) \int \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{ji}^{T}(g^{-1})}\, \overline{t_{il}^{T}(h)}\, S(h)\, dh =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{ji}^{T}(g^{-1})}\, (\dim T) \int \overline{t_{il}^{T}(h)}\, S(h)\, dh = \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{ji}^{T}(g^{-1})}\, E_{il}^{T}, \qquad (2.7.4)$$

tandis que (2.7.4) et la relation $\overline{t_{ji}^{T}(g^{-1})} = t_{ij}^{T}(g)$ impliquent la formule (2.7.3b). On démontre d'une manière analogue l'égalité (2.7.3c). Démontrons les relations (2.7.3d) et (2.7.3e). En se servant de la relation (2.7.3b) on obtient:

$$E_{ij}^{T} E_{lk}^{T'} = \left((\dim T) \int \overline{t_{ij}^{T}(g)}\, S(g)\, dg \right) E_{lk}^{T'} =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t_{ij}^{T}(g)}\, (S(g)\, E_{lk}^{T'})\, dg =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t_{ij}^{T}(g)} \left(\sum_{p=1}^{\dim T'} t_{pl}^{T'}(g)\, E_{pk}^{T'} \right) dg =$$

$$= (\dim T) \sum_{p=1}^{\dim T'} \left(\int t_{pl}^{T'}(g)\, \overline{t_{ij}^{T}(g)}\, dg \right) E_{pk}^{T'}. \qquad (2.7.5)$$

Les relations d'orthogonalité (2.4.1) impliquent immédiatement que la dernière intégrale de (2.7.5) est nulle lorsque T et T' ne sont pas équivalentes; si par contre $T' = T$, d'après (2.4.1) tous les termes du dernier membre de (2.7.5) sont nuls pour $l \neq j$, tandis que pour $l = j$ le seul terme non nul du dernier membre de (2.7.5) correspond à $p = i$, et ce terme est égal à $(\dim T)\,(\dim T)^{-1} E_{ik}^{T} = E_{ik}^{T}$. Ainsi

$$E_{ij}^{T} E_{ik}^{T} = E_{ik}^{T}, \qquad (2.7.6)$$

ce qui termine la démonstration des relations (2.7.3d) et (2.7.3e). La relation (2.7.3f) est un cas particulier de l'égalité (2.7.3e). En outre, en vertu de l'unitarité des opérateurs $S(g)$, nous avons

$$(E_{ij}^{T})^{*} = \left((\dim T) \int \overline{t_{ij}^{T}(g)}\, S(g)\, dg \right)^{*} =$$

$$= (\dim T) \int t_{ij}^{T}(g)\, S^{*}(g)\, dg = (\dim T) \int t_{ij}^{T}(g)\, S(g)^{-1}\, dg =$$

$$= (\dim T) \int t_{ij}^{T}(g)\, S(g^{-1})\, dg = (\dim T) \int t_{ij}^{T}(g^{-1})\, S(g)\, dg =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t_{ji}^{T}(g)}\, S(g)\, dg = E_{ji}^{T}, \qquad (2.7.7)$$

car la continuité du passage d'un opérateur à l'opérateur adjoint permet de passer dans la relation (2.7.7) aux opérateurs adjoints sous le signe de l'intégrale. La relation (2.7.7) démontre l'égalité (2.7.3g). D'où l'on obtient

$$(E^T)^* = \Big(\sum_{i=1}^{n} E^T_{ii}\Big)^* = \sum_{i=1}^{n} (E^T_{ii})^* = \sum_{i=1}^{n} E^T_{ii} = E^T, \qquad (2.7.8)$$

ce qui démontre la première relation (2.7.3h). On démontre de même la deuxième relation (2.7.3h) et l'égalité (2.7.3f). Enfin on déduit de (2.7.3a), (2.7.3b) que

$$S(g)\,E^T = \sum_{i,\,j=1}^{n} t^T_{ij}(g)\,E^T_{ij}, \quad E^T S(g) = \sum_{i,\,j=1}^{n} t^T_{ij}(g)\,E^T_{ij}, \qquad (2.7.9)$$

d'où l'on tire immédiatement l'égalité (2.7.3j).

Notons quelques corollaires de la proposition I.

Soit M^T_i l'ensemble de tous les vecteurs $x \in H$ qui vérifient la relation $E^T_{ii}x = x$; soit M^T l'ensemble de tous les vecteurs $x \in H$ qui vérifient la relation $E^T x = x$.

II. *Les ensembles M^T_i et M^T sont des sous-espaces linéaires fermés de l'espace hilbertien H. Si T' et T sont non équivalentes, alors $M^{T'}_k$ et M^T_i sont orthogonaux et $M^{T'}$ et M^T sont orthogonaux. Pour $i \neq k$, M^T_i est orthogonal à M^T_k.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après I, les opérateurs E^T_{ii} et E^T sont des opérateurs de projection orthogonale dans l'espace hilbertien H. Les ensembles M^T_i et M^T sont par difinition les sous-espaces sur lesquels projettent respectivement E^T_{ii} et E^T. On en déduit en particulier que M^T_i et M^T sont des sous-espaces linéaires fermés de H. Supposons ensuite que $x \in M^T_i$ et $y \in M^{T'}_k$, T n'étant pas équivalente à T' ou bien $T = T'$, mais $k \neq i$; alors les relations (2.7.3d) et (2.7.3e) impliquent

$$(x, y) = (E^T_{ii}\,x, E^{T'}_{kk}\,y) = (E^{T'}_{kk}\,E^T_{ii}\,x, y) = (0, y) = 0,$$

ce qui démontre l'orthogonalité de M^T_i et $M^{T'}_k$. On démontre de même que M^T est orthogonal à $M^{T'}$ lorsque T est non équivalente à T'.

III. *L'espace M^T est la somme directe orthogonale des espaces M^T_i $(i = 1, \ldots, \dim T)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Si le vecteur x_j appartient à M^T_j, alors les relations (2.7.3) impliquent l'égalité

$$E^T x_j = E^T \cdot E^T_{jj}\,x_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} E^T_{ii}\Big) E^T_{jj} = \sum_{i=1}^{n} (E^T_{ii}\,E^T_{jj})\,x_j = E^T_{jj}\,x_j = x_j,$$

i.e. $x_j \in M^T$; par conséquent M^T contient toutes les sommes de la forme $x_1 + \ldots + x_n$, $x_j \in M_j^T$. Réciproquement, si $x \in M^T$, en posant $x_i = E_{ii}^T x$, nous voyons que $x = E^T x = (\sum E_{ii}^T) x = \sum x_i$, où l'on a $E_{ii}^T x_i = (E_{ii}^T)^2 x = E_{ii}^T x = x_i$, i.e. $x_i \in M_i^T$. Enfin, les M_i^T sont orthogonaux deux à deux d'après II, ce qui démontre la proposition III.

IV. *L'espace hilbertien H est la somme directe orthogonale des sous-espaces M^T, où T parcourt la famille complète de représentations irréductibles* *) *d'un groupe G deux à deux non équivalentes.*

Démonstration. On sait que les espaces M^T sont orthogonaux deux à deux. Supposons que H_1 est l'adhérence du sous-espace linéaire de H formé des sommes finies d'éléments des sous-espaces M^T. Montrons que $H_1 = H$, ce qui démontrera la proposition IV.

Soit $H_1 \neq H$. Il existe alors un vecteur non nul $x \in H$ orthogonal au sous-espace H_1. En particulier, le vecteur x est orthogonal à tous les sous-espaces M^T. Remarquons maintenant que (2.7.3e) implique l'égalité

$$E_{ii}^T E_{ik}^T x = E_{ik}^T x \tag{2.7.10}$$

pour tous les T et tous les i, $k = 1, \ldots, \dim T$. Il découle de la relation (2.7.10) que $E_{ik}^T x \in M_i^T$. Par conséquent pour tous les T et tous les i, k, nous avons

$$(x, E_{ik}^T x) = 0 \tag{2.7.11}$$

par construction de x. La relation (2.7.11) peut alors s'écrire sous forme de l'égalité

$$(\dim T) \int \overline{t_{ik}^T(g)}\,(x, S(g)\,x)\,dg = 0, \tag{2.7.12}$$

vérifiée pour tous les T et tous les i, $k = 1, \ldots, \dim T$. Mais en vertu du théorème 2, 2.4, les fonctions $t_{ik}^T(g)$ forment un système complet dans $L^2(G)$; par conséquent, on peut tirer de (2.7.10) que la fonction continue $(x, S(g)\,x)$ de la variable $g \in G$ définit l'élément nul de l'espace $L^2(G)$. Donc $(x, S(g)\,x) = 0$ pour les $g \in G$. En particulier pour $g = e$ nous obtenons $(x, x) = 0$, ce qui est contraire à la construction de x. Par conséquent $H_1 = H$ et la proposition IV est démontrée.

Une représentation S d'un groupe G dans un espace hilbertien H est dite *multiple d'une représentation irréductible T*, si l'espace H est la somme orthogonale directe de sous-espaces linéaires fermés H^i,

*) Bien entendu, on peut ici ne pas tenir compte des T pour lesquelles $M^T = (0)$.

$i = 1, \ldots, \dim T$, qui possèdent la propriété suivante: pour chaque H^i et chaque $x \in H^i$ il existe des vecteurs $x_j \in H^j$, $j = 1, \ldots, \dim T$, tels que $x_i = x$ et

$$S(g)\, x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, x_k \qquad (2.7.13)$$

pour tous les $g \in G$.

V. *Soit* $x_1, \ldots, x_{\dim T}$ *une famille de vecteurs de l'espace* H. *La relation* (2.7.13) *est vérifiée si et seulement si*

$$E_{kj}^T x_j = x_k \text{ pour tous les } j, k = 1, \ldots, \dim T. \qquad (2.7.14)$$

En particulier, si S *est multiple de* T, *on a* $H^i = M_i^T$.

D é m o n s t r a t i o n. Si la relation (2.7.13) est satisfaite, alors, en appliquant (2.4.1), on obtient

$$E_{kj}^T x_j = (\dim T) \int \overline{t_{kj}^T(g)}\, S(g)\, x_j\, dg =$$

$$= (\dim T) \int \overline{t_{kj}^T(g)} \sum_{p=1}^{\dim T} t_{pj}^T(g)\, x_p\, dg =$$

$$= (\dim T) \sum_{p=1}^{\dim T} \left(\int t_{pj}^T(g)\, \overline{t_{kj}^T(g)}\, dg \right) x_p = x_k,$$

i.e. on a l'égalité (2.7.14). Réciproquement, si la relation (2.7.14) est vérifiée, alors, en appliquant (2.7.3b), on obtient

$$S(g)\, x_j = S(g)\, E_{jj}^T x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, E_{kj}^T x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, x_k,$$

ce qui démontre la proposition V.

VI. *Si une représentation* S *d'un groupe* G *dans un espace hilbertien* H *est multiple d'une représentation irréductible* T, *alors l'espace* H *est la somme orthogonale directe d'une certaine famille de ses sous-espaces* M_λ *tels que*: 1) *chaque* M_λ *est invariant relativement à la représentation* S *et*, 2) *la restriction de la représentation* S *à chacun des sous-espaces* M_λ *est équivalente à la représentation* T.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{e_\lambda^1, \lambda \in \Lambda\}$ une base orthonormée de l'espace H^1. Il est évident que $e_\lambda^1 = E_{11}^T e_\lambda^1$ pour tous les $\lambda \in \Lambda$. Posons $e_\lambda^i = E_{i1}^T e_\lambda^1$ pour tous les $i = 2, \ldots, \dim T$. Comme nous l'avons déjà établi en démontrant la proposition IV, les vecteurs e_λ^i appartiennent aux sous-espaces $M_i^T = H^i$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que les vecteurs e_λ^i pour un i donné forment une base orthonormée de l'espace M_i^T. Mais puisque H est la somme directe

des H^i, la famille de vecteurs $\{e^i_\lambda,\ i = 1, \ldots, \dim T,\ \lambda \in \Lambda\}$ forme une base orthonormée de H. Soit M_λ, $\lambda \in \Lambda$, le sous-espace de l'espace H engendré par les vecteurs e^i_λ, $i = 1, \ldots, \dim T$. D'après la construction des vecteurs e^i_λ et en vertu de la relation (2.7.3) on a

$$E^T_{kj}\, e^j_\lambda = E^T_{kj}\, E^T_{j1}\, e^1_\lambda = E^T_{k1}\, e^1_\lambda = e^k_\lambda, \tag{2.7.15}$$

i.e. les vecteurs e^k_λ vérifient les relations (2.7.14). On en tire à l'aide de V que

$$S(g)\, e^j_\lambda = \sum_{k=1}^{\dim T} t^T_{kj}(g)\, e^k_\lambda. \tag{2.7.16}$$

L'égalité (2.7.16) signifie que M_λ est invariant relativement à $S(g)$, et la restriction de la représentation S à M_λ est équivalente à la représentation T. Puisque la famille $\{e^i_\lambda,\ i = 1, \ldots, \dim T,\ \lambda \in \Lambda\}$ forme une base orthonormée de H, la somme orthogonale directe des sous-espaces M_λ, $\lambda \in \Lambda$, est l'espace H tout entier. Ainsi VI est démontré.

La proposition VI nous montre que la définition que nous venons de donner d'une représentation multiple d'une représentation irréductible est équivalente à celle que nous avons formulée au chapitre I, 2.4.

VII. *Soit S une représentation unitaire continue d'un groupe G dans un espace hilbertien H. Chacun des sous-espaces M^T est invariant relativement à tous les opérateurs $S(g)$, et si $M^T \neq (0)$ la restriction de la représentation S à chaque sous-espace M^T est une représentation unitaire du groupe G dans M^T, multiple d'une représentation irréductible T. Ainsi, chaque représentation unitaire continue d'un groupe compact G dans un espace hilbertien est la somme orthogonale directe de représentations unitaires de ce groupe, multiples de représentations unitaires irréductibles de dimension finie de ce groupe.*

Démonstration. Vu la proposition IV, il nous reste à démontrer que chacun des sous-espaces M^T est invariant relativement à tous les opérateurs $S(g)$ et que la restriction de la représentation S à chaque sous-espace M^T est multiple d'une représentation irréductible T. Soit $x \in M^T$; alors $x = E^T x$, et en vertu de (2.7.3j) on a

$$S(g)\, x = S(g)\, E^T x = E^T S(g)\, x \tag{2.7.17}$$

pour tous les $g \in G$, i.e. $S(g)\, x \in M^T$ pour $x \in M^T$. Ainsi M^T est invariant relativement à $S(g)$, $g \in G$. En outre, M^T est la somme orthogonale directe des sous-espaces $H^i = M^T_i$, $i = 1, \ldots, \dim T$. Soit $x \in M^T_i$. Posons $x_j = E^T_{ji} x$ pour tous les $j = 1, \ldots, \dim T$; alors

$x_j \in M_j^T$ pour tous les j et $x_l = x$, donc $x_k = E_{kj}^T x_j$ pour tous les j, $k = 1, \ldots, \dim T$. En vertu de la proposition V, ceci signifie que la restriction de la représentation S à M^T est multiple de la représentation irréductible T. La proposition VII est démontrée.

Prises ensemble, les propositions I à VII affirment non seulement l'existence d'une décomposition de la représentation donnée en représentations irréductibles, mais indiquent aussi une méthode de décomposition. En particulier, d'après la proposition VII, le projecteur E^T projette tout l'espace H sur un sous-espace M^T où agit une sous-représentation de la représentation S, multiple de la représentation irréductible T. La proposition VI donne une méthode de décomposition de ces représentations, multiples d'irréductibles, en représentations irréductibles. Notons que, quoiqu'en général, la décomposition des représentations multiples d'irréductibles en somme directe de représentations irréductibles n'est pas unique, l'unicité de l'opérateur E^T fait que la décomposition d'une représentation unitaire donnée S en somme directe de représentations, multiples de représentations irréductibles deux à deux non équivalentes, est unique.

2.8. Conditions suffisantes pour qu'une famille de représentations unitaires irréductibles d'un groupe G soit complète. Montrons que l'on a un théorème qui est, dans une certaine mesure, la réciproque des théorèmes 2 et 4 de 2.4.

THÉORÈME. *Soit $\{T^\alpha, \alpha \in A\}$ une famille de représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact G. Soit $\{t_{ij}^\alpha(g), i, j = 1, \ldots, \dim T^\alpha\}$ l'ensemble des éléments matriciaux de la représentation T^α dans une base orthonormée. Si les combinaisons linéaires finies de la famille de fonctions $\{t_{ij}^\alpha(g), \alpha \in A, i, j = 1, \ldots, \dim T^\alpha\}$ forment un ensemble dense dans l'espace $L^2(G)$ ou dans l'espace $C(G)$, alors chaque représentation unitaire irréductible du groupe G est unitairement équivalente à une des représentations du système $\{T^\alpha\}$.*

Démonstration. Si l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de la famille $\{t_{ij}^\alpha\}$ est dense dans $C(G)$, alors il l'est à plus forte raison dans $L^2(G)$. Ce qui nous permet de supposer par la suite que les combinaisons linéaires des fonctions $\{t_{ij}^\alpha\}$ sont denses dans $L^2(G)$. Soit S une représentation unitaire irréductible (de dimension finie) du groupe G dans un espace hilbertien H ; soit χ le caractère de la représentation S. Par hypothèse, le système orthogonal $\{t_{ij}^\alpha\}$ est dense dans l'espace hilbertien $L^2(G)$ et il existe donc une fonction $t_{ij}^\alpha(g)$ pour laquelle

$$(\chi, t_{ij}^\alpha) \neq 0. \qquad (2.8.1)$$

Construisons pour la représentation S l'opérateur $E_{ij}^{T^\alpha}$; nous avons

$$E_{ij}^{T^\alpha} = (\dim T^\alpha) \int_G \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, S(g)\, dg. \qquad (2.8.2)$$

En vertu de la continuité du passage d'un opérateur à sa trace, on peut calculer la trace du deuxième membre de l'égalité (2.8.2) en passant à la trace sous le signe de l'intégrale. Par conséquent

$$\operatorname{tr}(E_{ij}^{T^\alpha}) = (\dim T^\alpha) \int_G \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, \operatorname{tr} S(g)\, dg =$$

$$= (\dim T^\alpha) \int_G \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, \chi(g)\, dg = (\chi, t_{ij}^\alpha)(\dim T^\alpha). \qquad (2.8.3)$$

En vertu de (2.8.1), le deuxième membre de (2.8.3) n'est pas nul. Donc $E^{T^\alpha}{}_{ij} \neq 0$. En attirant (2.7.3e), on obtient

$$E_{ii}^{T^\alpha} \neq 0, \qquad (2.8.4)$$

puisque $E_{ii}^{T^\alpha} E_{ij}^{T^\alpha} = E_{ij}^{T^\alpha} \neq 0$. Mais alors *a fortiori*

$$E^{T^\alpha} \neq 0, \text{ donc } M^{T^\alpha} \neq (0). \qquad (2.8.5)$$

La relation (2.8.5) et la proposition VII de 2.7 laissent entendre que la représentation S contient une sous-représentation non nulle équivalente à T^α. Mais la représentation S est irréductible, donc S est équivalente à T^α.

2.9. Exemples. 1. Soit G le groupe des rotations du cercle ($G = \Gamma^1$; voir l'exemple 1, 1.7, chapitre I). Toute fonction f sur le groupe G peut être envisagée comme une fonction sur la droite réelle $\mathbf{R}$ si l'on suppose qu'elle satisfait à la condition

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi) \qquad (2.9.1)$$

pour tous les $\varphi \in \mathbf{R}$. Les représentations unidimensionnelles du groupe G peuvent être identifiées aux fonctions numériques sur G (2.1, chapitre I). Considérons la famille χ_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ des représentations unidimensionnelles du groupe G définies par les formules

$$\chi_n(\varphi) = e^{in\varphi}, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (2.9.2)$$

Les fonctions $\chi_n(\varphi)$ vérifient les relations (2.9.1) et donc il est légitime de définir χ_n comme fonctions sur le groupe G. Les fonctions $\chi_n(\varphi)$ sont les éléments matriciaux des représentations irréductibles correspondantes. Dans l'exemple d) de 3.3, chapitre III, nous avons démontré que les fonctions $\chi_n(\varphi)$ forment un système

complet de représentations irréductibles du groupe G. Donnons une autre démonstration de ce fait. Considérons l'ensemble A des combinaisons linéaires finies des fonctions $\chi_n(\varphi)$ sur le groupe G. La famille A forme une algèbre de fonctions sur le groupe G, puisque le produit des fonctions χ_n et χ_m est χ_{n+m}. L'algèbre A sépare les points de G, ce que fait déjà la fonction $\chi_1(\varphi) = e^{i\varphi}$ en définissant une représentation exacte du groupe G. En outre, l'algèbre A contient toutes les fonctions constantes (puisque $\chi_0(g) \equiv 1$). Enfin, $\overline{\chi_n} = \chi_{-n}$, ce qui veut dire que l'algèbre A contient la conjuguée complexe de chacune des ses fonctions. En vertu du théorème de Stone-Weierstrass, l'algèbre A est dense dans $C(G)$. Alors on tire du théorème 2.8 que la famille χ_n, $n \in Z$ définit un système complet de représentations unitaires irréductibles du groupe G.

Appliquons le théorème 5 de 2.4 au cas considéré. On vérifie facilement que la mesure $d\varphi/2\pi$ est une mesure invariante sur G telle que la mesure du groupe G tout entier est égale à 1. Par conséquent, on peut identifier l'espace $L^2(G)$ à l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f 2π-périodiques sur la droite numérique telles que $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\varphi < +\infty$. En vertu du théorème 5 de 2.4, la famille des fonctions χ_n, $n \in Z$ forme une base orthonormée de $L^2(G)$ et la formule (2.4.7) se met sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \text{ pour toutes les } f \in L^2(G), \quad (2.9.3)$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\overline{\chi_n(\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi. \quad (2.9.4)$$

La formule (2.9.3) est l'*égalité de Parceval* connue de la théorie des séries trigonométriques de Fourier.

On peut en particulier en déduire que le système trigonométrique est complet dans $L^2[-\pi, \pi]$.

2. Soit G le groupe des matrices unitaires d'ordre deux à déterminant 1, i.e. $G = SU(2)$. Construisons une famille complète de représentations unitaires irréductibles du groupe G.

Soient m un nombre entier non négatif, et H_m l'espace linéaire des polynômes homogènes de degré m en deux variables z_1 et z_2, muni du produit scalaire

$$(p(z_1, z_2), q(z_1, z_2)) = \int\limits_{|z_1|^2+|z_2|^2 \leq 1} p(z_1, z_2)\,\overline{q(z_1, z_2)}\, dz_1\, dz_2, \quad (2.9.5)$$

où $dz_1 = dx_1\, dy_1$, $dz_2 = dx_2\, dy_2$ pour $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Le lecteur vérifiera facilement que l'espace linéaire H_m, muni du produit scalaire (2.9.5), est un espace hilbertien de dimension finie, et la formule

$$(T_m(g)\, p)(z_1, z_2) = p\,(g_{11}z_1 + g_{21}z_2,\ g_{12}z_1 + g_{22}z_2), \qquad (2.9.6)$$

où

$$g = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} \in SU(2),$$

définit une représentation unitaire continue du groupe G dans l'espace H_m. En particulier, les opérateurs $T_m(g)$ définis par la formule (2.9.6) appliquent les polynômes homogènes de degré m dans des polynômes homogènes de degré m.

I. *Les représentations T_m sont irréductibles.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Γ le sous-groupe du groupe G formé des matrices diagonales, i.e.

$$\Gamma = \left\{ \gamma_\varphi = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{Vmatrix},\ \varphi \in \mathbf{R} \right\}. \qquad (2.9.7)$$

La restriction de la représentation T_m à Γ est décomposable en somme directe de représentations unidimensionnelles deux à deux non équivalentes. En effet, si $p_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{m-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, on a

$$[T_m(\gamma_\varphi)\, p_k](z_1, z_2) = (e^{i\varphi}z_1)^k\, (e^{-i\varphi}z_2)^{m-k} = e^{i(2k-m)\varphi} p_k(z_1, z_2). \qquad (2.9.8)$$

Ainsi, chaque sous-espace L (de l'espace H_m), invariant relativement à la représentation T, doit être la somme directe de sous-espaces invariants relativement à la restriction de la représentation T au groupe Γ, i.e. si $L \neq (0)$, alors L est l'enveloppe linéaire de certains polynômes p_k, $k = 0, \ldots, m$.

Considérons maintenant le sous-groupe Δ du groupe G déterminé par la formule

$$\Delta = \left\{ \delta_\theta = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\}. \qquad (2.9.9)$$

Il est évident que

$$(T_m(\delta_\theta)\, p_k)(z_1, z_2) = \\ = (z_1 \cos\theta + z_2 \sin\theta)^k\, (-z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta)^{m-k}. \qquad (2.9.10)$$

Supposons que la formule

$$T_m(\delta_\theta)\, p_k = \sum_{j=0}^{m} t_{kj}(\theta)\, p_j \qquad (2.9.11)$$

donne la décomposition du deuxième membre de la relation (2.9.10) relativement à la base (p_k). Il est évident que les $t_{kj}(\theta)$ sont des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, et en particulier les fonctions $t_{kj}(\theta)$ sont continûment différentiables. Montrons que $t_{k,\,k+1}(\theta)$ et $t_{k,\,k-1}(\theta)$ ne sont pas identiquement nulles, lorsque $k+1 \leqslant m$ ou $k-1 \geqslant 0$ respectivement. Il suffit de montrer que les dérivées de ces fonctions relativement à θ pour $\theta = 0$ ne sont pas nulles. En calculant la dérivée de la relation (2.9.10) relativement à θ pour $\theta = 0$, on trouve

$$\frac{d}{d\theta}(T_m(\delta_\theta)\,p_k)(z_1,\ z_2)\,|_{\theta=0} = kz_1^{k-1}z_2^{m-k+1} - (m-k)\,z_1^{k+1}z_2^{m-k+1} =$$
$$= kp_{k-1}(z_1,\ z_2) - (m-k)\,p_{k+1}(z_1,\ z_2). \qquad (2.9.12)$$

En confrontant (2.9.12) avec (2.9.11), on obtient

$$\sum_{j=0}^{m}(d/d\theta)\,(t_{kj}(\theta))\,|_{\theta=0}\cdot p_j = kp_{k-1} - (m-k)\,p_{k+1}, \qquad (2.9.13)$$

i.e. $t_{k,\,k+1}(\theta) \not\equiv 0$ pour $k < m$; $t_{k,\,k-1}(\theta) \not\equiv 0$ pour $k > 0$. D'où l'on tire que si L est non nul, i.e. contient un certain polynôme p_{k_0}, alors L contient tous les polynômes p_k de numéros $k \leqslant m$, $k > k_0$ et $k \geqslant 0$, $k < k_0$, i.e. $L = H_m$. Par conséquent, la représentation T_m est irréductible.

Par la suite nous aurons à nous servir de la proposition auxiliaire suivante.

II. *Pour chaque élément $g \in G$, on peut trouver des éléments $v \in G$, et $\gamma \in \Gamma$ tels que $g = v\gamma v^{-1}$.*

Démonstration. On sait du cours d'algèbre linéaire que chaque matrice unitaire g peut être amenée par une transformation unitaire w à la forme diagonale γ:

$$g = w\gamma w^{-1}.$$

Lorsque $g \in SU(2)$, i.e. $\det u = 1$, on a également $\det\gamma = 1$ et donc $\gamma \in \Gamma$. Lorsque $\det w \neq 1$, alors en remplaçant la matrice w par la matrice $v = w\tau$, où $\tau = \begin{Vmatrix} (\det w)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, on obtient $\det v = 1$. Par conséquent $v \in SU(2)$, tandis que la matrice τ est permutable à chaque matrice $\gamma \in \Gamma$, car τ et γ sont simultanément diagonales. Par conséquent, $\tau\gamma\tau^{-1} = \gamma$ et

$$v\gamma v^{-1} = w\tau\gamma\,(w\tau)^{-1} = w\gamma w^{-1} = g.$$

III. *Le caractère χ_m d'une représentation unitaire irréductible T_m se détermine par la formule*

$$\chi_m(g) = \frac{e^{i(m+1)\varphi} - e^{-i(m+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}, \qquad (2.9.14)$$

pour

$$g = v\gamma_\varphi v^{-1}, \quad v \in SU(2), \quad \gamma_\varphi = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{Vmatrix}. \tag{2.9.15}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que la relation (2.9.15) est vérifiée. Puisque le caractère d'une représentation de dimension finie est une fonction constante sur les classes d'éléments conjugués du groupe G, on a $\chi_m(g) = \chi_m(v^{-1}gv) = \chi_m(\gamma_\varphi)$. Par conséquent, pour démontrer la relation (2.9.14) il suffit de calculer $\chi_m(\gamma_\varphi)$. La relation (2.9.8) nous donne

$$\chi_m(\gamma_\varphi) = \sum_{k=0}^{m} e^{i(2k-m)\varphi}. \tag{2.9.16}$$

En calculant la somme dans la formule (2.9.16), on obtient l'égalité (2.9.14).

IV. *Les caractères χ_m des représentations T_m vérifient la relation*

$$\chi_m(g)\,\chi_n(g) = \chi_{m+n}(g) + \chi_{m+n-2}(g) + \ldots + \chi_{|m-n|}(g) \tag{2.9.17}$$

pour tous les $g \in G$ et tous les nombres m et n non négatifs.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de vérifier la formule (2.9.17) pour $g = \gamma_\varphi$. On obtient à partir des relations (2.9.14) et (2.9.16)

$$\chi_m(\gamma_\varphi)\,\chi_n(\gamma_\varphi) = \\ = \frac{e^{i(m+1)\varphi} - e^{-i(m+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}\left(e^{in\varphi} + e^{i(n-2)\varphi} + \ldots + e^{-in\varphi}\right). \tag{2.9.18}$$

La substitution de la relation (2.9.14) dans le deuxième membre de (2.9.17) donne l'expression du deuxième membre de (2.9.18).

V. *Le produit tensoriel de representations T_m et T_n se décompose en une somme orthogonale directe des représentations T_{m+n}, T_{m+n-2}, ..., $T_{|m-n|}$.*

Cette assertion est une conséquence immédiate de IV, 2.9, chapitre I, et de I, 2.6.

VI. *Les combinaisons linéaires finies des éléments matriciaux $t_{ij}^m(g)$, $m \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots,$ dim T_m, des représentations unitaires irréductibles T_m sont denses dans $C(G)$.*

D é m o n s t r a t i o n. On déduit de la proposition V que les combinaisons linéaires finies des éléments matriciaux des représentations T_m forment une algèbre A de fonctions continues sur G. Puisque l'élément matriciel de la représentation unité T_0 du groupe G appartient à A, elle contient les constantes. En outre, l'algèbre A sépare les points de G puisque la représentation T_1 possède, pour la base $p_1 = z_1$, $p_2 = z_2$, les éléments matriciaux g_{ij}, $i, j = 1, 2$ (i.e. T_1 est équivalente à la représentation identique). Enfin, si $\overline{T}_k$

est la représentation adjointe de T_k, alors $\chi_{\overline{T}_k} = \overline{\chi}_k$, et la formule (2.9.14) implique $\overline{\chi}_k = \chi_k$. Par conséquent, $\overline{T}_k$ est équivalente à T_k. L'algèbre A contient donc, avec chaque fonction, la fonction adjointe. En vertu du théorème de Stone-Weierstrass, l'algèbre A est dense dans $C(G)$.

VII. *La famille des représentations T_m forme une famille complète de représentations unitaires irréductibles du groupe G.*

Ceci découle de VI et du théorème de 2.8.

En appliquant le théorème 5 de 2.4, nous obtenons le

THÉORÈME. *Les fonctions $\varphi_{ij}^m(g) = \sqrt{m+1}\, t_{ij}^m(g)$, où $m \geqslant 0$, $i, j = 0, \ldots, m$, et les $t_{ij}^m(g)$ sont les éléments matriciaux d'une représentation irréductible T_m dans une certaine base orthonormée donnée, forment un système orthonormé dans $L^2(G)$ et pour chaque fonction $f \in L^2(G)$ on a l'égalité*

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \sum_{i,j=0}^{\infty} |(f, t_{ij}^m)|^2. \qquad (2.9.19)$$

§ 3. Algèbre de groupe d'un groupe compact

3.1. Définition et propriétés fondamentales de l'algèbre de groupe. Soit G un groupe topologique compact. Désignons par $L^1(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions numériques f, sommables sur le groupe G, telles que: 1) f est mesurable relativement à la mesure invariante sur G; 2) $\int_G |f(g)|\, dg < +\infty$. Identifions les fonctions qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure nulle. Munissons $L^1(G)$ des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un nombre. Alors $L^1(G)$ devient un espace linéaire. Définissons sur l'espace $L^1(G)$ l'opération de multiplication en posant

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\, dh \qquad (3.1.1.)$$

pour tous les $f_1, f_2 \in L^1(G)$. La fonction $f_1 * f_2$ s'appelle *convolution* des fonctions f_1 et f_2.

Montrons que la fonction $f_1 * f_2$ appartient à l'espace $L^1(G)$. Considérons l'application φ: $(g, h) \to (h^{-1}, g, h)$ du groupe compact $G \times G$ sur lui-même. C'est évidemment un homéomorphisme; on vérifie aisément que φ applique les ensembles ouverts de la forme $M_1 \times M_2$ en des ensembles de même mesure. Par conséquent, φ applique les fonctions mesurables sur $G \times G$ en des fonctions mesurables. Ainsi, la fonction $f_1(h) f_2(h)$ étant mesurable sur

$G \times G$, la fonction $f_1(h) f_2(h^{-1}g)$ le sera aussi sur $G \times G$. D'autre part, l'intégrale multiple de la fonction $|f_1(h) f_2(h^{-1}g)|$ est égale à

$$\int_G dh \int_G |f_1(h)| \, |f_2(h^{-1}g)| \, dg = \int_G |f_1(h)| \, dh \int_G |f_2(h^{-1}g)| \, dg =$$
$$= \int_G |f_1(h)| \, dh \int_G |f_2(g)| \, dg < +\infty; \qquad (3.1.2)$$

et donc la fonction $f_1(h) f_2(h^{-1}g)$ est une fonction sommable sur $G \times G$. Appliquant à cette fonction le théorème de Fubini, nous obtenons que l'intégrale $\int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) \, dh$ existe pour presque tous les $g \in G$ et détermine une fonction sommable sur G. Par conséquent, la formule (3.1.1) définit correctement la multiplication sur $L^1(G)$. Le lecteur vérifiera facilement que pour chaque nombre complexe λ et pour $f_1, f_2, f_3 \in L^1(G)$, on a les égalités

$$\lambda (f_1 * f_2) = \lambda f_1 * f_2, \; f_1 * (\lambda f_2) = \lambda (f_1 * f_2),$$
$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3, \; (f_1 + f_2) * f_3 =$$
$$= f_1 * f_3 + f_2 * f_3, \; f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3. \qquad (3.1.3)$$

Les relations (3.1.3) signifient que $L^1(G)$ est une algèbre associative sur le corps des nombres complexes.

Posons

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})} \quad \text{pour tous les } g \in G, \; f \in L^1(G). \qquad (3.1.4)$$

Puisque

$$\int_G |f^*(g)| \, dg = \int_G |\overline{f(g^{-1})}| \, dg = \int_G |f(g)| \, dg \qquad (3.1.5)$$

(en vertu de la propriété 7) de la proposition I de 2.1), on a $f^* \in L^1(G)$. Le lecteur vérifiera facilement que l'application $f \to f^*$ satisfait aux conditions 1) à 4) de 2.5, chapitre II. Ainsi $L^1(G)$ peut être envisagé comme une algèbre symétrique.

Introduisons une norme sur $L^1(G)$ en posant

$$\| f \|_{L^1(G)} = \int_G |f(g)| \, dg \qquad (3.1.6)$$

pour tous les $f \in L^1(G)$. La relation (3.1.5) implique

$$\| f^* \|_{L^1(G)} = \| f \|_{L^1(G)}. \qquad (3.1.7)$$

En outre, on déduit du théorème de Fubini et de l'invariance de la mesure dg que

$$\|f_1 * f_2\|_{L^1(G)} = \int \left| \int f_1(h) f_2(h^{-1}g)\, dh \right| dg \leqslant$$

$$\leqslant \int \left\{ \int |f_1(h)|\, |f_2(h^{-1}g)|\, dh \right\} dg = \int \left\{ \int |f_2(h^{-1}g)|\, dg \right\} |f_1(h)|\, dh =$$

$$= \int |f_2(g)|\, dg \int |f_1(h)|\, dh = \|f_1\|_{L^1(G)} \|f_2\|_{L^1(G)},$$

d'où

$$\|f_1 * f_2\|_{L^1(G)} \leqslant \|f_1\|_{L^1(G)} \|f_2\|_{L^1(G)}. \tag{3.1.8}$$

En comparant la définition de l'algèbre $L^1(G)$, en particulier la formule (3.1.1), avec la définition de l'algèbre de groupe d'un groupe fini, en particulier avec la formule (2.7.6) du chapitre II, nous voyons que pour un groupe fini G l'algèbre $L^1(G)$ coïncide avec l'algèbre A_G.

Dans le cas général, l'algèbre $L^1(G)$ s'appelle *algèbre de groupe* du groupe G.

I. *L'algèbre de groupe $L^1(G)$ contient l'élément neutre si et seulement si le groupe G est fini.*

Démonstration. Si le groupe G est fini, l'algèbre de groupe $L^1(G)$ contient l'élément neutre d'après la proposition II de 2.7, chapitre II. Réciproquement, supposons que l'algèbre $L^1(G)$ contient l'élément neutre $e(g)$. Montrons que la mesure des ensembles ouverts non vides possède une borne inférieure positive. En effet, supposons qu'il existe des voisinages de l'élément neutre de mesure aussi petite que l'on veut; alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage U de l'élément neutre du groupe G pour lequel $\int_U |e(g)|\, dg < \varepsilon$. Supposons que V est un voisinage symétrique de l'élément neutre du groupe G qui satisfait à la condition $V^2 \subset U$, et soit ξ_V la fonction caractéristique du voisinage V. Alors, pour $g \in V$, on a

$$1 = \xi_V(g) = (e * \xi_V)(g) = \int_G e(h)\, \xi_V(h^{-1}g)\, dh =$$

$$= \int_{gV} e(h)\, dh \leqslant \int_U |e(h)|\, dh < \varepsilon,$$

ce qui est impossible lorsque $\varepsilon < 1$.

Ainsi la mesure de chaque sous-ensemble ouvert non vide $M \subset G$ ne peut être inférieure à un certain $a > 0$. Si le groupe G est infini on peut trouver, pour chaque n, n points distincts $g_1, \ldots, g_n \in G$; ces points possèdent des voisinages disjoints $M_1, \ldots, M_n$, donc

la mesure du groupe G tout entier n'est pas inférieure à na pour tout n. Mais puisque $\mu(G) = 1$, le groupe G est fini.

II. *Lorsque* $f \in L^1(G)$, *les fonctions*

$$f^{g_0}(g) = f(g_0 g), \quad f_{g_0}(g) = f(gg_0) \tag{3.1.9}$$

sont des fonctions continues de g_0 *relativement à la norme sur* $L^1(G)$.

Démonstration. Si f est une fonction continue sur G, alors f est uniformément continue sur G (voir III, 1.2), donc il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un voisinage U de l'élément neutre du groupe G tel que $|f(h_1) - f(h_0)| < \varepsilon$ pour $h_1 \in h_0 U$; alors lorsque $g_1 \in g_0 U$ nous avons également $gg_1 \in gg_0 U$ et donc

$$\|f_{g_1} - f_{g_0}\|_{L^1(G)} = \int_G |f_{g_1}(g) - f_{g_0}(g)|\, dg =$$
$$= \int_G |f(gg_1) - f(gg_0)|\, dg \leqslant \varepsilon \int_G dg = \varepsilon,$$

i.e. l'assertion de la proposition II est vérifiée pour toutes les fonctions continues f sur G. Si f est une fonction quelconque de $L^1(G)$, il existe une fonction f_1 continue sur le groupe G et telle que $\|f - f_1\| <$ $< \varepsilon/3$. Choisissons un voisinage V de l'élément neutre du groupe G de sorte que l'on ait l'égalité $\|(f_1)_g - (f_1)_h\|_{L^1} < \varepsilon/3$ pour chaque $g \in hU$; alors

$$f_g - f_h\|_{L^1} \leqslant \|f_g - (f_1)_g\|_{L^1} + \|(f_1)_g - (f_1)_h\|_{L^1} +$$
$$+ \|(f_1)_h - f_h\|_{L^1} < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

On démontre d'une manière analogue la continuité de la fonction f^{g_0}.

Soit $f \in L^2(G)$. Alors f est une fonction mesurable sur G et l'intégrale $\int_G |f(g)|^2\, dg$ est finie. L'inégalité $|f| \leqslant (1 + |f|^2)/2$ implique alors que $\int_G |f(g)|\, dg$ est finie. Par conséquent, on a l'inclusion

$$L^2(G) \subset L^1(G). \tag{3.1.10}$$

On déduit de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski que

$$\left(\int_G |f(g)|\, dg\right)^2 \leqslant \left(\int_G 1 dg\right) \int_G |f(g)|^2\, dg = \int_G |f(g)|^2\, dg,$$

i. e.

$$\|f\|^2_{L^1(G)} \leqslant \int_G |f(g)|^2\, dg = \|f\|^2_{L^2(G)}. \tag{3.1.11}$$

III. *Lorsque* $f \in L^2(G)$, *les fonctions* f^{g_0}, f_{g_0} *définies par les formules* (3.1.9) *sont des fonctions continues de* g_0 *relativement à la norme dans* $L^2(G)$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition II; elle est donc laissée au lecteur.

IV. *Lorsque* $f_1, f_2 \in L^2(G)$, *alors* $f_1 * f_2$ *est une fonction continue sur* G.

Démonstration. Il est évident que la fonction f_2^* est un élément de l'espace $L^2(G)$. D'après III, la fonction $(f_2^*)^{g^{-1}}$ est une fonction continue relativement à la norme dans $L^2(G)$. D'autre part,

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\, dh =$$

$$= \int_G f_1(h) \overline{(f_2^*)^{g^{-1}}(h)}\, dh = (f_1, (f_2^*)^{g^{-1}}); \qquad (3.1.12)$$

comme $(f_2^*)^{g^{-1}}$ est une fonction continue dans $L^2(G)$, la fonction $(f_1, (f_2^*)^{g^{-1}})$ est une fonction numérique continue, tandis que l'égalité (3.1.12) implique que $f_1 * f_2$ est continue.

V. *Pour chaque fonction* $f \in L^1(G)$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction* $\varphi \in L^1(G)$ *telle que* $\| f * \varphi - f \|_{L^1(G)} < \varepsilon$, $\| \varphi * f - f \|_{L^1(G)} < \varepsilon$.

Démonstration. Soient U un voisinage de l'élément neutre du groupe G, et φ_U une fonction non négative de $L^1(G)$, nulle en dehors de U et vérifiant la condition

$$\int_G \varphi_U(g)\, dg = 1 \qquad (3.1.13)$$

(par exemple, $\varphi_U = (1/\mu(U))\, \chi_U$, où $\mu(U)$ est la mesure de Haar de l'ensemble U, χ_U la fonction caractéristique du voisinage U). Alors

$$(\varphi_U * f)(g) = \int_G \varphi_U(h) f(h^{-1}g)\, dh,$$

par conséquent,

$$\varphi_U * f = \int_G \varphi_U(h) f^{h^{-1}}\, dh; \qquad (3.1.14)$$

on déduit de (3.1.13) et (3.1.14) que

$$\| \varphi_U * f - f \|_{L^1(G)} = \left\| \int_G \varphi_U(h) f^{h^{-1}}\, dh - f \right\|_{L^1(G)} =$$

$$= \left\| \int_U \varphi_U(h) (f^{h^{-1}} - f)\, dh \right\|_{L^1(G)} \leqslant \int_U \varphi_U(h) \| f^{h^{-1}} - f \|_{L^1(G)}\, dh. \qquad (3.1.15)$$

D'après II, le voisinage U peut être choisi de manière à avoir $\| f^{h^{-1}} - f \|_{L^1(G)} < \varepsilon$ pour $h \in U$; alors on obtient de (3.1.15) que

$$\| \varphi_U * f - f \|_{L^1(G)} \leqslant \varepsilon \int_U \varphi_U(h)\, dh = \varepsilon.$$

On démontre d'une manière analogue que $\| f * \varphi_U - f \|_{L^1(G)} \to 0$.

VI. *Un sous-espace fermé I dans $L^1(G)$ est un idéal à gauche (resp. à droite) dans $L^1(G)$ si et seulement s'il est invariant relativement à toutes les translations à gauche (resp. à droite).*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que la fonction φ_U est choisie conformément aux conditions de la proposition V. Si I est un idéal à gauche de $L^1(G)$ et $f \in I$, alors on a également $(\varphi_U)^{g_0} * f \in I$. D'autre part,

$$((\varphi_U)^{g_0} * f)(g) = \int \varphi_U(g_0 h) f(h^{-1} g)\, dh =$$
$$= \int \varphi_U(h) f(h^{-1} g_0 g)\, dh = (\varphi_U * f)^{g_0}(g). \qquad (3.1.16)$$

D'après V, $\varphi_U * f \to f$; on en tire alors en vertu de II que $(\varphi_U * f)^{g_0} \to f^{g_0}$. Puisque $(\varphi_U * f)^{g_0} = (\varphi_U)^{g_0} * f \in I$ et l'idéal I est fermé, on a $f^{g_0} \in I$. Ainsi, un idéal fermé à gauche est invariant relativement aux translations à gauche.

Réciproquement, supposons que I est un sous-espace fermé de $L^1(G)$, invariant relativement aux translations à gauche. Si la fonction ψ est continue sur G, alors la fonction $\psi(h) f^{h^{-1}}$ est une fonction continue sur G relativement à la norme sur $L^1(G)$ quelle que soit la fonction $f \in L^1(G)$. Alors, en répétant les raisonnements habituels, on peut montrer que l'intégrale

$$\psi * f = \int_G \psi(h) f^{h^{-1}}\, dh$$

est la limite (relativement la norme) de sommes finies de la forme

$$\sum_k \psi(h_k) f^{h_k^{-1}} \mu(\Delta_k),$$

où les $\{\Delta_k\}$ forment une décomposition du groupe G en sous-ensembles mesurables disjoints. Soit $f \in I$. Puisque I est invariant relativement aux translations à gauche, on a $\sum_k \psi(h_k) f^{h_k^{-1}} \mu(\Delta_k) \in I$; puisque $\psi * f$ est la limite de ces sommes et I est fermé, on a $\psi * f \in I$ pour chaque fonction continue ψ. Lorsque ψ est une fonction quelconque de $L^1(G)$, il existe une fonction continue φ sur G telle que $\| \psi - \varphi \|_{L^1(G)} < \varepsilon$. Alors $\| \psi * f - \varphi * f \|_{L^1(G)} \leqslant \leqslant \| \psi - \varphi \|_{L^1(G)} \| f \|_{L^1(G)} < \varepsilon \| f \|_{L^1(G)}$ d'après (3.1.8). Comme

$\varphi * f \in I$ pour toutes les fonctions continues φ on déduit du fait que le sous-espace I est fermé l'inclusion $\psi * f \in I$ pour toutes les $\psi \in L^1(G)$, i.e. I est un idéal à gauche dans $L^1(G)$.

3.2. Représentations d'une algèbre de groupe; lien avec les représentations du groupe. Soit T une représentation de l'algèbre de groupe $L'(G)$ dans un espace hilbertien H. La représentation T est dite *non dégénérée* lorsque la condition $T(f)\xi = 0$ (pour un $\xi \in H$ donné et tous les $f \in L^1(G)$) implique $\xi = 0$.

I. *Soient $f \to T(f)$ une représentation continue symétrique non dégénérée de l'algèbre de groupe $L^1(G)$ dans un espace hilbertien H et φ_U la famille d'éléments de l'algèbre $L'(G)$ construite dans la proposition* V *de* 3.1. *Alors $\| T(\varphi_U)\xi - \xi \| \to 0$ pour tout vecteur $\xi \in H$, et l'ensemble H' des combinaisons linéaires finies des vecteurs de la forme $T(f)\eta$, $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$, est partout dense dans H.*

Démonstration. Soit H_1 l'adhérence de l'enveloppe linéaire des vecteurs de la forme $T(f)\eta$, $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$. Si $H_1 \neq H$, il existe alors un vecteur non nul $\xi \in H$, orthogonal à H_1, i.e. $(\xi, T(f)\eta) = 0$ pour tous les $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$. Alors

$$(T(f)\xi, \eta) = (\xi, T(f)^* \eta) = (\xi, T(f^*)\eta) = 0 \qquad (3.2.1)$$

pour tous les $\eta \in H$, $f \in L^1(G)$. Il découle de (3.2.1) que $T(f)\xi = 0$ pour tous les $f \in L^1(G)$. Puisque la représentation $f \to T(f)$ est non dégénérée, on a $\xi = 0$. La contradiction obtenue nous montre que $H_1 = H$.

Lorsque $\xi = T(f)\eta$ pour certains $\eta \in H$, $f \in L^1(G)$, alors

$$\| T(\varphi_U)\xi - \xi \| = \| T(\varphi_U) T(f)\eta - T(f)\eta \| = \\ = \| T(\varphi_U * f - f) \| \, \| \eta \| \to 0, \qquad (3.2.2)$$

car $\| \varphi_U * f - f \|_{L^1(G)} \to 0$, tandis que la représentation $f \to T(f)$ est continue. On tire de (3.2.2) que $\| T(\varphi_U)\xi - \xi \| \to 0$ pour tout vecteur $\xi \in H'$ (i.e. pour chaque vecteur représentable sous forme de combinaisons linéaires finies de vecteurs de la forme $T(f)\eta$). Mais l'ensemble H' est dense dans $H_1 = H$, et si ξ est un vecteur quelconque de H, il existe un vecteur $\xi' \in H$ qui vérifie la condition $\| \xi - \xi' \| < \varepsilon$. Alors

$$\| T(\varphi_U)\xi - \xi \| \leqslant \| T(\varphi_U)\xi - T(\varphi_U)\xi' \| + \| T(\varphi_U)\xi' - \xi' \| + \\ + \| \xi' - \xi \| < (1 + \| T(\varphi_U) \|) \| \xi - \xi' \| + \| T(\varphi_\alpha)\xi' - \xi' \|.$$

Puisque l'application $f \to T(f)$ est continue et $\| \varphi_U \|_{L^1(G)} = 1$, on a $\| T(\varphi_U) \| \leqslant C$ pour un certain C et tous les U. En choisissant la fonction φ_U de manière à avoir $\| T(\varphi_U)\xi' - \xi' \| < \varepsilon$, on obtient $\| T(\varphi_U)\xi - \xi \| < (C + 2)\varepsilon$, ce qui termine la démonstration de la proposition I.

II. *Il existe une bijection entre l'ensemble des représentations non dégénérées symétriques $f \to T(f)$ de l'algèbre de groupe $L^1(G)$ d'un groupe G et l'ensemble des représentations $g \to T(g)$ unitaires continues du groupe G; cette bijection est définie par la formule*

$$T(f) = \int_G f(g)\, T(g)\, dg. \tag{3.2.3}$$

Démonstration. Soit $g \to T(g)$ une représentation unitaire continue du groupe G. Définissons les opérateurs $T(f)$ par la formule (3.2.3). Il est évident que l'application $f \to T(f)$ est linéaire. En outre

$$T(f^*) = \int f^*(g)\, T(g)\, dg = \int \overline{f(g^{-1})} T(g)\, dg =$$
$$= \int \overline{f(g)} T(g^{-1})\, dg = \int \overline{f(g)} T^*(g)\, dg =$$
$$= \int (f(g)\, T(g))^*\, dg = T(f)^* \tag{3.2.4}$$

et

$$T(f_1 * f_2) = \int \left(\int f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)\, dh \right) T(g)\, dg =$$
$$= \int f_1(h) \left(\int f_2(h^{-1}g)\, T(g)\, dg \right) dh =$$
$$= \int f_1(h) \left(\int f_2(k)\, T(hk)\, dk \right) dh = \int f_1(h) \left(\int f_2(k)\, T(h)\, T(k)\, dk \right) dh =$$
$$= \int f_1(h)\, T(h)\, dh \int f_2(k)\, T(k)\, dk = T(f_1)\, T(f_2). \tag{3.2.5}$$

Les relations (3.2.4) et (3.2.5) signifient que l'application $f \to T(f)$ définie par la formule (3.2.3) est une représentation symétrique de l'algèbre de groupe $L^1(G)$. Montrons qu'elle est continue. Puisque $\| T(g) \| = 1$, on a

$$\| T(f) \| = \left\| \int_G \| f(g)\, T(g) \|\, dg \right\| \leqslant \int_G \| f(g)\, T(g) \|\, dg =$$
$$= \int_G | f(g) |\, dg = \| f \|_{L^1(G)} \tag{3.2.6}$$

pour tous les $f \in L^1(G)$; par conséquent l'application $f \to T(f)$ est continue.

Soit g un élément du groupe G. En vertu de I on a $\| T(\varphi_U)\, \xi - \xi \| \to 0$, donc

$$\| T(g)\, T(\varphi_U)\, \xi - T(g)\, \xi \| \to 0; \tag{3.2.7}$$

mais

$$T(g)\,T(\varphi_U) = T(g)\left(\int \varphi_U(h)\,T(h)\,dh\right) =$$
$$= \int \varphi_U(h)\,T(gh)\,dh = \int \varphi_U(g^{-1}h)\,T(h)\,dh =$$
$$= \int (\varphi_U)^{g^{-1}}(h)\,T(h)\,dh = T((\varphi_U)^{g^{-1}}); \qquad (3.2.8)$$

ainsi on tire de (3.2.7) et (3.2.8) la relation

$$T((\varphi_U)^{g^{-1}})\,\xi \to T(g)\,\xi \qquad (3.2.9)$$

pour tous les $g \in G$.

Montrons que la représentation $f \to T(f)$ est non dégénérée. Remarquons que

$$T(\varphi_U)\,\xi \to \xi$$

pour tous les $\xi \in H$, d'où l'on déduit immédiatement que la représentation $f \to T(f)$ est non dégénérée.

Réciproquement, supposons donné une représentation continue symétrique non dégénérée de l'algèbre de groupe $L^1(G)$ dans l'espace hilbertien H. Montrons qu'il existe une représentation unitaire continue $g \to T(g)$ (du groupe G) bien définie qui vérifie la relation (3.2.3).

L'unicité de la représentation cherchée du groupe G découle de l'égalité (3.2.9) qui nous montre que si la représentation $f \to T(f)$ est définie par la formule (3.2.3), alors les opérateurs $T(g)$ sont déterminés de manière unique par celle-ci. Démontrons l'existence d'une représentation $g \to T(g)$ (du groupe G) vérifiant la relation (3.2.3). D'après (3.1.16), $(\varphi_U)^{g_0} * f = (\varphi_U * f)^{g_0}$; d'autre part, puisque $(\varphi_U * f) \to f$ dans $L^1(G)$, on a $(\varphi_U * f)^{g_0} \to f^{g_0}$. Donc

$$(\varphi_U)^{g_0} * f - f^{g_0} \underset{U}{\to} 0 \qquad (3.2.10)$$

dans $L^1(G)$. Etant donné la continuité de la représentation $f \to T(f)$, on peut tirer de l'égalité (3.2.10) que

$$T((\varphi_U)^{g_0})\,T(f)\,\eta - T(f^{g_0})\,\eta \to 0 \qquad (3.2.11)$$

pour tous les $\eta \in H$. Soit H' une famille des combinaisons linéaires finies des vecteurs de la forme $T(f)\,\zeta$, $f \in L^1(G)$, $\zeta \in H$. En vertu de (3.2.11), pour tout vecteur $\xi \in H'$ la limite des vecteurs $T((\varphi_U)^{g_0})\,\xi$ existe et appartient à H'. Désignons par $T'(g_0)$ l'opérateur sur H' défini par la formule

$$T'(g_0)\,\xi = \lim_U T((\varphi_U)^{g_0^{-1}})\,\xi \qquad (3.2.12)$$

pour tous les $\xi \in H'$, $g_0 \in G$. L'égalité (3.2.11) implique alors

$$T'(g_0)\,T(f) = T(f^{g_0^{-1}}) \tag{3.2.13}$$

pour tous les $g_0 \in G$, $f \in L^1(G)$. Puisque $\|(\varphi_U)^{g_0^{-1}}\|_{L^1(G)} = \|\varphi_U\|_{L^1(G)} = 1$, on a $\|T((\varphi_U)^{g_0^{-1}})\| \leqslant C$ pour un certain $C > 0$, tous les $g_0 \in G$ et tous les φ_U. Par conséquent, l'opérateur $T'(g_0)$ défini par la formule (3.2.12) peut être prolongé de manière unique à un opérateur linéaire continu sur tout l'espace H; désignons cet opérateur par $T(g_0)$. Alors

$$\|T(g_0)\| \leqslant C \text{ pour tous les } g_0 \in G. \tag{3.2.14}$$

On tire de (3.2.13) que pour tous les $g, h \in G$, $f \in L^1(G)$ on a

$$T'(gh)\,T(f) = T(f^{(gh)^{-1}}) = T((f^{h^{-1}})^{g^{-1}}) = $$
$$= T'(g)\,T(f^{h^{-1}}) = T'(g)\,T'(h)\,T(f). \tag{3.2.15}$$

L'égalité (3.2.15) signifie que $T'(gh) = T'(g)\,T'(h)$ sur H'. Par conséquent

$$T(gh) = T(g)\,T(h) \tag{3.2.16}$$

pour tous les $g, h \in G$. En outre, on déduit de l'égalité (3.2.13)

$$T(e) = 1. \tag{3.2.17}$$

Lorsque $\xi = T(f)\,\eta$, on a

$$T(g_0)\,\xi = T'(g_0)\,T(f)\,\eta = T(f^{g_0^{-1}})\,\eta \tag{3.2.18}$$

et $f^{g_0^{-1}}$ dépend continûment de g_0 en vertu de II, 3.1. Par conséquent, le deuxième membre de l'égalité (3.2.18) dépend continûment de g_0, et donc $T(g_0)\,\xi$ est une fonction continue de g_0 pour tous les $\xi \in H'$. Pour chaque $\xi \in H$ il existe un $\xi' \in H'$ tel que $\|\xi - \xi'\| < \varepsilon$; alors on tire de (3.2.14)

$$\|T(g_1)\,\xi - T(g_0)\,\xi\| \leqslant \|T(g_1)(\xi - \xi')\| + \|T(g_1)\,\xi' - $$
$$- T(g_0)\,\xi'\| + \|T(g_0)(\xi' - \xi)\| \leqslant 2C\varepsilon + \|T(g_1)\,\xi' - T(g_0)\,\xi'\|,$$

où $\|T(g_1)\,\xi' - T(g_0)\,\xi'\| \to 0$ pour $g_1 \to g_0$. Ainsi, la fonction $T(g)\,\xi$ est continue relativement à $g \in G$ pour chaque $\xi \in H$. En réunissant ce fait avec les relations (3.2.16) et (3.2.17), nous voyons que l'application $g \to T(g)$ est une représentation continue du groupe G dans l'espace H.

Montrons que cette représentation est unitaire. Soit $V = U \cap U^{-1}$; alors V est un voisinage symétrique de l'élément neutre de G. Posons $\varphi_V(g) = (\mu(V))^{-1}\chi_V$, où χ_V est la fonction caractéristique de l'ensemble V et $\mu(V)$ est la mesure de Haar de l'ensemble V. Alors $(\varphi_V)^*(g) = \overline{\varphi_V(g^{-1})} = \overline{\varphi_V(g)} = \varphi_V(g)$ et $((\varphi_V)^{g_0^{-1}})^*(g) = \overline{\varphi_V(g_0^{-1}g^{-1})} = \varphi_V(gg_0) = (\varphi_V)_{g_0}(g)$. Un calcul analogue à (3.1.16)

nous donne $f*(\varphi_V)^{g_0}=f_{g_0}*\varphi_V$. En appliquant l'involution, on obtient

$$(\varphi_V)_{g_0}*f^*=\varphi_V*(f^*)^{g_0}, \tag{3.2.19}$$

d'où l'on tire que $(\varphi_V)_{g_0}*f\to f^{g_0}$ pour V quel que soit $f\in L^1(G)$. Alors $T((\varphi_V)_{g_0^{-1}})\,T(f)\to T(f^{g_0^{-1}})=T'(g_0)\,T(f)$ pour tous les $g\in G$, $f\in L^1(G)$ et donc

$$T'(g_0)\,\xi=\lim T((\varphi_V)_{g_0^{-1}})\,\xi \tag{3.2.20}$$

pour tous les $\xi\in H'$. En comparant (3.2.19) avec (3.2.12) et en se servant de la relation $(\varphi_V)_{g_0^{-1}}=((\varphi_V)_{g_0})^*$, on voit que $T'(g_0)=$ $=(T'(g_0^{-1}))^*$ sur H', donc

$$T(g_0)=(T(g_0^{-1}))^*, \tag{3.2.21}$$

ce qui démontre que la représentation $g\to T(g)$ est unitaire.

Démontrons enfin l'égalité (3.2.3). Puisque

$$f_1*f_2=\int f_1(h)\,(f_2)^{h^{-1}}\,dh$$

(cf. (3.1.13)), on déduit de (3.2.13) que

$$T(f_1)\,T(f_2)=T(f_1*f_2)=\int f_1(h)\,T((f_2)^{h^{-1}})\,dh=$$
$$=\int f_1(h)\,T(h)\,T(f_2)\,dh=\left(\int f_1(h)\,T(h)\,dh\right)T(f_2).$$

Donc, les opérateurs linéaires bornés $T(f_1)$ et $\int f_1(h)\,T(h)\,dh$ coïncident sur H'; par conséquent, ils coïncident sur H.

3.3. Centre d'une algèbre de groupe. Soit φ une fonction dans $L^1(G)$ telle que

$$\varphi*f=f*\varphi \tag{3.3.1}$$

pour tous les $f\in L^1(G)$, i.e. φ est une fonction sur G, appartenant au centre $Z_1(G)$ de l'algèbre de groupe $L^1(G)$ du groupe G. En particulier, pour chaque fonction $f(g)$ continue sur G l'égalité $(\varphi*f)(g)=$ $=(f*\varphi)(g)$ de deux fonctions appartenant à $L^1(G)$ prend la forme d'une identité

$$\int \varphi(gh)\,f(h^{-1})\,dh=\int f(h)\,\varphi(h^{-1}g)\,dh, \tag{3.3.2}$$

dans laquelle les deux membres sont des fonctions continues en $g\in G$. Par conséquent, l'égalité (3.3.2) est satisfaite pour tous les $g\in G$. En remplaçant dans le deuxième membre h^{-1} par h, nous voyons que l'égalité

$$\varphi(gh)=\varphi(hg) \tag{3.3.3}$$

est satisfaite pour tous les $g\in G$ et presque tous les $h\in G$. Puisque la fonction $\varphi(gh)$ est mesurable (comme une fonction de deux

variables sur $G \times G$), l'égalité (3.3.3) est vérifiée presque partout sur $G \times G$. Puisque l'application $(g, h) \to (h^{-1}g, h)$ du groupe $G \times G$ dans $G \times G$ préserve la mesurabilité et la mesure (voir (3.1.2)), alors, en remplaçant g par $h^{-1}g$ dans (3.3.3), on obtient presque partout sur $G \times G$

$$\varphi(g) = \varphi(h^{-1} gh); \tag{3.3.4}$$

et par conséquent, pour presque tous les $g \in G$ (et à plus forte raison dans le sens de l'égalité de deux fonctions de $L^1(G)$), on a

$$\varphi(g) = \int \varphi(h^{-1}gh)\, dh. \tag{3.3.5}$$

Réciproquement, si la fonction $\varphi \in L^1(G)$ vérifie la condition (3.3.4), alors l'égalité (3.3.3) est satisfaite presque partout sur $G \times G$ et donc (3.3.2) est valable pour presque tous les $g \in G$, i.e. (3.3.1) est verifiée pour tous les $f \in L^1(G)$ et $\varphi \in Z_1(G)$. Ainsi, nous avons démontré la proposition suivante:

I. *Une fonction $\varphi \in L^1(G)$ appartient à $Z_1(G)$ si et seulement si φ satisfait presque partout sur $G \times G$ à la relation* (3.3.4).

II. *La somme et le produit de convolution de deux fonctions de $Z_1(G)$ appartiennent également à $Z_1(G)$.*

La démonstration se réduit à une vérification immédiate et sera donc omise.

III. *Le caractère de toute représentation unitaire continue de dimension finie d'un groupe G appartient à $Z_1(G)$.*

Démonstration. Le caractère de toute représentation unitaire continue de dimension finie du groupe G est une fonction continue sur G, constante sur les classes d'éléments conjuguées; elle satisfait donc à l'égalité (3.3.4).

IV. *Les caractères des représentations unitaires continues irréductibles d'un groupe G forment un système complet orthonormé dans l'espace hilbertien $L^2(G) \cap Z_1(G)$ formé des fonctions au carré sommable sur G qui appartiennent à $Z_1(G)$.*

Démonstration. Il découle des relations d'orthogonalité (2.6.2) pour les caractères que les caractères χ_α des représentations unitaires continues irréductibles du groupe G forment un système orthormé dans $L^2(G)$. En vertu de III, les caractères χ_α appartiennent à $Z_1(G)$ et donc $\chi_\alpha \in L^2(G) \cap Z_1(G)$. La relation (3.3.3) et la continuité de la multiplication dans $L^1(G)$ (voir (3.1.8)) permettent de conclure que le centre $Z_1(G)$ est fermé dans $L^1(G)$. Il découle alors de (3.1.10) et (3.1.11) que le sous-espace $L^2(G) \cap Z_1(G)$ est fermé dans $L^2(G)$; par conséquent $L^2(G) \cap Z_1(G)$ est un espace hilbertien.

Il nous reste à démontrer que le système orthonormé $\{\chi_\alpha\}$ est complet dans $L^2(G) \cap Z_1(G)$. Supposons que $\varphi \in L^2(G) \cap Z_1(G)$;

alors, en appliquant (2.4.6), on voit que l'égalité

$$\varphi(g) = \sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) t_{ij}^{\alpha}(g) \tag{3.3.6}$$

est vérifiée dans $L^2(G)$ et donc presque partout sur G. D'autre part, la relation (3.3.4) est satisfaite pour presque tous les $(g, h) \in G \times G$; en substituant (3.3.6) dans (3.3.4) on obtient

$$\sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) t_{ij}^{\alpha}(g) = \sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) t_{ij}^{\alpha}(h^{-1}gh) =$$

$$= \sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{k,l} \Big(\sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) t_{ik}^{\alpha}(h^{-1}) t_{lj}^{\alpha}(h)\Big) t_{kl}^{\alpha}(g) \tag{3.3.7}$$

pour presque tous les $(g, h) \in G \times G$; en particulier, pour presque tous les $h \in G$ l'égalité (3.3.7) est satisfaite pour presque tous les $g \in G$. D'autre part, pour un h donné, les deux membres de l'égalité (3.3.7) appartiennent à $L^2(G)$ (comme fonctions de g). Par conséquent, pour presque tous les $h \in G$, les coefficients auprès des $t_{kl}^{\alpha}(g)$ dans les deux membres de (3.3.7) doivent être égaux, d'où

$$(\varphi, t_{kl}^{\alpha}) = \sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) t_{ik}^{\alpha}(h^{-1}) t_{lj}^{\alpha}(h) = \sum_{i,j} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) \overline{t_{ki}^{\alpha}(h)}\, t_{lj}^{\alpha}(h) \tag{3.3.8}$$

pour presque tous les $h \in G$. Comme les deux membres de l'égalité (3.3.8) sont des fonctions continues de h, (3.3.8) est vérifiée partout. En prenant l'intégrale de (3.3.8) relativement à h, et en appliquant les relations d'orthogonalité (2.4.1) on obtient

$$(\varphi, t_{kl}^{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \dfrac{1}{n_\alpha} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi, t_{ii}^{\alpha}) = \dfrac{1}{n_\alpha}\Big(\varphi, \sum_i t_{ii}^{\alpha}\Big) = \dfrac{1}{n_\alpha}(\varphi, \chi_\alpha) & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

En substituant (3.3.9) dans (3.3.6), on obtient

$$\varphi = \sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi, t_{ii}^{\alpha}) t_{ii}^{\alpha} = \sum_{\alpha} n_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \frac{1}{n_\alpha} (\varphi, \chi_\alpha) t_{ii}^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi, \chi_\alpha) t_{ii}^{\alpha} = \sum_{\alpha} (\varphi, \chi_\alpha) \chi_\alpha, \tag{3.3.10}$$

i.e. chaque fonction $\varphi \in L^2(G) \cap Z_1(G)$ se décompose en une série relativement à ses caractères.

REMAQUE. Lorsque $\varphi \in Z_1(G)$, la série $\sum_{\alpha} (\varphi, \chi_\alpha) \chi_\alpha$ ne converge pas nécessairement vers φ, mais la fonction φ se détermine par les

coefficients (φ, χ_α). En plus, chaque fonction $\varphi \in L^1(G)$ se définit de façon unique par les coefficients (φ, t_{ij}^α). Montrons-le.

Soient U un voisinage de l'élément neutre de G, et U_1 un voisinage de l'élément neutre tel que $U_1^3 \subset U$ et $U_1^{-1} = U_1$. Soient $g_1, \ldots, g_n$ des éléments du groupe G tels que les ensembles $g_i U_1$ $(i = 1, \ldots, n)$ recouvrent le groupe G. Soit U_2 un voisinage de l'élément neutre tel que $g_i^{-1} U_2 g_i \subset U_1$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$, et soit U_3 un voisinage de l'élément neutre tel que $U_3^2 \subset U_2$. Désignons par θ_U la fonction $(\mu(U_3))^{-1} \chi_{U_3}$ et posons $\psi_U = \theta_U * \theta_U$. En vertu de IV, 3.1, la fonction ψ_U est continue. Il est évident que ψ_U est une fonction non négative, nulle en dehors du voisinage U_2, et telle que

$$\int_G \psi_U(g)\, dg = \int_G \left(\int_G \theta_U(h)\, \theta(h^{-1}g)\, dh \right) dg = \left(\int_G \theta_U(g)\, dg \right)^2 = 1.$$

Supposons que $\varphi_U(g) = \int_G \psi_U(h^{-1} gh)\, dh$. Il est évident que la fonction φ_U est non négative, continue et qu'elle vérifie la condition (3.3.4). Il existe pour chaque $h \in G$ un élément g_k tel que $h \in g_k U_1$ et donc $h^{-1} U_2 h \subset U_1^{-1} g_k^{-1} U_2 g_k U_1 \subset U_1^3 \subset U$. Par conséquent, la fonction φ_U s'annule en dehors du voisinage U. Il est évident que $\int_G \varphi_U(g)\, dg = 1$.

Considérons maintenant la convolution $\varphi * \varphi_U$. Puisque φ_U est continue, on déduit de la formule $(\varphi * \varphi_U)(g) = \int_G \varphi(h)\, \varphi_U(h^{-1}g)\, dh$ la continuité de la fonction $\varphi * \varphi_U$. Donc à plus forte raison $\varphi * \varphi_U \in L^2(G)$. Considérons la décomposition de la fonction $\varphi * \varphi_U$ en une série relativement aux éléments matriciaux (2.4.6). Calculons les coefficients de cette décomposition:

$$(\varphi * \varphi_U, t_{ij}^\alpha) = \int_G \left(\int_G \varphi(h)\, \varphi_U(h^{-1}g)\, dh \right) \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, dg =$$

$$= \int\int_{G \times G} \varphi(h)\, \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, \varphi_U(h^{-1}g)\, dh\, dg = \int\int_{G \times G} \varphi(h)\, \varphi_U(k)\, \overline{t_{ij}^\alpha\ (hk)}\, dh\, dk =$$

$$= \int\int_{G \times G} \varphi(h)\, \varphi_U(k) \sum_{l=1}^{n_\alpha} \overline{t_{il}^\alpha(h)}\, \overline{t_{lj}^\alpha(k)}\, dh\, dk =$$

$$= \sum_{l=1}^{n_\alpha} \left(\int_G \varphi(h)\, \overline{t_{il}^\alpha(h)}\, dh \right) \left(\int_G \varphi_U(k)\, \overline{t_{lj}^\alpha(k)}\, dk \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n_\alpha} (\varphi, t_{il}^\alpha)(\varphi_U, t_{lj}^\alpha); \qquad (3.3.11)$$

en portant (3.3.9) dans (3.3.11) on obtient

$$(\varphi * \varphi_U, t_{ij}^{\alpha}) = \frac{1}{n_\alpha} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) (\varphi_U, \chi_\alpha); \tag{3.3.12}$$

(2.4.6) et (3.3.12) donnent

$$\varphi * \varphi_U = \sum_{\alpha} \sum_{i, j=1}^{n_\alpha} (\varphi, t_{ij}^{\alpha}) (\varphi_U, \chi_\alpha) t_{ij}^{\alpha}. \tag{3.3.13}$$

Ainsi $\varphi * \varphi_U$ est uniquement défini par les coefficients $(\varphi, t_{ij}^{\alpha})$. Puisque $\varphi * \varphi_U \to \varphi$ sur $L^1(G)$, la fonction φ est bien définie par les coefficients $(\varphi, t_{ij}^{\alpha})$.

3.4. Structure de l'algèbre de groupe.

I. *Soient T^α, $T^{\alpha'}$ deux représentations unitaires continues irréductibles du groupe G. Leurs caractères vérifient la relation*

$$\chi_\alpha * \chi_{\alpha'} = \begin{cases} 0, & \text{si } T^\alpha \text{ et } T^{\alpha'} \text{ ne sont pas équivalentes;} \\ n_\alpha^{-1} \chi_\alpha, & \text{si } T^\alpha = T^{\alpha'}. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Les relations d'orthogonalité (2.4.1) permettent d'écrire

$$(t_{ij}^{\alpha} * t_{kl}^{\alpha'}) (g) = \int_G t_{ij}^{\alpha}(h) t_{kl}^{\alpha'}(h^{-1} g) \, dh =$$

$$= \sum_{m=1}^{n_\alpha} \left(\int_G t_{ij}^{\alpha}(h) t_{km}^{\alpha'}(h^{-1}) \, dh \right) t_{ml}^{\alpha'}(g) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n_\alpha} \left(\int_G t_{ij}^{\alpha}(h) \overline{t_{mk}^{\alpha'}(h)} \, dh \right) t_{ml}^{\alpha'}(g) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha', \ j \neq k, \\ n_\alpha^{-1} t_{il}^{\alpha}(g) & \text{si } \alpha = \alpha', \ j = k. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

D'où l'on tire directement l'égalité (3.4.1).

II. *On a les égalités*

$$t_{ij}^{\alpha} * \chi_{\alpha'} = = \begin{cases} 0 & \text{si } T^\alpha \text{ et } T^{\alpha'} \text{ sont non équivalentes,} \\ n_\alpha^{-1} t_{ij}^{\alpha} & \text{si } T^\alpha = T^{\alpha'}. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

La démonstration se déduit immédiatement de l'égalité (3.4.2).

III. *Soient T^α une représentation unitaire continue irréductible d'un groupe G, χ_α son caractère, et I_α l'ensemble des fonctions $f \in L^1(G)$ qui vérifient la condition $f * n_\alpha \chi_\alpha = f$. Alors I_α est un idéal bilatère*

symétrique minimal, de dimension finie (et donc fermé), dans $L^1(G)$, *constitué par des combinaisons linéaires des éléments matriciaux de la représentation* T^α. *L'idéal* I_α *est isomorphe (en tant qu'algèbre symétrique) à l'algèbre de tous les opérateurs linéaires de l'espace de la représentation* T^α.

Démonstration. Il est évident que I_α est un sous-espace linéaire de $L^1(G)$. Soient $f \in I_\alpha$, $\varphi \in L^1(G)$; alors $(\varphi * f) * n_\alpha \chi_\alpha = \varphi * (f * n_\alpha \chi_\alpha) = \varphi * f$; par conséquent $\varphi * f \in I_\alpha$ et I_α est un idéal à gauche de $L^1(G)$. D'autre part, $\chi_\alpha \in Z_1(G)$ (voir III, 3.3), et donc $(f * \varphi) * n_\alpha \chi_\alpha = n_\alpha \chi_\alpha * (f * \varphi) = (n_\alpha \chi_\alpha * f) * \varphi = f * \varphi$. Ainsi I_α est un idéal bilatère de $L^1(G)$. La relation $f = f * n_\alpha \chi_\alpha$ signifie que

$$f(g) = n_\alpha \int f(h)\, \chi_\alpha(h^{-1}g)\, dh = \sum_{i=1}^{n_\alpha} n_\alpha \int f(h)\, t_{ii}^\alpha(h^{-1}g)\, dh =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_\alpha} \sum_{j=1}^{n_\alpha} n_\alpha \left(\int f(h)\, t_{ij}^\alpha(h^{-1})\, dh \right) t_{ji}^\alpha(g), \qquad (3.4.4)$$

i.e. f est une combinaison linéaire des éléments matriciaux de la représentation T^α. Réciproquement, si f est une combinaison linéaire des éléments matriciaux de la représentation T^α, on a $f \in I_\alpha$ en vertu de la proposition II, i.e. I_α s'identifie à l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments matriciaux de la représentation T^α. Puisque $(t_{ij}^\alpha)^*(g) = \overline{t_{ij}^\alpha(g^{-1})} = t_{ji}^\alpha(g)$, l'idéal I_α est symétrique. Pour démontrer que l'idéal I_α est minimal (i.e. qu'il n'existe pas d'idéaux non nuls $I'_\alpha \subset I_\alpha$ de l'algèbre $L^1(G)$ autres que I_α), il faut démontrer que I_α est une algèbre simple.

Soit $f \in I_\alpha$; alors $f = \sum c_{ij} t_{ij}^\alpha$, où les c_{ij} sont des nombres complexes. Faisons correspondre à la fonction f la matrice carrée d'ordre n_α aux éléments matriciaux $(n_\alpha^{-1} c_{ij})$. Il est évident que l'application obtenue est une correspondance bijective et linéaire entre I_α et l'algèbre de toutes les matrices carrées d'ordre n_α. Soit $f_1 = \sum \overset{1}{c}_{ij} t_{ij}^\alpha$, $f_2 = \sum \overset{2}{c}_{ij} t_{ij}^\alpha$; alors on tire de (3.4.2) que

$$f_1 * f_2 = \sum_{i,j,k,l} \overset{1}{c}_{ij} \overset{2}{c}_{kl} (t_{ij}^\alpha * t_{kl}^\alpha) = \sum_{i,j,l} \overset{1}{c}_{ij} \overset{2}{c}_{jl} n_\alpha^{-1} t_{il}^\alpha =$$

$$= \sum_{i,l} \left(n_\alpha^{-1} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \overset{1}{c}_{ij} \overset{2}{c}_{jl} \right) t_{il}^\alpha. \qquad (3.4.5)$$

On déduit de (3.4.5) qu'à la convolution de fonctions de I_α correspond le produit des matrices respectives. Par conséquent, I_α est isomorphe à l'algèbre de toutes les matrices d'ordre n_α (i.e. il est isomorphe à l'algèbre de tous les opérateurs linéaires dans l'espace

de la représentation T^α). Puisque l'algèbre des matrices est simple, nous avons en même temps démontré que I_α est une algèbre simple.

Soient B un espace de Banach, et $\{B_\alpha\}$ une famille de sous-espaces fermés de l'espace B. L'espace B s'appelle *somme directe fermée* de la famille de sous-espaces $\{B_\alpha\}$ si:

1) l'espace B est l'adhérence de l'ensemble de toutes les sommes finies de la forme $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_n}$, $x_{\alpha_k} \in B_{\alpha_k}$, $k = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$;

2) si la suite $x^{(m)} = x^{(m)}_{\alpha_1} + x^{(m)}_{\alpha_2} + \ldots + x^{(m)}_{\alpha_m}$ converge vers zéro dans B pour la norme, et que pour un α donné la suite $x^{(m)}_\alpha$, $m = 1, 2, \ldots$, converge pour la norme, alors $\| x^{(m)}_\alpha \| \to 0$.

IV. a) *Tout idéal bilatère fermé minimal non nul de $L^1(G)$ coïncide avec un des idéaux I_α.*

b) *L'algèbre $L^1(G)$ est la somme directe fermée de ses idéaux bilatères fermés minimaux.*

D é m o n s t r a t i o n. a) Soit I un idéal bilatère fermé minimal non nul de $L^1(G)$. Soit φ un élément non nul de l'idéal I. Lorsque $(\varphi, t^\alpha_{ij}) = 0$ pour tous les α, i, j, on tire de (3.3.13) que $\varphi * \varphi_U = 0$ pour tous les U; comme $\| \varphi * \varphi_U - \varphi \|_{L^1(G)} \to 0$, on a $\varphi = 0$. La contradiction obtenue nous montre que pour un certain α et certains i, j on a $(\varphi, t^\alpha_{ij}) \neq 0$. Alors les égalités

$$(\varphi * t^\alpha_{pq})(g) =$$

$$= \int_G \varphi(h)\, t^\alpha_{pq}(h^{-1} g)\, dh = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \left(\int_G \varphi(h)\, t^\alpha_{pk}(h^{-1})\, dh \right) t^\alpha_{kq}(g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_\alpha} \left(\int_G \varphi(h)\, \overline{t^\alpha_{kp}(h)}\, dh \right) t^\alpha_{kq}(g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} (\varphi, t^\alpha_{kp})\, t^\alpha_{kq}(g) \qquad (3.4.6)$$

impliquent que pour $p = j$ au moins un des coefficients (φ, t^α_{kp}) dans (3.4.6) n'est pas nul, et donc $\varphi * t^\alpha_{jq} \neq 0$ pour tous les q. D'autre part, selon III, $t^\alpha_{jq} \in I_\alpha$, donc la convolution $\varphi * t^\alpha_{jq}$ appartient à l'idéal I et à l'idéal I_α. Puisque $\varphi * t^\alpha_{jq} \neq 0$, on a $I \cap I_\alpha \neq (0)$. Or $I \cap I_\alpha$ est un idéal bilatère fermé non nul contenu dans les idéaux minimaux I et I_α, donc $I \cap I_\alpha = I$ et $I \cap I_\alpha = I_\alpha$, d'où $I = I_\alpha$.

b) Soit $\varphi \in L^1(G)$. D'après (3.3.13), les fonctions de la forme $\varphi * \varphi_U$ sont des limites dans $L^2(G)$ de combinaisons linéaires finies d'éléments matriciaux de la représentation T^α. D'après III, ces éléments matriciaux appartiennent à l'idéal I_α, et il existe donc une suite de sommes finies de la forme $\psi_{\alpha_1} + \ldots + \psi_{\alpha_n}$, $\psi_{\alpha_k} \in I_{\alpha_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, qui converge vers $\varphi * \varphi_U$ dans l'espace $L^2(G)$. D'après (3.1.10) et (3.1.11), cette suite converge vers

$\varphi * \varphi_U$ également dans l'espace $L^1(G)$. Puisque $\varphi * \varphi_U - \varphi \to 0$ dans $L^1(G)$ (V de 3.1), alors $L^1(G)$ est l'adhérence de l'ensemble de toutes les sommes finies de la forme $\psi_{\alpha_1} + \ldots + \psi_{\alpha_n}$, où $\psi_{\alpha_k} \in I_{\alpha_k}$.

Supposons maintenant que la suite $\varphi^{(m)} = \varphi_{\alpha_1}^{(m)} + \ldots + \varphi_{\alpha_m}^{(m)}$ converge dans $L^1(G)$ vers zéro pour la norme, et $\varphi_{\alpha_k}^{(m)} \in I_{\alpha_k}$. Alors $\varphi^{(m)} = \varphi_{\alpha_1}^{(m)} * n_{\alpha_1}\chi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi_{\alpha_m}^{(m)} * n_{\alpha_m}\chi_{\alpha_m}$, par conséquent $\varphi^{(m)} * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi_{\alpha_1}^{(m)} * n_{\alpha_1}n_\alpha(\chi_{\alpha_1} * \chi_\alpha) + \ldots + \varphi_{\alpha_m}^{(m)} * n_{\alpha_m}n_\alpha(\chi_{\alpha_m} * \chi_\alpha)$ pour tous les α. Les relations (3.4.1) impliquent $\chi_{\alpha_k} * \chi_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_k$ et $\chi_{\alpha_k} * \chi_\alpha = n_\alpha\chi_{\alpha_k}$ pour $\alpha = \alpha_k$, donc

$$\varphi^{(m)} * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi_\alpha^{(m)} * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi_\alpha^{(m)} \tag{3.4.7}$$

pour tous les α. Par conséquent

$$\| \varphi_\alpha^{(m)} \| \leqslant n_\alpha \| \varphi^{(m)} \| \, \| \chi_\alpha \|. \tag{3.4.8}$$

On déduit de (3.4.8) et de la condition $\varphi^{(m)} \to 0$ que $\| \varphi_\alpha^{(m)} \| \to 0$ pour tous les α, ce qui termine la démonstration de la proposition IV.

Les résultats fondamentaux de ce chapitre restent valables (avec des modifications appropriées) pour les groupes localement compacts qui ne sont pas compacts; voir, par exemple, M. Naïmark [1], chapitre VI.

CHAPITRE V

REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DES GROUPES CONNEXES RÉSOLUBLES. THÉORÈME DE LIE

§ 1. Groupes topologiques connexes

1.1. Espaces topologiques connexes. Soit X un ensemble. Nous dirons que deux ensembles $M \subset X$ et $N \subset X$ forment une *partition* de l'ensemble X si $M \cup N = X$, $M \cap N = \varnothing$, $M \neq \varnothing$ et $N \neq \varnothing$.

Un espace topologique X est dit *connexe* s'il ne possède pas de partition en ensembles fermés; dans le cas contraire, X est dit *non connexe.*

Un ensemble M d'un espace topologique X est *connexe* si, en tant que sous-espace de X, il est connexe; dans le cas contraire, il est *non connexe.* On appelle parfois *domaine* toute partie de X ouverte et connexe.

REMARQUE. Dans ces définitions, cela revient au même de dire « ouvert » au lieu de « fermé ». En effet, si $X = U_1 \cup U_2$, où les U_1, U_2 sont ouverts et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, alors U_1, U_2 sont également fermés (comme compléments des ensembles ouverts U_2, U_1).

I. *Le segment* $[a, b]$ *est connexe.*

Démonstration. Supposons le contraire; soit $[a, b] = F_1 \cup F_2$, où F_1, F_2 sont fermés, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$. Supposons, pour fixer les idées, que $b \in F_2$; par conséquent, $b \notin F_1$. Posons $x_0 = \sup F_1$. Alors $x_0 \in F_1$ puisque F_1 est fermé, et donc $x_0 \notin F_2$. En outre $x_0 < b$, puisque $b \notin F_1$. Selon l'hypothèse que nous avons faite sur x_0, nous avons $(x_0, b) \subset F_2$. D'où nous tirons $x_0 \in \overline{F}_2 = F_2$, et nous aboutissons à une contradiction, car $x_0 \notin F_2$.

II. *Une image continue d'un ensemble connexe est connexe.*

Démonstration. Supposons que X est connexe et f est une application continue de X sur Y: $Y = f(X)$. Soit $Y = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, où F_1, F_2 sont fermés. Posons $\widetilde{F}_1 = f^{-1}(F_1)$, $\widetilde{F}_2 = f^{-1}(F_2)$. Alors X est la réunion des ensembles $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ fermés (en vertu de la continuité de f), non vides et disjoints, ce qui contredit la connexité de X.

III. *Toute courbe continue est connexe.*

Cette assertion découle immédiatement de I et II car, par définition, une courbe continue est une image continue d'un segment (voir 1.2, chapitre III).

IV. *Si un ensemble $M \subset X$ est dense dans X et connexe, alors X est également connexe.*

Démonstration. Supposons que X est non connexe, de sorte que $X = U_1 \cup U_2$, où U_1, U_2 sont ouverts dans X (voir la remarque à la page 250), $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$ et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Posons $M \cap U_1 = \tilde{U}_1$, $M \cap U_2 = \tilde{U}_2$. Alors $M = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$, $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ sont ouverts dans M, et $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \varnothing$. Démontrons que $\tilde{U}_1 \neq \varnothing$ et $\tilde{U}_2 \neq \varnothing$; nous aboutirons alors à une contradiction avec l'hypothèse de connexité de M.

Supposons par exemple $\tilde{U}_1 = \varnothing$, i.e. $M \cap U_1 = \varnothing$. Puisque U_1 est ouvert, cela signifie qu'aucun des points de U_1 n'est un point d'adhérence de l'ensemble M, i.e. $U_1 = X \cap U_1 = \overline{M} \cap U_1 = \varnothing$; d'autre part, par hypothèse, $U_1 \neq \varnothing$.

V. *Si M est connexe, alors tout ensemble M_1 tel que $M \subset M_1 \subset \overline{M}$ est également connexe*; *en particulier*, *si M est connexe*, *$\overline{M}$ l'est aussi.*

Cette assertion se déduit immédiatement de IV, car M_1 et M sont denses dans $\overline{M}$.

VI. *La réunion d'une famille d'ensembles connexes qui possèdent un point commun est connexe.*

Démonstration. Supposons que $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$, où les M_α sont connexes, α parcout un ensemble quelconque et chaque M_α contient x. Supposons que $M = U_1 \cup U_2$, où U_1, U_2 sont ouverts dans M, $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$ et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Cela signifie qu'il existe des ensembles ouverts V_1, V_2 tels que $U_1 = V_1 \cap M$, $U_2 = V_2 \cap M$ et donc

$$V_1 \cap M \neq \varnothing, \quad V_2 \cap M \neq \varnothing \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 \cap M \neq \varnothing. \qquad (1.1.1)$$

Le point x appartient à un des ensembles V_1, V_2; supposons pour fixer les idées que

$$x \in V_1. \qquad (1.1.2)$$

D'autre part, on déduit de la deuxième des relations (1.1.1), que

$$V_2 \cap M_\alpha \neq \varnothing \quad \text{pour un certain } \alpha. \qquad (1.1.3)$$

Posons $V_1 \cap M_\alpha = W_{1\alpha}$, $V_2 \cap M_\alpha = W_{2\alpha}$; alors $W_{1\alpha}$, $W_{2\alpha}$ sont ouverts dans M_α, $W_{1\alpha} \neq \varnothing$ en vertu de (1.1.2), $W_{2\alpha} \neq \varnothing$ en vertu de (1.1.3) puisque que $M \ni x$, et

$$M_\alpha = M \cap M_\alpha = (U_1 \cap M_\alpha) \cup (U_2 \cap M_\alpha) = \\ = (V_1 \cap M_\alpha) \cup (V_2 \cap M_\alpha) = W_{1\alpha} \cup W_{2\alpha},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de connexité de M_α.

Soit X un espace topologique. La réunion de tous les sous-espaces connexes de X, qui contiennent x, est connexe en vertu de VI; c'est évidemment le plus grand ensemble connexe qui contient x. On l'appelle *composante connexe* du point x et on le désigne par $K(x)$. On appelle *composante connexe* du point $x \in M$ dans l'ensemble $M \subset X$ la composante connexe de x dans M envisagé comme sous-espace de X.

VII. *Toute composante connexe est fermée.*

En effet, $\overline{K(x)}$ est connexe d'après V et contient x. Mais $K(x)$ est le plus grand ensemble connexe contenant x et donc $\overline{K(x)} \subset K(x)$. D'autre part, $K(x) \subset \overline{K(x)}$, de sorte que $K(x) = \overline{K(x)}$.

VIII. *Deux composantes connexes distinctes sont disjointes.*

En effet, si $K(x) \cap K(y) \neq \varnothing$, en vertu de V $K(x) \cup K(y)$ est connexe et contient x. Par définition d'une composante connexe on a $K(x) \supset K(x) \cup K(y)$, mais ceci est possible seulement lorsque $K(y) = K(x)$.

En vertu de VIII, l'espace X est la réunion de ses composantes disjointes deux à deux; X est connexe si et seulement s'il coïncide avec la composante connexe d'un quelconque de ces points, donc s'il est constitué par une seule composante connexe.

IX. *Si chaque couple de points x, $y \in X$ est contenu dans un sous-ensemble connexe $M \subset X$, alors X est connexe.*

En effet, dans ce cas X coïncide avec la composante connexe d'un point quelconque.

X. *Si deux points quelconques x, $y \in X$ peuvent être réunis par une courbe continue dans X, alors X est connexe.*

En effet, dans ce cas X est connexe d'après IX car une courbe continue est connexe (voir III).

XI. *Pour qu'un espace X soit non connexe il faut et il suffit qu'il existe une application continue de X sur un espace discret qui contient plus d'un point.*

D é m o n s t r a t i o n. La suffisance découle immédiatement de la proposition II, car un espace discret qui contient plus d'un point n'est pas connexe. Réciproquement, supposons que X est non connexe, et soit $X = F_1 \cup F_2$, où F_1, F_2 sont fermés, $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Soit $Y = \{a, b\}$ un espace discret constitué par deux points, de sorte que tous les sous-ensembles de Y sont fermés. En posant $f(F_1) = \{a\}$, $f(F_2) = \{b\}$, nous obtenons une application continue f de X sur Y.

XII. *Le produit topologique $X_1 \times \ldots \times X_n$ d'espaces $X_1, \ldots, X_n$ est connexe si et seulement si chacun des espaces $X_1, \ldots, X_n$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que les $X_1, \ldots, X_n$ sont connexes, tandis que $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ ne l'est pas. Alors, en vertu de XI, il existe une application continue f de l'espace X sur un espace discret Y constitué d'au moins deux points. Soit $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in X$. Considérons pour un j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ donné l'application $f_j : X_j \to Y$ de l'espace X_j dans Y définie par la formule

$$f_j(x_j) = f(x'_1 \times \ldots \times x'_n),$$

où

$$x'_j = x_j \text{ et } x'_k = a_k \text{ pour } k \neq j.$$

Cette application est continue; elle est donc constante en vertu de XI. Ainsi

$$f(a_1 \times \ldots \times a_{j-1} \times x_j \times a_{j+1} \times \ldots \times a_n) = f(a_1 \times \ldots \times a_j \times \ldots \times a_n). \quad (1.1.4)$$

En particulier,

$$f(x_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n). \quad (1.1.5)$$

En appliquant ensuite (1.1.4) à $j = 2$ et $a = x_1 \times a_3 \times \ldots \times a_n$ nous obtenons que $f(x_1 \times x_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n) = f(x_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)$ et donc (voir (1.1.5))

$$f(x_1 \times x_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n) = f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n).$$

En répétant ces raisonnements, nous arrivons à $f(x_1 \times \ldots \times x_n) = f(a_1 \times \ldots \times a_n)$, i.e. f applique X en un seul point, tandis que, par hypothèse, f appliquait X sur Y et ce dernier espace contenait plus d'un point.

Réciproquement, si X est connexe, alors chaque X_j est connexe comme image continue de X par l'application continue $x_1 \times \ldots \times x_n \to x_j$ (voir II).

Exemples

1. L'espace $\mathbf{R}^1$ est connexe; en effet, chaque couple de ses points a, b $(a < b)$ est contenu dans le segment $[a, b]$, qui est connexe en vertu de I (voir IX).

2. L'espace $\mathbf{R}^n$ est connexe comme produit topologique de n copies de l'espace connexe $\mathbf{R}^1$. Par ailleurs, la connexité de $\mathbf{R}^n$ découle également du fait que deux quelconques de ses points $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ peuvent être joints par un segment (voir IX):

$$x_j = (1 - t)\, a_j + t b_j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

3. L'espace $\mathbf{C}^1$ est connexe comme produit topologique $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$.

4. L'espace $\mathbf{C}^n$ est connexe comme produit topologique de n copies de l'espace $\mathbf{C}^1$. Notons qu'on peut établir la connexité de $\mathbf{C}^n$ en répétant le raisonnement à la fin de l'exemple 2.

5. L'ensemble $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, où $\varphi_0 \leqslant 2\pi$ (un segment de cercle de rayon 1, ou bien tout le cercle) est connexe comme image du segment $[0, \varphi_0]$ par l'application continue $\varphi \to e^{i\varphi}$ (voir I et II; voir également III).

6. L'ensemble $M_1 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ (l'intérieur du disque de rayon 1) et $M_2 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ (l'extérieur de ce disque) sont connexes dans $\mathbf{R}^2$. En effet, deux points quelconques de M_1 peuvent être joints par un segment de droite entièrement situé dans M_1, tandis que deux points a, b de M_2 peuvent être joints par un arc de cercle de centre au point $(a + b)/2$ situé entièrement dans M_2. L'ensemble $M_0 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ (le plan dont le point (0, 0) a été éliminé) est connexe dans $\mathbf{R}^2$; on démontre sa connexité de même que celle de M_2.

7. L'ensemble $M = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$ dans $\mathbf{R}^2$ est non connexe. Il est évident que $M = M_1 \cup M_2$ (voir l'exemple 6), et M_1, M_2 sont les composantes connexes de l'ensemble M.

8. L'ensemble M de tous les nombres rationnels, envisagé comme sous-espace de $\mathbf{R}^1$, est non connexe (démontrer!).

1.2. Sous-ensembles connexes d'un groupe topologique, groupes topologiques connexes. Un sous-ensemble S d'un groupe topologique G est dit *connexe* si S est un sous-ensemble connexe de l'espace topologique G.

I. *Si S est un sous-ensemble connexe du groupe topologique G, alors l'ensemble S^{-1}, ainsi que les ensembles g_0S, Sg_0, $g_0^{-1}Sg_0$, pour chaque $g_0 \in G$, sont connexes.*

En effet, S^{-1}, g_0S, Sg_0, $g_0^{-1}Sg_0$ sont connexes en tant qu'images continues de l'ensemble connexe S par les applications $g \to g^{-1}$, $g \to g_0g$, $g \to gg_0$, $g \to g_0^{-1}gg_0$ respectivement (II, 1.1).

II. *Si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des sous-ensembles connexes d'un groupe topologique G, alors l'ensemble $S_1S_2 \ldots S_n$ est connexe; en particulier, si S est connexe, S^n l'est aussi (pour tous les $n = 1, 2, \ldots$).*

D é m o n s t r a t i o n. La correspondance $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \to g_1g_2 \ldots g_n$ est une application continue du produit topologique $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ sur $S_1S_2 \ldots S_n$. Remarquant que $S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$ est connexe (XII, 1.1), son image continue $S_1S_2 \ldots S_n$ l'est également (II, 1.1). En particulier, pour $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$ nous obtenons que S^n est connexe lorsque S est connexe.

Un groupe topologique G est *connexe* si l'espace topologique G est connexe. Dans le cas contraire, le groupe G est appelé *non connexe*; en vertu de VIII, 1.1, G est alors réunion des composantes connexes disjointes que l'on peut décrire de la manière suivante.

III. *La composante connexe K de l'élément neutre d'un groupe topologique G est un sous-groupe distingué fermé du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $g \in K$, alors $g^{-1} K$ est connexe et contient $g^{-1}g = e$; par conséquent, $g^{-1}K \subset K$ pour chaque $g \in K$. Cela signifie que K est un sous-groupe du groupe G, fermé en vertu de III, 1.1. En outre, l'application $g \to g_0^{-1}gg_0$ est un homéomorphisme de G sur G qui envoie e dans $g_0^{-1}gg_0 = e$. Par conséquent, $g_0^{-1}Kg_0$ est un ensemble connexe contenant e et donc $g_0^{-1}Kg \subset K$ pour chaque $g_0 \in G$. Cela signifie que K est un sous-groupe distingué du groupe G.

IV. *La composante connexe de chaque élément* $g_0 \in G$ *est de la forme* $g_0K = Kg_0$.

Cette assertion se déduit immédiatement du fait que l'application $g \to g_0g$ est un homéomorphisme de G sur G qui applique e sur g_0.

V. *Si G est un groupe topologique connexe et V un voisinage de l'élément neutre de G, alors* $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Il est évident que $M \neq \varnothing$ et, étant la réunion d'ouverts V^n, il est ouvert. D'autre part, $\bar{M} \subset MV = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^nV \subset M$. D'où l'on tire $\bar{M} = M$, i.e. M est fermé. Si $M \neq G$, alors M et $G \setminus M$ forment une partition de l'espace G en ensembles disjoints fermés non vides, ce qui contredit la connexité de G; par conséquent $M = G$.

VI. *Si G est un groupe topologique connexe et N un sous-groupe distingué discret de G, N est contenu dans le centre du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit n un élément de N. Envisageons l'application φ du groupe G dans N définie par la formule $\varphi(g) = gng^{-1}$. Comme φ est continue et le groupe G connexe, l'ensemble $\varphi(G)$ est connexe. D'autre part, $\varphi(G) \subset N$, donc $\varphi(G)$ est discret. Par conséquent, $\varphi(G)$ est constitué par un seul élément. Puisque $\varphi(e) = n$, on a $\varphi(g) = n$ pour tous les $g \in G$. Ainsi, $gng^{-1} = n$, $gn = ng$ pour tous les $n \in N$, $g \in G$, i.e. N est contenu dans le centre du groupe G.

EXEMPLES

1. Les groupes $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ sont connexes puisque les espaces topologiques $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ le sont (voir les exemples 1 à 4, 1.1).
2. Le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_0$ est non connexe; ses composantes connexes sont $\mathbf{R}_0^+$ (la composante contenant 1) et $\mathbf{R}_0^-$ l'ensemble de tous les nombres réels négatifs (la composante contenant —1).
3. Le groupe multiplicatif $\mathbf{C}_0$ est connexe (voir l'exemple 5, 1.1).

4. Le groupe K_n. Désignons par K_n l'ensemble de toutes les matrices complexes de la forme

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{Vmatrix},$$

où tous les k_{jj} sont non nuls. On vérifie immédiatement que K_n est un groupe relativement à la multiplication usuelle des matrices, de sorte que K_n est un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Nous supposerons que K_n est muni de la topologie induite par celle du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

VII. *K_n est un sous-groupe fermé du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.*

En effet, K_n est l'ensemble des seules matrices $g \in GL(n, \mathbf{C})$ qui vérifient les conditions

$$g_{jl} = 0 \text{ pour } j < l;$$

les g_{jk} étant des fonctions continues sur $GL(n, \mathbf{C})$, notre assertion découle directement de I, 1.8, chapitre III.

VIII. *Le groupe K_n est connexe.*

En effet, les paramètres k_{jl}, $l < j$, des éléments du groupe K_n parcourent indépendamment l'un de l'autre l'ensemble $\mathbf{C}^1$, tandis que les k_{jj} parcourent $\mathbf{C}^1_0$ indépendamment l'un de l'autre et des k_{jl}, $l < j$. D'où l'on tire, en comparant les topologies, que l'espace topologique K_n est homéomorphe au produit topologique de $n(n-1)/2$ copies de l'espace $\mathbf{C}^1$ et de n copies de l'espace $\mathbf{C}^1_0$. Puisque $\mathbf{C}^1$ et $\mathbf{C}^1_0$ sont connexes, K_n le sera aussi d'après XII, 1.1.

5. Le groupe D_n. Désignons par D_n l'ensemble de toutes les matrices diagonales

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

qui vérifient la condition $\det \delta = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n \neq 0$. Il est évident que D_n est un sous-groupe fermé du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Nous supposons que D_n est muni de la topologie induite par celle du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

IX. *Le groupe D_n est connexe.*

En effet, l'espace topologique D_n est homéomorphe au produit topologique de n copies de l'espace $\mathbf{C}^1_0$. Puisque $\mathbf{C}^1_0$ est connexe, notre assertion découle de XII, 1.1.

6. L e g r o u p e $U(n)$. Nous nous servirons du lemme simple suivant.

Lemme 1. *Chaque matrice $u \in U(n)$ peut être représentée sous la forme $u = e^{ih}$, où h est hermitienne. Réciproquement, chaque matrice e^{ih}, où h est hermitienne, est une matrice unitaire.*

D é m o n s t r a t i o n. *Chaque matrice* $u \in U(n)$ peut être ramenée à la forme diagonale par une transformation unitaire, i.e.

$$u = v \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{Vmatrix} v^{-1},$$

où $v \in U(n)$, et les $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont réels. Posons

$$h = v \begin{Vmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{Vmatrix} v^{-1}.$$

Alors h est hermitienne et, évidemment, $u = e^{ih}$. Réciproquement, si $u = e^{ih}$, où h est hermitienne, on a $u^* = e^{-ih}$ et $u^*u = uu^* = e$.

X. *Le groupe $U(n)$ est connexe.*

Soient $u_1 = e^{ih_1}$, $u_2 = e^{ih_2}$, où les matrices h_1, h_2 sont hermitiennes. Posons $h = th_1 + (1 - t) h_2$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u(t) = e^{ih} = e^{ith_1 + i(1-t)h_2}$. Alors $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, est une courbe continue dans $U(n)$ qui joint u_1 à u_2. Ainsi deux points quelconques de $U(n)$ peuvent être joints par une courbe continue dans $U(n)$; par conséquent, $U(n)$ est connexe. En particulier, $U(1)$ est connexe; ceci est d'ailleurs évident car l'espace topologique sous-jacent au groupe $U(1)$ est homéomorphe au cercle. Les groupes Γ, $\mathcal{T}^1$ et $SO(2, \mathbf{R})$ sont topologiquement isomorphes à $U(1)$ et sont donc connexes.

7. L e g r o u p e $SU(n)$.

XI. *Le groupe $SU(n)$ est connexe.*

En effet, le produit topologique direct $SU(n) \times U(1)$ est homéomorphe (voir V, 1.2, chapitre IV) au groupe connexe $U(n)$ (voir X); il est donc connexe. En vertu de XII, 1.1, on en tire que $SU(n)$ est connexe.

8. L e g r o u p e $SO(3, \mathbf{R})$. Désignons par I le produit topologique $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$; il est connexe en tant que produit topologique d'ensembles connexes (à savoir de segments, cf. I et XII, 1.1). D'autre part, $SO(3, \mathbf{R})$ est une image continue de l'espace I; ceci découle immédiatement de la formule (1.2.20) du chapitre IV. Par conséquent:

XII. *Le groupe* $SO(3, \mathbf{R})$ *est connexe.*

9. Le groupe $O(3, \mathbf{R})$. La fonction $f(g) = \det g$ étant continue sur $GL(n, \mathbf{C})$, sa restriction à $O(3, \mathbf{R})$ est également une fonction continue. Mais sur $O(3, \mathbf{R})$ la fonction $\det g$ prend seulement deux valeurs $\det g = 1$ et $\det g = -1$; par conséquent,

XIII. *Le groupe* $O(3, \mathbf{R})$ *est non connexe.*

Le groupe $SO(3, \mathbf{R})$ est connexe; il est contenu dans $O(3, \mathbf{R})$. Si $\det g = -1$ et $\det g_0 = -1$, alors $\det g_0^{-1}g = 1$ et donc $g_0^{-1}g \in SO(3, \mathbf{R})$. Par conséquent

$$\{g: \det g = -1\} = g_0 SO(3, \mathbf{R}).$$

D'où l'on tire:

XIV. *Le groupe* $O(3, \mathbf{R})$ *est réunion de deux ensembles connexes* $SO(3, \mathbf{R})$ *et* $g_0 SO(3, \mathbf{R})$, *où* g_0 *est un élément quelconque pour lequel* $\det g_0 = -1$; *par conséquent* $SO(3, \mathbf{R})$ *est la composante connexe de l'élément neutre du groupe* $O(3, \mathbf{R})$.

Exercice. Etudier la connexité des groupes $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $O(n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$.

10. Le groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Démontrons préalablement le lemme suivant:

Lemme 2. *Chaque matrice* $g \in GL(n, \mathbf{C})$ *peut être représentée sous la forme*

$$g = ku, \text{ où } k \in K_n, \quad u \in U(n). \tag{1.2.1}$$

Démonstration. Envisageons les lignes de la matrice g comme des vecteurs de $\mathbf{C}^n$. Puisque $\det g \neq 0$, ces vecteurs sont linéairement indépendants. Appliquons le procédé d'orthogonalisation: multiplions $\{g_{11}, \ldots, g_{1n}\}$ par un facteur k_{11} tel que le vecteur obtenu, que nous désignerons par $\{u_{11}, \ldots, u_{1n}\}$, soit normé. Prenons ensuite la combinaison linéaire des vecteurs $\{g_{11}, \ldots, g_{1n}\}$ et $\{g_{21}, \ldots, g_{2n}\}$ avec des coefficients k_{21}, k_{22} tels que le vecteur obtenu, désignons-le par $\{u_{21}, \ldots, u_{2n}\}$, soit normé et orthogonal à $\{u_{11}, \ldots, u_{1n}\}$. En répétant ce raisonnement, nous obtiendrons

$$kg = u, \tag{1.2.2}$$

où $k \in K_n$, tandis que les lignes de la matrice u sont normées et orthogonales deux à deux; par conséquent, $u \in U(n)$. Mais l'on déduit de (1.2.2) que $g = k^{-1}u$, où $k^{-1} \in K_n$, $u \in U(n)$, mais c'est justement une décomposition de la forme (1.2.1).

La décomposition (1.2.1) s'appelle *décomposition de Cramer.*

XV. *Le groupe* $GL(n, \mathbf{C})$ *est connexe.*

En effet, d'après le lemme 2, $GL(n, \mathbf{C}) = K_n U(n)$, et notre assertion découle de II, puisque K_n et $U(n)$ sont connexes.

11. Le groupe $SL(n, \mathbf{C})$.

XVI. *Le groupe $SL(n, C)$ est connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Le groupe $GL(n, C)$ est homéomorphe au produit direct $GL(1, C) \times SL(n, C) = C_0^1 \times SL(n, C)$ (cette assertion se démontre de même que V de 1.2, chapitre IV). Puisque $GL(n, C)$ est connexe, notre assertion se déduit immédiatement de XII, 1,1.

§ 2. Groupes résolubles et nilpotents

2.1. Commutateur algébrique. Soit G un groupe. On appelle *commutateur* des éléments $g_1, g_2 \in G$ le produit $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$; si $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = e$, alors évidemment $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

On appelle *commutateur algébrique* $K_a(S_1, S_2)$ de deux ensembles $S_1, S_2 \subset G$ le sous-groupe algébrique minimal du groupe G engendré par tous les commutateurs de la forme $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $g_1 \in S_1$, $g_2 \in S_2$. En particulier, $K_a(G, G)$ s'appelle *commutateur algébrique du groupe* G; on le note G_a'.

I. *Le commutateur algébrique G_a' d'un groupe G est son sous-groupe distingué; le groupe quotient G/G_a' est commutatif.*

D é m o n s t r a t i o n. Chaque élément $h \in G_a'$ est de la forme: $h = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_{2n-1} g_{2n} g_{2n-1}^{-1} g_{2n}^{-1}$. D'où l'on tire pour chaque $g \in G$:

$$g^{-1}hg = (g^{-1}g_1 g)(g^{-1}g_2 g)(g^{-1}g_1 g)^{-1}(g^{-1}g_2 g)^{-1} \ldots$$
$$\ldots (g^{-1}g_{2n-1}g)(g^{-1}g_{2n}g)(g^{-1}g_{2n-1}g)^{-1}(g^{-1}g_{2n}g)^{-1} \in G_a';$$

par conséquent, G_a' est un sous-groupe distingué du groupe G. Supposons en outre que $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in G/G_a'$, et soient g_1, g_2 des représentants des classes $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ respectivement. Alors la classe $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_1^{-1} \tilde{g}_2^{-1}$ contient $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G_a'$ et coïncide donc avec $G_a' = \tilde{e}$, où $\tilde{e}$ est l'élément neutre de G/G_a'. Cela signifie que $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 = \tilde{g}_2 \tilde{g}_1$.

2.2. Groupes algébriquement résolubles et groupes algébriquement nilpotents. Pour un groupe donné G construisons deux suites:

$$G_a^{(1)} = G_a', \quad G_a^{(2)} = (G_a^{(1)})_a', \ \ldots, \ G_a^{(n)} = (G_a^{(n-1)})_a', \ \ldots \tag{2.2.1}$$

$$G_a^{[1]} = K_a(G, G) = G_a', \quad G_a^{[2]} = K_a(G, G_a^{[1]}), \ \ldots, \ G_a^{[n]} = K_a(G, G_a^{[n-1]}), \ \ldots \tag{2.2.2}$$

Le groupe $G_a^{(n)}$ est appelé *dérivée algébrique n-ème* du groupe G. Il est évident que

$$G_a^{[n]} \supset G_a^{(n)}. \tag{2.2.3}$$

Le groupe G est dit *algébriquement résoluble* si pour un certain n on a

$$G_a^{(n)} = \{e\}, \tag{2.2.4}$$

et le nombre minimal n pour lequel on a (2.2.4) s'appelle *rang* du groupe résoluble G. Pour $n = 1$ le groupe G est commutatif, de sorte que les groupes résolubles sont des généralisations naturelles des groupes commutatifs, et le rang d'un groupe résoluble caractérise son degré de non-commutativité.

Le groupe G est dit *algébriquement nilpotent* si pour un certain n on a

$$G_a^{[n]} = \{e\}. \tag{2.2.5}$$

I. *Chaque groupe algébriquement nilpotent est algébriquement résoluble.*

En effet, si G est algébriquement nilpotent, on a pour un certain n, en vertu de (2.2.3) et (2.2.5),

$$G_a^{(n)} \subset G_a^{[n]} = \{e\},$$

par conséquent, $G_a^{(n)} = \{e\}$. Si G est algébriquement résoluble, alors il est évident que chacun des groupes $G_a^{(k)}$ l'est également, et si G est algébriquement nilpotent, alors chacun des groupes $G_a^{[k]}$ est algébriquement nilpotent.

II. *Chaque sous-groupe H d'un groupe G algébriquement résoluble (nilpotent) est algébriquement résoluble (nilpotent).*

Cette assertion découle des relations évidentes

$$H^{(n)} \subset G^{(n)}, \quad H^{[n]} \subset G^{[n]}$$

(voir la démonstration de la proposition I).

2.3. Commutateur d'un groupe topologique. Soit G un groupe topologique. On appelle *commutateur* $K(S_1, S_2)$ de deux ensembles $S_1, S_2 \subset G$ le sous-groupe fermé minimal du groupe G qui contient tous les commutateurs

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, \quad g_1 \in S_1, \quad g_2 \in S_2.$$

De cette définition et de 2.1 on tire immédiatement que

$$K(S_1, S_2) = \overline{K_a(S_1, S_2)} \supset K_a(S_1, S_2). \tag{2.3.1}$$

En particulier, le commutateur $K(G, G)$ s'appelle *commutateur du groupe G*; on le désigne par G'; dans ce cas (2.3.1) s'écrit sous la forme

$$G' = \overline{G'_a} \supset G'_a. \tag{2.3.2}$$

I. *Le commutateur G' d'un groupe G est un sous-groupe distingué fermé de G, et le groupe quotient G/G' est commutatif.*

Démonstration. En vertu de (2.3.2), G' est l'adhérence du sous-groupe distingué et donc c'est un sous-groupe distingué

fermé du groupe G. La démonstration de la commutativité du groupe G/G' est la même que celle du groupe G/G'_a dans I, 2.1.

II. *Soient S_1, S_2 deux sous-ensembles connexes d'un groupe topologique G ayant un élément commun, alors*: 1) *$K_a(S_1, S_2)$ est connexe*; 2) *$K(S_1, S_2)$ est connexe.*

Démonstration. Posons

$$S_{12}=\{g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1},\ g_1\in S_1,\ g_2\in S_2\}, \tag{2.3.3}$$

$$S_{21}=\{g_2g_1g_2^{-1}g_1^{-1},\ g_1\in S_1,\ g_2\in S_2\}, \tag{2.3.4}$$

$$S=S_{12}\cup S_{21}. \tag{2.3.5}$$

Evidemment

$$S_{21}=S_{12}^{-1} \text{ et } S_{12}=S_{21}^{-1}. \tag{2.3.6}$$

La correspondance $\{g_1, g_2\}\to g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ est une application continue de l'espace $S_1\times S_2$ sur S_{12}; par conséquent, S_{12} est une image continue de l'espace connexe $S_1\times S_2$ (voir XII, 1.1) et donc S_{12} est connexe. On démontre de même que S_{21} est connexe.

Soit g_0 un élément commun quelconque de S_1 et S_2; alors S_{12} et S_{21} contiennent e (voir (2.3.3) et (2.3.4) pour $g_1=g_2=g_0$); donc $S=S_{12}\cup S_{21}$ est connexe (VI, 1.1). Mais en vertu de I, 1.2, chapitre I

$$K_a(S_1, S_2)=\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n, \tag{2.3.7}$$

où chaque S^n est connexe (II, 1.2) et $S=S^1\subset S^2\subset\ldots$ Donc

$$S^n\cap S^m\supset S\neq\varnothing \tag{2.3.8}$$

et la réunion $K_a(S_1, S_2)$ de tous les S^n est connexe en vertu de (2.3.8) et de VI, 1.1. Mais alors $K(S_1, S_2)$ est également connexe en tant que l'adhérence $\overline{K_a(S_1, S_2)}$ de l'ensemble connexe $K_a(S_1, S_2)$ (voir (2.3.1) et V, 1.1).

2.4. Groupes topologiques résolubles et groupes topologiques nilpotents. Pour un groupe topologique donné G, construisons deux suites

$$G^{(1)}=G',\ G^{(2)}=(G^{(1)})',\ \ldots,\ G^{(n)}=(G^{(n-1)})',\ \ldots \tag{2.4.1}$$

$$G^{[1]}=K(G, G)=G',\ G^{[2]}=K(G, G^{[1]}),\ \ldots,\ G^{[n]}=K(G, G^{[n-1]}),\ \ldots \tag{2.4.2}$$

Le groupe $G^{(n)}$ s'appelle *dérivée n-ème du groupe G*. On a évidemment

$$G^{[n]}\supset G^{(n)}, \tag{2.4.3}$$

et

$$G^{[n]} \supset G_a^{[n]}, \quad G^{(n)} \supset G_a^{(n)}, \tag{2.4.4}$$

(voir (2.3.1)).

Un groupe topologique G est dit *résoluble* si pour un certain n on a

$$G^{(n)} = \{e\}, \tag{2.4.5}$$

et le nombre minimal n pour lequel (2.4.5) est vérifié s'appelle *rang* du groupe résoluble G. Un groupe topologique G est dit *semi-simple* s'il ne contient aucun sous-groupe distingué résoluble connexe fermé, autre que $\{e\}$; G est dit *simple* s'il ne contient aucun sous-groupe distingué fermé différent de G et de $\{e\}$. Un groupe topologique G est dit *nilpotent* si pour un certain n on a

$$G^{[n]} = \{e\}. \tag{2.4.6}$$

I. *Chaque groupe topologique nilpotent est résoluble.*

II. *Chaque groupe topologique résoluble (nilpotent) est également algébriquement résoluble (algébriquement nilpotent).*

III. *Tout sous-groupe résoluble (nilpotent) d'un groupe topologique est résoluble (nilpotent).*

La démonstration de ces propositions est analogue à celle de la proposition I (voir également II) de 2.2; cf. (2.4.4).

Exercices. Démontrer que :

1. *Le groupe quotient d'un groupe résoluble par chacun de ses sous-groupes distingués fermés est résoluble.*

I n d i c a t i o n. Démontrer que l'homomorphisme canonique φ : $G \to \overline{G} = G/H$ applique chaque dérivée $G_a^{(k)}$ (resp. $G^{(k)}$) dans $\overline{G}_a^{(k)}$ (resp. $\overline{G}^{(k)}$).

2. *Si H est un sous-groupe distingué fermé (algébriquement) résoluble d'un groupe G et si le groupe quotient G/H est résoluble, alors G est également résoluble.*

I n d i c a t i o n. Soit k le rang du groupe G/H ; démontrer que $G^{(k)} \subset H$.

3. *Le groupe G est résoluble si et seulement si on peut trouver :*

a) *un sous-groupe distingué commutatif fermé H_0 dans G,*

b) *un sous-groupe distingué commutatif fermé H_1 dans $G_1 = G/H_0$,*

c) *un sous-groupe distingué commutatif fermé H_2 dans $G_2 = G_1/H_1$ etc., et qu'après un nombre fini (m) d'étapes, on ait $G_m = \{e\}$.*

I n d i c a t i o n. Soit k le rang du groupe G. Poser $H_0 = G^{(k-1)}$ et procéder par récurrence sur k, en se servant des propositions des exercices 1 et 2.

4. *Le groupe K_n est résoluble.*

I n d i c a t i o n. Poser

$$H_0=\left\{h_0,\ h_0=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \ldots 0 & 0\\ 0 & 1 & \ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0\\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots k_{n,n-1} & k_{1,n}\end{Vmatrix}\right\},$$

$$H_1=\left\{h_1,\ h_1=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \ldots 0 & 0\\ 0 & 1 & \ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0\\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \ldots k_{n-1,n-2} & k_{n-1,n-1}\end{Vmatrix}\right\}$$

etc., et appliquer l'assertion de l'exercice 3.

5. *Le groupe quotient d'un groupe nilpotent par chacun de ses sous-groupes distingués fermés est nilpotent.*

6. *Si H est le centre du groupe G, et G/H est nilpotent, alors G est nilpotent.*

7. *Un groupe G est nilpotent si et seulement si : G possède un centre non trivial H_0, $G_1 = G/H_0$ possède un centre non trivial H_1, $G_2 = G_1/H_1$ possède un centre non trivial H_2, etc., et après un nombre fini (m) d'étapes, on a $G_m = \{e\}$.*

8. *Toutes les matrices z de la forme*

$$z=\begin{Vmatrix}1 & z_{12} & \ldots & z_{1n}\\ 0 & 1 & \ldots & z_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{Vmatrix}$$

constituent un groupe nilpotent.

9. *Le groupe K_n n'est pas nilpotent* (mais il est résoluble, voir l'exercice 4).

10. *La dérivée d'un groupe résoluble est nilpotente.*

11. *Démontrer les assertions analogues à celles des exercices* 1 *à* 9 *pour les groupes algébriques.*

I n d i c a t i o n. Envisager les groupes algébriques comme les groupes topologiques munis de la topologie discrète.

§ 3. Théorème de Lie

3.1. Théorèmes fondamentaux sur les représentations des groupes résolubles connexes.

THÉORÈME 1 (théorème de Lie). *Chaque représentation irréductible de dimension finie $T: g \to T(g)$ d'un groupe algébriquement résoluble G est unidimensionnelle.*

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons l'assertion du théorème par récurrence sur le rang du groupe. Si G est de rang 1, alors G est commutatif (voir I, 2.1) et l'assertion découle du lemme de S c h u r (voir le corollaire dans 2.2, chapitre I). Supposons que l'assertion du théorème a déjà été démontrée pour les groupes algébriquement résolubles de rang $\leqslant n-1$; démontrons cette assertion pour le groupe de rang n. Posons $H = G'_a$. Alors H est connexe (II, 2.3) et algébriquement résoluble de rang $< n$. Soit $T: g \to T(g)$ une représentation irréductible de dimension finie du groupe G dans l'espace X, et soit $h \to T(h)$ la restriction de la représentation T au groupe H. En vertu de I, 2.1, chapitre I, il existe dans X un sous-espace X_1 sur lequel $h \to T(h)$ est irréductible. Mais alors, en vertu de l'hypothèse de récurrence, X_1 est unidimensionnel. Soit $x_1 \in X_1$, $x_1 \neq 0$. Alors $T(h)\, x_1 \in X_1$, i.e.

$$T(h)\, x_1 = \lambda_1(h)\, x_1, \qquad h \in H, \tag{3.1.1}$$

où $\lambda_1(h)$ est une fonction numérique sur H, continue sur H par suite de la continuité de T. Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ toutes les fonctions distinctes sur H qui vérifient la condition

$$T(h)\, x_j = \lambda_j(h)\, x_j, \qquad h \in H, \ j = 1, \ldots, r, \tag{3.1.2}$$

pour un certain $x_j \neq 0$, $x_j \in X$. Puisque $\dim X < \infty$, il n'y a qu'un nombre fini de tels x_j et donc de tels λ_j; posons $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ et munissons Λ de la topologie discrète. Désignons par Y_1 l'ensemble de tous les $y \in Y$ qui vérifient la condition

$$T(h)\, y = \lambda_1(h)\, y, \qquad h \in H; \tag{3.1.3}$$

en vertu de (3.1.1), Y_1 est un sous-espace de X, différant de (0). Notons maintenant que $g^{-1}hg \in H$, quels que soient $g \in G$, $h \in H$, car H est un sous-groupe distingué de G (I, 2.1); par conséquent, (3.1.3) est appliquable à $g^{-1}hg$:

$$T(g^{-1}hg)\, y = \lambda_1(g^{-1}hg)\, y, \qquad h \in H, \quad y \in Y_1, \tag{3.1.4}$$

i.e.

$$T(g)^{-1}\, T(h)\, T(g)\, y = \lambda_1(g^{-1}hg)\, y, \tag{3.1.5}$$

$$T(h)\, T(g)\, y = \lambda_{1g}(h)\, T(g)\, y, \qquad y \in Y_1,$$

où l'on a désigné

$$\lambda_{1g}(h) = \lambda_1(g^{-1}hg). \tag{3.1.6}$$

On déduit de (3.1.5) que $\lambda_{1g}(h) \in \Lambda$. Mais la fonction $g \to \lambda_{1g}(h) = \lambda_1(g^{-1}hg)$ est continue sur G; par conséquent $h \to \lambda_{1g}(h)$ est une application continue du groupe G dans Λ. En effet, l'image inverse d'un point, et donc de tout sous-ensemble de Λ, est fermée dans G. Vu que G est connexe et Λ est discret, l'image du groupe G par l'application $g \to \lambda_{1g}(h)$ sera un point unique (XI, 1.1), i.e. $\lambda_{1g}(h)$ ne dépend pas de g. D'où l'on obtient $\lambda_{1g}(h) = \lambda_{1e}(h) = \lambda_1(h)$

et la deuxième des égalités (3.1.5) se met sous la forme

$$T(h)\,T(g)\,y = \lambda_1(h)\,T(g)\,y, \quad y \in Y_1, \quad g \in G, \quad h \in H. \quad (3.1.7)$$

Mais (3.1.7) signifie que Y est invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$. Puisque $Y_1 \neq (0)$, tandis que T est irréductible, on a $Y_1 = X$, de sorte que (voir (3.1.3))

$$T(h)\,x = \lambda_1(h)\,x \quad \text{pour} \quad x \in X. \quad (3.1.8)$$

D'où l'on tire

$$\det T(h) = (\lambda_1(h))^m, \quad \text{où} \quad m = \dim X. \quad (3.1.9)$$

D'autre part, pour $h = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$,

$$\det T(h) = \det (T(g_1)\,T(g_2)\,T(g_1^{-1})\,T(g_2^{-1})) = 1$$

et en vertu de (2.3.7)

$$\det T(h) = 1 \quad \text{pour tous les} \quad h \in H. \quad (3.1.10)$$

En comparant (3.1.9) et (3.1.10), nous voyons que $(\lambda_1(h))^m = 1$, de sorte que les valeurs possibles de la fonction $\lambda_1(h)$ sont les éléments de l'ensemble $\varepsilon = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}\}$. D'où, en se servant à nouveau de la continuité de la fonction $h \to \lambda_1(h)$, $h \in H$, de la connexité du groupe H et du fait que l'ensemble ε est discret, on déduit que $\lambda_1(h)$ ne dépend pas de h, de sorte que $\lambda_1(h) = \lambda_1(e) = 1$ (voir (3.1.1)). D'où l'on tire, à l'aide de (3.1.8) que $T(h) = 1$. En particulier, pour $h = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ on obtient

$$T(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = 1, \quad T(g_1)\,T(g_2)\,T(g_1)^{-1} T(g_2)^{-1} = 1.$$

Par conséquent,

$$T(g_1)\,T(g_2) = T(g_2)\,T(g_1),$$

i.e. tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$, sont permutables entre eux. Mais alors on déduit de l'irréductibilité de la représentation $g \to T(g)$, $g \in G$, et du lemme de S c h u r que X est unidimensionnel (voir le corollaire dans 2.2, chapitre I), et le théorème est démontré.

THÉORÈME 2. *Si T: $g \to T(g)$ est une représentation de dimension finie d'un groupe connexe algébriquement résoluble G, alors l'espace X de cette représentation contient un vecteur $x_0 \neq 0$ qui est un vecteur propre commun à tous les opérateurs $T(g)$.*

D é m o n s t r a t i o n. L'espace X contient un sous-espace $X_1 \neq (0)$ invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$, $g \in G$. La représentation $T|_{X_1}$ est irréductible sur X_1 (voir I, 2.1. chapitre II). En vertu du théorème 1, X_1 est unidimensionnel. Supposons que $x_0 \neq 0$ est un vecteur de X. Alors $T(g)\,x_0 \in X$, i.e.

$$T(g)\,x_0 = \lambda(g)\,x_0 \quad \text{pour tous les} \quad g \in G,$$

où $\lambda(g)$ est une fonction numérique sur G. Mais cela signifie justement que x_0 est un vecteur propre commun à tous les $T(g)$, $g \in G$.

Remarque. Les assertions des théorèmes 1 et 2 sont généralement fausses pour les représentations de dimension infinie.

3.2. Corollaires des théorèmes fondamentaux.

Corollaire 1. *Toute représentation irréductible de dimension finie $T: g \to T(g)$ d'un groupe résoluble connexe G est unidimensionnelle.*

Corollaire 2. *Si $T: g \to T(g)$ est une représentation de dimension finie d'un groupe résoluble connexe G, alors l'espace X de cette représentation contient un vecteur $x_0 \neq 0$ qui est un vecteur propre commun à tous les opérateurs $T(g)$.*

Vu que chaque groupe topologique résoluble est également algébriquement résoluble (II, 2.4), les deux assertions se déduisent des théorèmes 1 et 2.

Exercice. Démontrer que dans l'espace d'une représentation de dimension finie d'un groupe connexe algébriquement résoluble, on peut choisir une base telle que les matrices de tous les opérateurs de la représentation sont triangulaires relativement à cette base.

CHAPITRE VI

REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DU GROUPE LINÉAIRE GÉNÉRAL

Les représentations irréductibles de dimension finie d'importantes classes de groupes se construisent de même que pour le groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Nous exposons d'abord le procédé de construction sur l'exemple le plus simple du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. Partout dans ce chapitre G désignera le groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

§ 1. Quelques sous-groupes du groupe G

1.1. Le groupe K. Désignons par K *) l'ensemble de toutes les matrices

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{Vmatrix}, \quad k_{11} \neq 0, \; \dots, \; k_{nn} \neq 0,$$

K est un sous-groupe résoluble connexe fermé du groupe G.

1.2. Le groupe H. Désignons par H l'ensemble de toutes les matrices h de la forme

$$h = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{Vmatrix}, \quad h_{11} \neq 0, \; \dots, \; h_{nn} \neq 0.$$

I. *H est un sous-groupe résoluble connexe fermé de G.*

Il est évident que H s'obtient de K par passage aux matrices transposées; par conséquent, H est un sous-groupe résoluble connexe fermé du groupe G.

---

*) Pour simplifier les notations, nous écrivons partout dans ce chapitre K à la place de K_n (cf. l'exemple 4, 1.2, chapitre V).

1.3. Le groupe D. Désignons par D l'ensemble de toutes les matrices diagonales

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Il est évident que D est un sous-groupe connexe fermé du groupe K, et donc du groupe H. Il est évident également que D est commutatif.

I. *D est isomorphe au produit direct de n copies du groupe* C_0^1. Notons également la relation évidente

$$K \cap H = D. \tag{1.3.1}$$

1.4. Le groupe Z_-. Désignons par Z_- l'ensemble de toutes les matrices de la forme

$$\zeta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \zeta_{n3} & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

où les ζ_{jl}, $j > l$, sont des nombres complexes arbitraires. On vérifie immédiatement que Z_- est un groupe. Il est évident que Z_- est un sous-groupe connexe fermé du groupe K, et donc également du groupe G.

1.5. Le groupe Z_+. Désignons par Z_+ l'ensemble de toutes les matrices de la forme

$$z = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1n} \\ 0 & 1 & z_{23} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

où les z_{jl}, $j < l$, sont des nombres complexes arbitraires. On vérifie facilement que Z_+ est un groupe. Il est évident que Z_+ est un sous-groupe connexe fermé du groupe G et

$$K \cap Z_+ = \{e\}, \tag{1.5.1}$$

où e est la matrice unité.

I. *Les applications $\zeta \to \delta^{-1}\zeta\delta$, $z \to \delta^{-1}z\delta$ sont des automorphismes des groupes Z_- et Z^+ respectivement.*

En effet, en multipliant les matrices, nous voyons que les éléments g_{pq} des matrices $\delta^{-1}\zeta\delta$ et $\delta^{-1}z\delta$ s'obtiennent à partir des éléments correspondants des matrices ζ et z en les multipliant par $\lambda_p^{-1}\lambda_q$; d'où l'on tire notre assertion.

1.6. Décomposition des éléments du groupe K.

I. *Chaque élément k du groupe K peut être représenté de manière unique sous la forme*

$$k = \delta\zeta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \tag{1.6.1}$$

et également sous la forme

$$k = \zeta\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-. \tag{1.6.2}$$

Démonstration. L'égalité (1.6.1) est équivalente au système d'équations

$$k_{pq} = \lambda_p \zeta_{pq}, \quad p \geqslant q. \tag{1.6.3}$$

Pour $q = p$, on obtient de (1.6.3)

$$\lambda_p = k_{pp}; \tag{1.6.4}$$

et, par conséquent, lorsque $q < p$, on obtient de (1.6.3)

$$\zeta_{pq} = k_{pq}/k_{pp}. \tag{1.6.5}$$

Ainsi le système possède une solution et une seule. Ceci démontre l'assertion qui concerne (1.6.1); l'assertion concernant (1.6.2) se démontre d'une manière analogue, et dans la formule (1.6.2) on a

$$\lambda_p = k_{pp}, \quad \zeta_{pq} = k_{pq}/k_{qq}. \tag{1.6.6}$$

1.7. Décomposition des éléments du groupe H.

I. *Chaque élément h du groupe H peut être représenté de manière unique sous la forme*

$$h = \delta z, \quad \delta \in D, \quad z \in Z_+, \tag{1.7.1}$$

et également sous la forme

$$h = z\delta, \quad \delta \in D, \quad z \in Z_+. \tag{1.7.2}$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition I, 1.6 (les formules (1.7.1), (1.7.2) s'obtiennent de (1.6.1), (1.6.2) en passant aux matrices transposées); on aura alors dans le cas de (1.7.1)

$$\lambda_p = h_{pp}, \quad z_{pq} = h_{pq}/h_{pp}, \tag{1.7.3}$$

tandis que dans le cas de (1.7.2)

$$\lambda_p = h_{pp}, \quad z_{pq} = h_{pq}/h_{qq}. \tag{1.7.4}$$

Exercice. Démontrer que $H^{(1)} = Z_+$, $K^{(1)} = Z_-$.

Indication. Se servir des propositions I de 1.6 et 1.7.

1.8. Décomposition de Gauss. Posons pour $g \in G$

$$\Delta_l(g) = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1l} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{l1} & \cdots & g_{ll} \end{vmatrix}. \tag{1.8.1}$$

La matrice $g \in G$ est dite *régulière*, si

$$\Delta_l(g) \neq 0, \qquad l = 1, \ldots, n; \tag{1.8.2}$$

elle est *non régulière* dans le cas contraire. Il est évident que les matrices régulières g forment un ensemble ouvert dans G (désignons-le par $G_{\text{rég}}$), tandis que les matrices non régulières forment dans G un ensemble de plus petite dimension.

I. *Toute matrice régulière $g \in G$ peut être représentée de manière unique sous la forme*

$$g = kz, \qquad k \in K, \quad z \in Z. \tag{1.8.3}$$

Démonstration. Trouvons un élément $\dot{z} \in Z_+$ tel que

$$g\dot{z} \in K. \tag{1.8.4}$$

Puisque $\dot{z}_{pq} = 0$ pour $p > q$, $\dot{z}_{pp} = 1$, tandis que $k_{pq} = 0$ pour $p < q$, la condition (1.8.4) est équivalente au système d'égalités

$$\sum_{s=1}^{q-1} g_{ps}\dot{z}_{sq} + g_{pq} = 0 \text{ si } p < q. \tag{1.8.5}$$

Pour un $q > 1$ donné et $p = 1, 2, \ldots, q-1$, les égalités (1.8.5) forment un système d'équations relativement à $\dot{z}_{1q}, \ldots, \dot{z}_{q-1,q}$. Son déterminant coïncide avec $\Delta_q(g)$; il est donc différent de zéro en vertu de la régularité de la matrice g; par conséquent, le système (1.8.5) possède une solution unique. Cela signifie qu'il existe un élément $\dot{z} \in Z_+$ tel que $g\dot{z} = k \in K$; d'où l'on tire $g = k\dot{z}^{-1} = kz$, où l'on a noté $z = \dot{z}^{-1}$. Ceci démontre l'existence de la décomposition (1.8.3). Admettons maintenant que

$$g = kz = k_1z_1, \text{ où } k, k_1 \in K, \ z, z_1 \in Z_+.$$

Il vient $kz = k_1z_1$, $k^{-1}k_1 = zz_1^{-1} \in K \cap Z_+ = \{e\}$ (voir (1.5.1)). Ainsi $k^{-1}k_1 = e$, $zz_1^{-1} = e$; par conséquent $k = k_1$, $z = z_1$. Ceci démontre l'unicité de la décomposition (1.8.3). La formule (1.8.3) s'appelle *décomposition de Gauss* *). En combinant maintenant cette assertion avec la proposition I de 1.6, nous obtenons:

II. *Chaque matrice régulière $g \in G$ peut être représentée de manière unique sous la forme*

$$g \in \delta\zeta z, \qquad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \quad z \in Z_+, \tag{1.8.6}$$

et également sous la forme

$$g = \zeta\delta z, \qquad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \quad z \in Z_+. \tag{1.8.7}$$

---

*) Gauss appliqua cette décomposition à la résolution par récurrence des systèmes d'équations linéaires.

Les décompositions (1.8.6) et (1.8.7) s'appellent également *décompositions de Gauss.*

Trouvons des formules qui expriment les éléments des matrices k et z dans (1.8.3), ainsi que les éléments des matrices δ, ζ et z dans (1.8.6) et (1.8.7) par les éléments de la matrice g.

Désignons par $g\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ q_1, \ldots, q_m \end{pmatrix}$, $p_1 < \ldots < p_m$, $q_1 < \ldots < q_m$, le mineur constitué des éléments de la matrice g qui se trouvent à l'intersection des lignes de numéros $p_1, \ldots, p_m$ avec les colonnes de numéros $q_1, \ldots, q_m$.

Lorsqu'on multiplie la matrice g à droite par z, on ajoute à la première ligne une combinaison linéaire des lignes suivantes, à la deuxième ligne une combinaison linéaire des lignes qui suivent celle-ci, etc. ; le mineur $g\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_m \\ q_1, \ldots, q_m \end{pmatrix}$ ne sera pas changé par une telle multiplication, i.e. il doit être égal au mineur identique de la matrice k dans la formule (1.8.3). En particulier

$$\Delta_m(g) = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mm} \end{vmatrix} = k_{11}k_{12} \ldots k_{mm}, \tag{1.8.8}$$

et pour $p > q$

$$g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k_{pq} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{p+1,\, q} & k_{p+1,\, p+1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{nq} & k_{n,\, p+1} & k_{n,\, p+2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= k_{pq}k_{p+1,\, p+1} \ldots k_{nn}. \tag{1.8.9}$$

On tire de (1.8.8) que

$$k_{mm} = \frac{\Delta_m(g)}{\Delta_{m-1}(g)}, \quad m = 2, \ldots, n, \tag{1.8.10}$$

$$k_{11} = \Delta_1(g), \tag{1.8.11}$$

et alors on obtient de (1.8.9)

$$k_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{k_{p+1,\, p+1} \ldots k_{nn}} = \Delta_n(g) \frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)}. \tag{1.8.12}$$

En combinant (1.8.10)-(1.8.12) avec (1.6.4)-(1.6.6), nous obtenons pour ζ et δ dans (1.8.6):

$$\lambda_m = \frac{\Delta_m(g)}{\Delta_{m-1}(g)}, \quad m = 2, \ldots, n; \quad \lambda_1 = \Delta_1(g); \tag{1.8.13}$$

$$\zeta_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)^2} \, \frac{\Delta_{p-1}(g)}{\Delta_n(g)}, \quad p < q. \tag{1.8.14}$$

Enfin, en appliquant au deuxième membre de (1.8.3) la règle de multiplication des mineurs, nous obtenons pour $p < q$:

$$g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-1 & p \\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p1} & k_{p2} & \ldots & k_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z_{12} & \ldots & z_{1,q-1} & z_{1q} \\ 0 & 1 & \ldots & z_{2,q-1} & z_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & z_{p-1,q} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{pq} \end{vmatrix} = \Delta_p(g) z_{pq},$$

d'où

$$z_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-1 & p \\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & q \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)}. \tag{1.8.15}$$

Ainsi,

III. *Les éléments des matrices* k, z, δ, ζ *dans les décompositions* (1.8.3) *et* (1.8.7) *s'expriment par les éléments de la matrice* g *suivant les formules* (1.8.10) *à* (1.8.12), (1.8.13) *à* (1.8.15); *par conséquent, les éléments des matrices* k, z, δ, ζ *dans ces décompositions sont des fonctions rationnelles des éléments de la matrice* g.

REMARQUE. Dans certains cas il est commode d'envisager K comme le groupe de toutes les matrices

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{1.8.16}$$

Z_+ comme le groupe de toutes les matrices

$$z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ z_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & z_{n2} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \tag{1.8.17}$$

et Z_- comme le groupe de toutes les matrices

$$\zeta = \begin{Vmatrix} 1 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \zeta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (1.8.18)$$

Pour de tels K, Z_+, Z_- (et pour le même D), toutes les décompositions de Gauss sont toujours valables.

Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer ces décompositions à la matrice transposée g' et passer ensuite aux matrices transposées dans les deux membres des égalités obtenues.

Voyons en détail le cas $n = 2$. La décomposition de Gauss prend la forme

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} + k_{12} z_{21} & k_{12} \\ k_{22} z_{21} & k_{22} \end{Vmatrix};$$

d'où

$$k_{12} = g_{12}, \qquad k_{22} = g_{22}, \\ k_{22} z_{21} = g_{21}, \quad k_{11} + k_{12} z_{21} = g_{11}; \qquad (1.8.19)$$

par conséquent,

$$z_{21} = \frac{g_{21}}{g_{22}}, \quad k_{11} = g_{11} - k_{12} z_{21} = g_{11} - g_{12} \frac{g_{21}}{g_{22}} = \frac{\det g}{g_{22}}. \qquad (1.8.20)$$

1.9. Décomposition de Gram. Désignons par Γ l'ensemble de toutes les matrices diagonales de la forme

$$\gamma = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{Vmatrix}, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbf{R}^1. \qquad (1.9.1)$$

Il est évident que Γ est un sous-groupe du groupe D, isomorphe au produit direct de n copies du groupe Γ^1. Posons par souci de brièveté $U(n) = U$. Il est évident que

$$\Gamma \subset U, \qquad (1.9.2)$$

$$U \cap K = U \cap D = \Gamma. \qquad (1.9.3)$$

Désignons maintenant par E l'ensemble de toutes les matrices diagonales de la forme

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{Vmatrix}, \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0. \qquad (1.9.4)$$

Il est évident que E est un sous-groupe du groupe D, isomorphe au produit direct de n copies du groupe $\mathbf{R}_0^+$.

I. *Chaque matrice* $\delta \in D$ *se représente, d'une manière unique, sous la forme*

$$\delta = \varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon \in E, \ \gamma \in \Gamma. \tag{1.9.5}$$

Cette assertion découle directement de la décomposition $\lambda_j = \varepsilon_j e^{i\varphi_j}$, $\varepsilon_j > 0$, $\varphi_j \in \mathbf{R}^1$, où les λ_j sont les éléments diagonaux de la matrice.

II. *Chaque matrice* $g \in G$ *peut être représentée sous la forme*

$$g = ku, \quad k \in K, \ u \in U. \tag{1.9.6}$$

Si l'on a également $g = k_1u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, *alors* $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$.

La première assertion a été démontrée plus haut (voir le lemme 2 dans l'exemple 10 de 1.2., chapitre V). Si l'on a également $g = k_1u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, alors $ku = k_1u_1$; d'où en vertu de (1.9.4)

$$k^{-1}k_1 = uu_1^{-1} \in U \cap K = \Gamma;$$

par conséquent $k^{-1}k_1 = \gamma$, $uu_1^{-1} = \gamma$, où $\gamma \in \Gamma$ et $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$.

III. *Chaque matrice* $g \in G$ *peut être représentée, d'une manière unique, sous la forme*

$$g = \zeta\varepsilon u, \quad \zeta \in Z_-, \ \varepsilon \in E, \ u \in U, \tag{1.9.7}$$

et aussi sous la forme

$$g = \varepsilon\zeta u, \quad \varepsilon \in E, \ \zeta \in Z_-, \ u \in U. \tag{1.9.8}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (1.9.6)

$$g = ku_1, \quad k \in K, \ u_1 \in U. \tag{1.9.9}$$

D'autre part, en vertu de (1.6.2)

$$k = \zeta\delta, \quad \zeta \in Z_-, \ \delta \in D \tag{1.9.10}$$

et en vertu de (1.9.5)

$$\delta = \varepsilon\gamma, \quad \varepsilon \in E, \ \gamma \in \Gamma. \tag{1.9.11}$$

En substituant ces expressions dans (1.9.9), on obtient $g = \zeta\varepsilon\gamma u_1 = \zeta\varepsilon u$, où $u = \gamma u_1 \in U$. Ceci démontre l'existence de la décomposition (1.9.7).

Si l'on a également $g = \zeta_1\varepsilon_1u_1$, alors $\zeta_1\varepsilon_1u_1 = \zeta\varepsilon u$, d'où en vertu de II, $u_1 = \gamma u$, $\zeta_1\varepsilon_1 = \zeta\varepsilon\gamma^{-1}$. Mais alors par suite de l'unicité des décompositions (1.6.2) et (1.9.3), $\zeta_1 = \zeta$, $\varepsilon_1 = \varepsilon\gamma^{-1}$. La dernière relation est possible seulement pour $\gamma = e$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Les décompositions (1.9.6), (1.9.7) et (1.9.8) s'appellent *décompositions de Gram.*

§ 2. Description des représentations irréductibles de dimension finie du groupe $GL\ (n,\ C)$

2.1. Poids et vecteurs de poids. Soit $T: g \to T(g)$ une représentation du groupe G dans un espace X de dimension finie. Un vecteur $x \neq 0$, $x \in X$. est appelé *vecteur de poids* de la représentation T (relativement au groupe D), si

$$T(\delta)\, x = \nu(\delta)\, x \quad \text{pour tous les } \delta \in D, \qquad (2.1.1)$$

où $\nu(\delta)$ est un caractère continu du groupe D ; le caractère $\nu(\delta)$ s'appelle *poids* de la représentation T. Un vecteur $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, s'appelle *vecteur de poids supérieur* de la représentation T si l'on a

$$\begin{aligned} T(\delta) x_0 &= \alpha(\delta)\, x_0 \quad \text{pour tous les } \delta \in D \text{ et} \\ T(z)\, x_0 &= x_0 \qquad\quad\ \text{pour tous les } z \in Z_+, \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

où $\alpha(\delta)$ est un caractère continu du groupe D ; le caractère $\alpha(\delta)$ s'appelle dans ce cas *poids supérieur* de la représentation T.

Enfin, un vecteur $x'_0 \neq 0$, $x'_0 \in X$, s'appelle *vecteur de poids inférieur* de la représentation T si

$$\begin{aligned} T(\delta)\, x'_0 &= \mu(\delta)\, x'_0 \quad \text{pour tous les } \delta \in D \text{ et} \\ T(\zeta)\, x'_0 &= x'_0 \qquad\quad\ \text{pour tous les } \zeta \in Z_-; \end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

le caractère $\mu(\delta)$ s'appelle dans ce cas *poids inférieur* de la représentation.

THÉORÈME 1. *Dans l'espace X de chaque représentation $T: g \to T(g)$ de dimension finie du groupe $G = GL(n, C)$, il existe un vecteur de poids supérieur et un vecteur de poids inférieur. Si en outre T est irréductible, alors X contient un vecteur unique (à un facteur numérique près) de poids supérieur et un vecteur unique (à un facteur numérique près) de poids inférieur.*

D é m o n s t r a t i o n. La restriction à H de la représentation T est une représentation du groupe résoluble connexe H. D'après le théorème de Lie (voir 3.1, chapitre V), il existe dans X un vecteur $x_0 \neq 0$ qui est un vecteur propre commun à tous les opérateurs $T(h)$

$$T(h)\, x_0 = \alpha(h)\, x_0 \quad \text{pour tous les } h \in H, \qquad (2.1.4)$$

où $h \to \alpha(h)$ est une représentation continue unidimensionnelle du groupe H.

Il découle de (2.1.4) que $T(\delta)\, x_0 = \alpha(\delta)\, x_0$ pour tous les $\delta \in D$ et $T(z)\, x_0 = x_0$ pour tous les $z \in Z_+$ car $Z_+ = H^{(1)}$; par conséquent, x_0 est un vecteur de poids supérieur de la représentation T. En remplaçant dans ce raisonnement le groupe H par le groupe K, nous démontrerons l'existence d'un vecteur de poids inférieur de la

représentation T. Supposons maintenant que T est irréductible. Soient Y un espace linéaire en dualité avec X relativement à une certaine forme bilinéaire non dégénérée (x, y), $\hat{T}$ une représentation du groupe G contragrédiente de T, y'_0 un vecteur de poids inférieur, et enfin $\hat{\mu}$ le poids inférieur de la représentation $\hat{T}$. En vertu de (2.1.4), pour chaque élément régulier $g = \zeta\delta z$, $\zeta \in Z_-$, $\delta \in D$, $z \in Z_+$, on a

$$(T(g)x_0, y'_0) = (T(\zeta\delta z)x_0, y'_0) = (T(\zeta)T(\delta)T(z)x_0, y'_0) = \\ = (T(\delta)x_0, \hat{T}(\zeta^{-1})y'_0) = (\alpha(\delta)x_0, y'_0) = \alpha(\delta)(x_0, y'_0), \qquad (2.1.5)$$

et d'une manière analogue

$$(T(g)x_0, y'_0) = (T(\delta)x_0, y'_0) = (x_0, \hat{T}(\delta^{-1})y'_0) = \hat{\mu}(\delta^{-1})(x_0\ y'_0). \qquad (2.1.6)$$

Par conséquent

$$(\alpha(\delta) - \hat{\mu}(\delta^{-1}))(x_0, y'_0) = 0. \qquad (2.1.7)$$

Si $(x_0, y'_0) = 0$, on tire de (2.1.5) que

$$(T(g)x_0, y'_0) = 0 \qquad (2.1.8)$$

pour tous les $g \in G_{rég}$, et donc pour tous les g, puisque $\overline{G_{rég}} = G$. Mais l'enveloppe linéaire de tous les $T(g)x_0$, $g \in G$, coïncide avec X, puisque T est irréductible, et nous voyons que $(x, y'_0) = 0$ pour tous les $x \in X$, ce qui contredit le fait que la forme (x, y) est non dégénérée. Par conséquent

$$(x_0, y'_0) \neq 0, \qquad (2.1.9)$$

et l'on obtient de (2.1.7) que

$$\alpha(\delta) = \hat{\mu}(\delta^{-1}). \qquad (2.1.10)$$

Admettons maintenant que $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$, est un autre vecteur de poids supérieur et $\alpha_1(\delta)$ le poids supérieur correspondant de la représentation T. Alors en vertu de (2.1.10) on a $\alpha_1(\delta) = \hat{\mu}(\delta^{-1})$; par conséquent $\alpha_1(\delta) = \alpha(\delta)$. Ensuite, en multipliant x_0 par $c = \frac{(x_1, y_0)}{(x_0, y_0)}$, on obtient

$$(cx_0 - x_1, y'_0) = c(x_0, y'_0) - (x_1, y'_0) = 0. \qquad (2.1.11)$$

Si $cx_0 - x_1 \neq 0$, alors $cx_0 - x_1$ est également un vecteur de poids supérieur qui correspond au poids $\alpha(\delta)$; dans ce cas (2.1.11) contredit l'égalité (2.1.9) (dans laquelle on a remplacé le vecteur x_0 par le vecteur $cx_0 - x_1$). Ainsi $cx_0 - x_1 = 0$, $x_1 = cx_0$ et x_0 se détermine de manière unique à un facteur multiplicatif près. On démontre d'une manière analogue l'assertion concernant le vecteur de poids inférieur.

On déduit du théorème démontré le

Corollaire 1. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe $G = GL(n, C)$ admet: un poids supérieur, et un seul, et un poids inférieur, et un seul.*

Corollaire 2. *Soient $T: g \to T(g)$ une représentation de dimension finie du groupe G dans un espace de dimension finie X, $x_0 \neq 0$ un vecteur de poids supérieur, et enfin $\alpha(\delta)$ le poids supérieur correspondant de la représentation T. Si:*

1) X est l'enveloppe linéaire de tous les $T(g)x_0$, $g \in G$;

2) x_0 est le vecteur de poids supérieur de la représentation T dans X, unique à un facteur numérique près, alors T est irréductible.

Démonstration. Soit $M \neq 0$ un sous-espace de X invariant relativement à T. D'après le théorème 1 il existe dans M un vecteur de poids supérieur de la restriction de T à M qui est en même temps le vecteur de poids supérieur de T dans X. En vertu de la condition 2), ce vecteur, à un facteur numérique près, coïncide avec x_0; par conséquent, $x_0 \in M$. Mais alors tous les $T(g)x_0$, $g \in G$, et donc également leur enveloppe linéaire, sont contenus dans M; d'autre part, en vertu de la condition 1), cette enveloppe linéaire coïncide avec X. Ainsi $X \subset M \subset X$, $X = M$, ce qui prouve que T est irréductible.

2.2. Réalisation canonique des représentations irréductibles de dimension finie du groupe G. Soit $T: g \to T(g)$ une représentation irréductible du groupe $G = GL(n, C)$ dans un espace X de dimension finie, et soient Y, $\hat{T}$, x_0, y'_0, α, $\hat{\mu}$ les mêmes que dans la démonstration du théorème 1 de 2.1.

Faisons correspondre à chaque vecteur $x \in X$ la fonction $f(g) = f_x(g)$ selon la formule

$$f(g) = f_x(g) = (T(g)x, y'_0). \tag{2.2.1}$$

I. *L'application $x \to f_x(g)$ est linéaire.*

En effet

$$f_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}(g) = (T(g)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y'_0) = \\ = \alpha_1 (T(g)x_1, y'_0) + \alpha_2 (T(g)x_2, y'_0) = \alpha_1 f_{x_1}(g) + \alpha_2 f_{x_2}(g).$$

Désignons par Φ l'image de l'espace X par l'application $x \to f_x(g)$. En vertu de I, Φ est un espace linéaire des fonctions sur G, tandis qu'en vertu de la continuité de la représentation $\hat{T}$ toutes les fonctions de Φ sont continues sur G.

II. *L'application $x \to f_x$ est une bijection sur Φ.*

Démonstration. Soit M le noyau de l'application $x \to f_x(g)$; M est évidemment un sous-espace de X. Si $x \in M$, alors $0 = f_x(g) = (T(g)x, y'_0)$ pour tous les $g \in G$. Mais alors pour

chaque $g_1 \in G$.

$$(T(g)\,T(g_1)\,x,\ y_0') = (T(gg_1)\,x,\ y_0') = 0.$$

Par conséquent, on a également $T(g_1)\,x \in M$, i.e. M est invariant relativement à tous les $T(g_1)$, $g_1 \in G$. En vertu de l'irréductibilité de la représentation T, on obtient donc, soit $M = X$, soit $M = (0)$. Dans le premier cas $(T(g)\,x,\ y_0) = 0$ pour tous les $x \in X$; en particulier $(x,\ y_0) = 0$ pour tous les $x \in X$ ce qui est impossible, puisque $(x,\ y)$ est non dégénéré. Par conséquent $M = (0)$, i.e. l'application $x \to f_x$ est un isomorphisme.

En réunissant les propositions I et II, nous concluons:

III. *L'application* $x \to f_x(g)$ *donnée par la formule* $f_x(g) = (T(g)\,x,\ y_0)$ *est un isomorphisme de l'espace* X *sur l'espace* Φ; X *et* Φ *sont donc isomorphes.*

Considérons en détail certaines propriétés de l'espace Φ.

IV. *Chaque fonction* $f(g) \in \Phi$ *satisfait à la condition*

$$f(kg) = \alpha(k)\,f(g). \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Par définition de Φ,

$$f_x(kg) = (T(kg)\,x,\ y_0') = (T(k)\,T(g)\,x,\ y_0') = \\ = (T(g)\,x,\ T'(k)\,y_0') = (T(g)\,x,\ \hat{T}^{-1}(k)\,y_0') = \\ = (T(g)\,x,\ \hat{\mu}(k^{-1})\,y_0') = \hat{\mu}(k^{-1})\,(T(g)\,x,\ y_0') = \alpha(k)\,f_x(g).$$

V. *Si* $f(g) \in \Phi$, *alors également* $f(gg_0) \in \Phi$.

Démonstration. Supposons que $f(g) = f_x(g) \in \Phi$; alors on a également

$$f(gg_0) = f_x(gg_0) = (T(gg_0)\,x,\ y_0') = \\ = (T(g)\,T(g_0)\,x,\ y_0') = f_{T(g_0)x}(g) \in \Phi. \tag{2.2.3}$$

En même temps:

VI. *L'isomorphisme* $x \to f_x(g)$ *applique les opérateurs* $T(g_0)$ *dans les opérateurs de translation à droite sur* Φ:

$$T(g_0)\,f(g) = f(gg_0). \tag{2.2.4}$$

En effet, lorsqu'on passe de x à $T(g_0)\,x$, la fonction $f_x(g) = (T(g)\,x,\ y_0')$ devient $(T(g)\,T(g_0)\,x,\ y_0') = (T(gg_0)\,x,\ y_0') = f_x(gg_0)$.

En réunissant les propositions III à VI, on peut énoncer:

VII. *L'isomorphisme* $x \to f_x(g)$ *définit une équivalence de la représentation* T *dans* X *et de la représentation* T *dans* Φ, *cette équivalence étant déterminée par la formule*

$$\widetilde{T}(g_0)\,f(g) = f(gg_0), \qquad f \in \Phi. \tag{2.2.5}$$

Ainsi, chaque représentation irréductible T du groupe G est équivalente à sa représentation dans un certain espace Φ, et cette représentation est définie par la formule (2.2.5).

VIII. *Soit Φ un espace linéaire quelconque de dimension finie de fonctions continues $f(g)$ sur G, qui satisfait aux conditions suivantes:*

1) $f(kg) = \alpha(k) f(g)$ où $k \to \alpha(k)$ est une représentation unidimensionnelle du groupe K;

2) si $f(g) \in \Phi$, alors $f(gg_0) \in \Phi$; en outre supposons que T est une représentation du groupe G dans Φ définie par la formule

$$T(g_0) f(g) = f(gg_0). \tag{2.2.6}$$

Alors il existe dans Φ un vecteur unique (à un coefficient numérique près) de poids supérieur, déterminé par la formule

$$f_0(\delta\zeta z) = C\alpha(\delta) \text{ si } g = \delta\zeta z \in G_{\text{rég}}. \tag{2.2.7}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $f_0(g)$ un vecteur de poids supérieur de la représentation T. En vertu de 1)

$$f_0(\delta\zeta z) = \alpha(\delta\zeta) f_0(z) = \alpha(\delta)\alpha(\zeta) f_0(z) = \alpha(\delta) f_0(z). \tag{2.2.8}$$

D'autre part (voir (2.1.2) et (2.2.9)), $f_0(gz_0) = T(z_0) f_0(g) = f_0(g)$, et donc on tire de (2.2.8) que

$$f_0(\delta\zeta z) = f_0(\delta\zeta) = \alpha(\delta) f_0(e), \tag{2.2.9}$$

i.e. $f_0(g) = f_0(\delta\zeta z) = C\alpha(\delta)$ pour $g = \delta\zeta z \in G_{\text{rég}}$, où $C = f(e) \neq$ $\neq 0$. En effet, si $C = 0$, on a $f_0 = 0$, ce qui contredit la condition $f_0 \neq 0$.

Si $f_1(g)$ est un autre vecteur de poids α, alors $f_1(g) = C_1\alpha(\delta)$; par conséquent, $f_1(g) = \frac{C_1}{C} f_0(g)$ pour $g = \delta\zeta z \in G_{\text{rég}}$, et donc pour chaque $g \in G$; la proposition VIII est démontrée.

Les propositions VII et VIII nous donnent une autre démonstration du théorème 1 de 2.1 concernant le vecteur de poids supérieur. En échangeant les rôles de K et H, on peut obtenir une nouvelle démonstration de l'assertion concernant le vecteur de poids inférieur.

Un caractère $\alpha(\delta)$ du groupe D sera dit *inductif* relativement à $G =$ $= GL(n, C)$ si:

1) la formule (2.2.9) détermine une fonction continue $f_0(g)$ sur tout le groupe G;

2) l'enveloppe linéaire, que nous désignons par Φ_α, de toutes les translations à droite $f_0(gg_0)$, $g_0 \in G$, est de dimension finie.

IX. *Toutes les fonctions de Φ_α vérifient la condition*

$$f(kg) = \alpha(k) f(g).$$

En effet, si $f(g) = f_0(gg_0)$, alors $f(kg) = f_0(kgg_0)$; posons $k = \delta\zeta$, $gg_0 = \delta_1\zeta_1 z_1$; nous obtenons

$$f(kg) = f_0(\delta\zeta\delta_1\zeta_1 z_1) = C\alpha(\delta\zeta\delta_1\zeta_1) = C\alpha(\delta\zeta)\alpha(\delta_1\zeta_1) = \alpha(k) f_0(gg_0)$$

pour $gg_0 \in G_{\text{rég}}$, et donc pour tous les g, $g_0 \in G$.

Soit α un caractère inductif du groupe G. Désignons par $T_\alpha : g \to T_\alpha(g)$ la représentation du groupe G dans l'espace Φ_α définie par la formule

$$T_\alpha(g_0) f(g) = f(gg_0) \quad \text{si} \quad f \in \Phi_\alpha.$$

THÉORÈME 2. 1) *Si α est un caractère inductif du groupe D, alors T_α est une représentation irréductible du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ de poids supérieur α.*

2) *Le poids supérieur α de toute représentation irréductible de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est inductif, et toute représentation irréductible de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$, de poids supérieur α, est équivalente à la représentation T_α.*

3) *Deux représentations irréductibles de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ sont équivalentes si et seulement si leurs poids supérieurs coïncident.*

Démonstration. 1) Supposons que α est inductif et soit $f_0(g)$ le vecteur de poids supérieur de la représentation T_α. En vertu de 2), l'enveloppe linéaire de tous les $T_\alpha(g_0) f_0$ coïncide avec Φ_α, et en vertu de VIII, $f_0(g)$ est un vecteur unique, à un facteur numérique près, de poids supérieur dans Φ_α ; par conséquent, T_α est irréductible d'après le corollaire 2 de 2.1.

2) Soient T une représentation irréductible de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$, et α son poids supérieur. En vertu de VII, T est équivalente à la représentation $\tilde{T}$ dans Φ. En vertu de VIII, il existe dans Φ un seul (à un facteur numérique près) vecteur $f_0(g) = C\alpha(\delta)$ pour $g = \delta\zeta z$ de poids α. Puisque T est irréductible, $\tilde{T}$ le sera aussi, et donc l'enveloppe linéaire de tous les $\tilde{T}(g_0) f(g) = f(gg_0)$ coïncide avec Φ, i.e. $\Phi = \Phi_\alpha$ et $\tilde{T} = T_\alpha$. Ceci démontre que α est inductif et que T est équivalente à T_α.

3) Deux représentations irréductibles de dimension finie avec un même poids supérieur α sont équivalentes à T_α et donc équivalentes entre elles. La réciproque est évidente.

Dans le sens de l'assertion 2) du théorème 2, la représentation T_α s'appelle *réalisation canonique* des représentations irréductibles de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ à poids supérieur α.

En vertu de cette assertion 2), pour énumérer toutes les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ (à une équivalence près) il suffit de choisir parmi tous les caractères

continus $\alpha(\delta)$ du groupe D les caractères inductifs. Ce problème sera résolu dans 2.5.

Notons également que T_α agit dans l'espace des fonctions sur un espace homogène G à groupe de transformations constitué par les translations à droite $g \to gg_0$.

Partout par la suite T_α désigne une représentation irréductible de dimension finie du groupe G à poids supérieur α ; nous donnerons maintenant diverses réalisations de la représentation T_α.

2.3. Réalisation des représentations irréductibles de dimension finie du groupe G dans l'espace des fonctions sur Z_+. En vertu du théorème 2 de 2.2, chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe G est équivalente à une certaine représentation T_α qui agit dans Φ_α. Toutes les fonctions $f(g)$ de l'espace Φ_α sont continues sur G et vérifient la condition $f(kg) = \alpha(k) f(g)$. En particulier,

$$f(g) = f(kz) = \alpha(k) f(z) \quad \text{pour} \quad k \in K, \quad z \in Z_+, \quad g \in G_{\text{rég}}; \tag{2.3.1}$$

la fonction $f(z)$ est continue sur Z_+ en tant que restriction à Z_+ de la fonction $f(g)$, continue sur G. D'autre part, la formule (2.3.1) définit $f(g)$ de manière unique sur $G_{\text{rég}}$ et donc, par continuité, sur G, car $G_{\text{rég}}$ est dense dans G. L'application $f(g) \to f(z)$ donnée par la formule (2.3.1) est évidemment linéaire. En outre, elle est bijective. En effet, si $f(z) \equiv 0$, alors $f(g) = 0$ sur $G_{\text{rég}}$ et donc sur tout le groupe G. Désignons par F_α l'image de l'espace Φ_α par l'application $f(g) \to f(z)$ définie par la formule (2.3.1). Cette application envoie les opérateurs $T_\alpha(g)$ dans des opérateurs $\dot{T}_\alpha(g)$ dans F_α.

Trouvons une forme explicite pour les $\dot{T}_\alpha(g)$. On a par définition des $\dot{T}_\alpha(g)$:

$$T_\alpha(g_0) f(g) = f(gg_0) =$$
$$= \alpha(k)\, \dot{T}_\alpha(g_0) f(z) \text{ pour } g = kz, \; k \in K, \; z \in Z_+. \tag{2.3.2}$$

Posons $\alpha(g) = f_0(g)$ pour $g \in G_{\text{rég}}$ et

$$zg_0 = k_1 z_1; \tag{2.3.3}$$

alors

$$f(gg_0) = f(kzg_0) = f(kk_1z_1) =$$
$$= \alpha(kk_1) f(z_1) = \alpha(k)\, \alpha(k_1) f(z_1). \tag{2.3.4}$$

D'où l'on tire à l'aide de (2.3.2)

$$\dot{T}_\alpha(g_0) f(z) = \alpha(k_1) f(z_1) \text{ si } zg_0 = k_1 z_1. \tag{2.3.5}$$

L'application $z \to z_1$ déterminée par la formule (2.3.3) est une application de Z_+ dans Z_+; désignons-la par $\bar{g}_0$ *) et posons $z_1 = z\bar{g}_0$. Il découle en outre de (2.3.3) que

$$\alpha(zg_0) = \alpha(k_1)\,\alpha(z_1) = \alpha(k_1).$$

Par conséquent, la formule (2.3.5) se met sous la forme

$$\dot{T}_\alpha(g_0)\,f(z) = \alpha(zg_0)\,f(z\bar{g}_0). \qquad (2.3.6)$$

Donnons maintenant une description explicite de l'espace F_α. Par définition, Φ_α est l'enveloppe linéaire de tous les $T(g_0)\,f_0(g) = f_\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$; par conséquent son image F_α est l'enveloppe linéaire de tous les $T(g_0)\,f_0(z)$, $g_0 \in G$. Mais en vertu de (2.2.11) et (2.3.1), $f_0(g)$ est envoyé dans $f_0(z) \equiv C$ par l'application $f(g) \to f(z)$, et, sans perte de généralité, on peut supposer $C = 1$, et donc $f_0(z) \equiv 1$. En appliquant la formule (2.3.6) nous concluons: F_α est l'enveloppe linéaire de tous les $\alpha(zg)$, $g \in G$.

En combinant ces résultats avec le théorème 2 de 2.2, nous obtenons le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe $G = GL(n, \mathbf{C})$ est équivalente à la représentation $\dot{T}_\alpha$, où α est le poids supérieur de la représentation T, définie de la manière suivante. L'espace F_α de la représentation $\dot{T}_\alpha$ est l'enveloppe linéaire de tous les $\alpha(zg)$, $g \in G$, tandis que les opérateurs de la représentation sont donnés par la formule*

$$\dot{T}_\alpha(g)\,f(z) = \alpha(zg)\,f(z\bar{g}), \qquad (2.3.7)$$

où $z_1 = z\bar{g}$ se détermine à partir de la condition $zg = k_1 z_1$.

2.4. Le cas $n = 2$. Considérons en détail le cas $G = GL(2, \mathbf{C})$. Il nous sera commode de supposer alors que K et Z_+ sont respectivement constitués par des matrices de la forme

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{Vmatrix} \qquad (2.4.1)$$

(voir la remarque dans 1.8); en outre, posons comme d'habitude pour $\delta \in D$

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

---

*) Strictement parlant, l'application $z \to z\bar{g}_0$ est définie seulement pour les z et g_0 qui vérifient $zg_0 \in G_{\text{rég}}$. Néanmoins, ceci n'a pas d'importance, puisque les fonctions $f(z) \in F_\alpha$ se prolongent par continuité aux matrices non régulières.

Nous voyons que z se détermine par un seul paramètre complexe $x = z_{21}$ et nous pouvons poser

$$f(z) = f(x) \text{ pour } z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Trouvons le paramètre correspondant x_1 dans la matrice $z_g = \overline{zg}$ pour

$$zg = kz_g. \tag{2.4.3}$$

En multipliant les matrices z et g, nous obtenons

$$zg = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{11}x + g_{21} & g_{12}x + g_{22} \end{Vmatrix}.$$

D'où en vertu de (1.8.20)

$$x_1 = \frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}; \tag{2.4.4}$$

donc *)

$$f(\overline{zg}) = f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}\right). \tag{2.4.5}$$

Ensuite on tire de (1.8.20) que pour $zg = kz_g$, $k = \zeta\delta$,

$$\lambda_2 = k_{22} = g_{12}x + g_{22}, \quad \lambda_1 = k_{11} = \frac{\det(zg)}{g_{12}x + g_{22}} = \frac{\det g}{g_{12}x + g_{22}}. \tag{2.4.6}$$

Le caractère $\alpha(\delta)$ est un caractère continu du groupe D, isomorphe au produit direct de deux copies du groupe C_0^1; par conséquent,

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\bar{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\bar{\lambda}_2^{q_2}, \tag{2.4.7}$$

où les p_1, q_1, p_2, q_2 sont des nombres complexes quelconques tels que $p_1 - q_1$ et $p_2 - q_2$ sont entiers. En substituant dans la formule (2.4.7) les expressions pour λ_1 et λ_2 données par (2.4.6), nous obtenons

$$\alpha(zg) = \left(\frac{\det g}{g_{12}x + g_{22}}\right)^{p_1} \left(\frac{\overline{\det g}}{\bar{g}_{11}\bar{x} + \bar{g}_{22}}\right)^{q_1} (g_{11}x + g_{22})^{p_2} (\bar{g}_{12}\bar{x} + \bar{g}_{22})^{q_2},$$

i.e.

$$\alpha(zg) = \Delta^{p_1}\bar{\Delta}^{q_1} (g_{12}x + g_{22})^{p_2 - p_1} (\bar{g}_{12}\bar{x} + \bar{g}_{22})^{q_2 - q_1}, \tag{2.4.8}$$

*) Ainsi, pour $n = 2$ l'application $z \to \overline{zg}$ se réduit à une transformation rationnelle de la variable x. Pour $n > 2$, les éléments de la matrice $\overline{zg}$ sont des fonctions rationnelles des éléments des matrices z et g; ceci découle immédiatement de la formule (1.8.15), de sorte que dans le cas général nous pouvons envisager l'application $z \to \overline{zg}$ comme une généralisation des transformations rationnelles.

où $\Delta = \det g$ et la formule (2.3.7) se met sous la forme

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(z) = \Delta^{p_1}\overline{\Delta}^{q_1} (g_{12}x + g_{22})^{p_2-p_1} (\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^{q_2-q_1} \times \\ \times f\left(\frac{g_{11}x+g_{21}}{g_{11}x+g_{22}}\right). \quad (2.4.9)$$

Il reste à déterminer à quelles conditions le caractère $\alpha(\delta)$ est inductif. Supposons que $\alpha(\delta)$ est inductif, de sorte que l'enveloppe linéaire de tous les $\alpha(z)$ est de dimension finie, mettons de dimension $k-1$. Alors il existe des constantes $C_1, \ldots, C_k$, qui ne sont pas toutes nulles et qui dépendent en général de $g_1, \ldots, g_k$, mais sont indépendantes de z, telles que

$$C_1\alpha(zg_1) + C_2\alpha(zg_2) + \ldots + C_k\alpha(zg_k) = 0 \quad (2.4.10)$$

pour tous les $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ et tous les $z \in Z_+$.

Posons dans (2.4.10)

$$g_j = \begin{pmatrix} x_j^{-1} & 1 \\ 0 & x_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

où les x_j sont des nombres complexes quelconques. Alors $\Delta_j = 1$, et en vertu de (2.4.8) on a

$$\alpha(zg_j) = (x + x_j)^r (\overline{x} + \overline{x}_j)^s, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad (2.4.11)$$

où

$$r = p_2 - p_1, \quad s = q_2 - q_1. \quad (2.4.12)$$

En substituant dans (2.4.10), nous obtenons

$$C_1(x+x_1)^r(\overline{x}+\overline{x}_1)^s + \ldots + C_k(x+x_k)^r(\overline{x}+\overline{x}_k)^s = 0 \quad (2.4.13)$$

pour des nombres complexes arbitraires $x, x_1, \ldots, x_k$. En calculant la dérivée de l'égalité (2.4.13) $k-1$ fois relativement à x *) et en posant ensuite $x = 0$, on obtient un système de k égalités:

$$C_1 x_1^r \overline{x}_1^s + \ldots + C_k x_k^r \overline{x}_k^s = 0,$$
$$rC_1 x_1^{r-1} \overline{x}_1^s + \ldots + rC_k x_k^{r-1} \overline{x}_k^s = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r(r-1)\ldots(r-k+1)\, C_1\overline{x}_1^s + \ldots + r(r-1)\ldots \\ \ldots(r-k+1)\, C_k\overline{x}_k^s = 0. \quad (2.4.14)$$

---

*) Nous posons ici $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial\overline{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$, où $\xi = \operatorname{Re} x$, $\eta = \operatorname{Im} x$; le lecteur vérifiera facilement qu'alors $\partial\overline{x}/\partial x = 0$, $\partial x/\partial\overline{x} = 0$, de sorte que x et $\overline{x}$ peuvent être envisagés comme des variables indépendantes pour cette différentiation.

Par hypothèse, le système (2.4.14) est vérifié pour des C_j qui ne sont pas toutes nulles. Par conséquent, le déterminant de ce système, qui est égal à $r^k(r-1)^{k-1}\ldots(r-k+1)\,\bar{x}_1^s\ldots\bar{x}_k^s w(x_1, \ldots, x_k)$, où $w(x_1, \ldots, x_k)$ est le déterminant de Vandermonde des nombres $x_1, \ldots, x_k$, doit s'annuler. Mais ces nombres peuvent être choisis arbitrairement; prenons-les non nuls et distincts, de sorte qu'un des nombres $r, r-1, \ldots, r-k+1$ s'annule. Cela signifie que r doit être un nombre entier non négatif. D'une manière analogue, en calculant la dérivée de l'égalité 2.4.13 $k-1$ fois relativement à $\bar{x}$, et en posant ensuite $\bar{x}=0$, nous aboutissons à ce que s doit être un entier non négatif. Ainsi,

I. *Si le caractère $\alpha(\delta)$ est inductif, alors $r = p_2 - p_1$ et $s = q_2 - q_1$ sont des nombres entiers non négatifs.*

Réciproquement, supposons que r et s sont des entiers non négatifs. Alors on tire de (2.4.8) que

$$\alpha(zg) = \Delta^{p_1}\bar{\Delta}^{q_1}(g_{12}x+g_{22})^r(\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{22})^s \qquad (2.4.15)$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à r en x et de degré inférieur ou égal à s en $\bar{x}$. Il est évident que ceci est également vrai pour toute combinaison linéaire des fonctions $\alpha(zg)$. Par conséquent,

II. *Si $r = p_2 - p_1$ et $s = q_2 - q_1$ sont des nombres entiers non négatifs, alors le caractère $\alpha(\delta)$ est inductif.*

Dans ce cas F_α est un espace de polynômes de degré $\leqslant r$ en x et de degré $\leqslant s$ en $\bar{x}$. Démontrons que F_α est constitué par tous les polynômes de ce type. L'espace F_α contient toutes les fonctions de la forme (2.4.15). En posant $g_{12}=1$, $g_{22}=0$, $g_{11}=0$, $g_{21}=-1$, nous voyons que F_α contient $x^r\bar{x}^s$. Remarquons maintenant que si un polynôme $\rho(x)=\rho(\xi+i\eta)$, $\xi=\operatorname{Re}x$, $\eta=\operatorname{Im}x$ appartient à F_α, alors on a également $f(x+h)\in F_\alpha$. En effet, posons $g_0=\begin{Vmatrix} 1 & h \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$, où $h\in\mathbf{R}^1$. Si $f(x)\in F_\alpha$, alors en vertu de (2.4.9) on a $T_\alpha(g_0)f(x)=f(x+h)\in F_\alpha$. On a donc également $\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))\in F_\alpha$ et $\frac{\partial f}{\partial\xi}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))\in F_\alpha$. D'une manière analogue, en prenant ih à la place de h, $h\in\mathbf{R}^1$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial\eta}\in F_\alpha$. D'où l'on tire $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}-i\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\in F_\alpha$ et $\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}+i\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\in F_\alpha$. Par conséquent F_α contient toutes les dérivées $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $\frac{\partial^l}{\partial\bar{x}^l}$ de la fonction $x^r\bar{x}^s$, i.e. toutes les puissances $x^{r_1}\bar{x}^{s_1}$, $0\leqslant r_1\leqslant r$, $0\leqslant s_1\leqslant s$, et F_α coïncide donc avec l'en-

semble de tous les polynômes $f(x, \bar{x})$ de degré $\leqslant r$ en x et de degré $\leqslant s$ en $\bar{x}$. Nous avons obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 4. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe GL (2, C) se détermine par deux nombres entiers non négatifs r, s et deux nombres complexes p, q dont la différence p — q est un nombre entier. La représentation donnée par ces nombres est équivalente à la représentation* $\dot{T}_\alpha$ *qui agit dans l'espace* F_α *des polynômes* $f(x, \bar{x})$ *en* x *et* $\bar{x}$, *de degré* $\leqslant r$ *en* x *et de degré* $\leqslant s$ *en* $\bar{x}$, *tandis que les opérateurs* $\dot{T}_\alpha(g)$ *sont définis par la formule*

$$\dot{T}_\alpha(g) f(x, \bar{x}) = (\det g)^p \overline{(\det g)}^q (g_{12}x + g_{22})^r (\bar{g}_{12}\bar{x} + \bar{g}_{22})^s \times$$
$$\times f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{11}x + g_{22}}, \frac{\bar{g}_{11}\bar{x} + \bar{g}_{21}}{\bar{g}_{12}\bar{x} + \bar{g}_{22}}\right). \quad (2.4.16)$$

La dimension de cette représentation est égale à $(r + 1)(s + 1)$.

Si $s = 0$ et $q = 0$, alors p est un nombre entier et F_α est constitué uniquement par des polynômes en x, et donc par des fonctions analytiques de x; dans ce cas la représentation est dite *analytique*. Mais si $r = 0$ et $p = 0$, alors q est un nombre entier et F_α est constitué uniquement par des polynômes en $\bar{x}$; dans ce cas la représentation est appelée *antianalytique*.

REMARQUE 1. Souvent on donne le nom de *poids supérieur* au système des nombres r, s qui déterminent une représentation. D'une manière analogue, si $f(x)$ est le vecteur de poids $\lambda_1^{m_1}\bar{\lambda}_2^{m_2}$ de la représentation $\dot{T}_\alpha$, le couple m_1, m_2 est également appellé *poids du vecteur* $f(x)$.

III. *Chaque monôme* $f = x^{r_1}\bar{x}^{s_1}$, $0 \leqslant r_1 \leqslant r$, $0 \leqslant s_1 \leqslant s$, *est le vecteur de poids* $r - 2r_1$, $s - 2s_1$ *de la représentation* $\dot{T}_\alpha$.

D é m o n s t r a t i o n. Substituons $f = x^{r_1}\bar{x}^{s_1}$ dans la formule (2.4.16) pour $g = \delta$; nous obtenons

$$\dot{T}_\alpha(\delta)\, x^{r_1}\bar{x}^{s_1} = (\det g)^p \overline{(\det g)}^q \lambda_2^r\bar{\lambda}_2^s \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x\right)^{r_1} \left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \bar{x}\right)^{s_1} =$$
$$= (\det g)^{p - 2r_1} \overline{(\det g)}^{q - 2s_1} \lambda_2^{r - 2r_1}\bar{\lambda}_2^{s - 2s_1} x^{r_1}\bar{x}^{s_1};$$

ce qui démontre notre assertion.

Les plus grandes composantes du poids s'obtiennent lorsque $r_1 = s_1 = 0$, i.e. pour $f \equiv 1$. Alors le poids correspondant dans III est égal à r, s. Dans les autres cas les composantes sont plus petites. C'est là l'origine du terme de poids supérieur. Une situation analogue se rencontre lorsque $n > 2$ (voir, par exemple, D. J é l o b e n k o [1]).

Remarque 2. Si les groupes K et Z_+ sont toujours considérés comme des groupes de matrices

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

respectivement, alors, en effectuant des calculs analogues, nous obtiendrons à la place de la formule (2.4.16) la formule

$$\dot{T}_\alpha(g) f(x) = (\det g)^p (\overline{\det g})^q (g_{11} + g_{21}x)^r \times$$
$$\times (\bar{g}_{11} + \bar{g}_{21}\bar{x})^s f\left(\frac{g_{12}+g_{22}x}{g_{11}+g_{21}x}, \frac{\bar{g}_{12}+\bar{g}_{22}\bar{x}}{\bar{g}_{11}+\bar{g}_{21}\bar{x}}\right),$$

où p, q sont des nombres complexes pour lesquels $p - q$ est un entier, r, s sont des entiers non négatifs, tandis que F_α garde la même signification qu'auparavant. En général, lorsque $n = 2$ on préfère la formule (2.4.16). Notons que dans le cas considéré le caractère $\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\bar{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\bar{\lambda}_2^{q_2}$ est inductif si et seulement si

$$r_1 = p_1 - p_2, \quad s = q_1 - q_2$$

sont des nombres entiers non négatifs, tandis que p_2, q_2 sont des nombres complexes quelconques, dont la différence est entière.

2.5. Caractères inductifs du groupe D dans le cas général. Soit G^0 un sous-groupe du groupe $G = GL(n, C)$. Posons

$$Z_+^0 = Z_+ \cap G^0, \quad Z_-^0 = Z_- \cap G^0, \quad D^0 = D \cap G^0. \qquad (2.5.1)$$

Nous dirons que la décomposition de Gauss du groupe G *induit* la décomposition de Gauss du groupe G^0 si dans la décomposition de Gauss de chaque élément régulier $g^0 \in G^0$

$$g^0 = \delta\zeta z \qquad (2.5.2)$$

on a les relations

$$\delta = \delta^0 \in D^0, \quad \zeta = \zeta^0 \in Z_-^0, \quad z = z^0 \in Z_+^0,$$

et si $G^0 \cap G_{\text{rég}}$ est dense dans G^0.

Lemme. *Supposons que la décomposition de Gauss du groupe G induit la décomposition de Gauss du groupe G^0. Si le caractère $\alpha(\delta)$ du groupe D est inductif relativement à G, alors sa restriction $\alpha_0(\delta^0)$ à D^0 est inductive relativement à G^0.*

Démonstration. Supposons que $\alpha(\delta)$ est inductif relativement à G. Cela signifie que l'enveloppe linéaire de tous les $\alpha(zg)$, $g \in G$, est de dimension finie, mettons de dimension $k - 1$. Alors pour tous les $g_1, g_2, \ldots, g_k$ on peut trouver des constantes $C_1, \ldots, C_k$ telles que

$$C_1\alpha(zg_1) + \ldots + C_k\alpha(zg_k) = 0. \qquad (2.5.3)$$

Ainsi, (2.5.3) doit être vérifié pour $g = g_1^0 \in G^0, \ldots, g_k = g_k^0 \in G^0$ quel que soit $z \in Z_+$, en particulier pour $z = z^0 \in Z_+$. Mais puisque la décomposition de Gauss du groupe G induit la décomposition de Gauss du groupe G^0, on a $\alpha(z^0 g_j^0) = \alpha_0(z^0 g_j)$ et (2.5.3) se transforme dans l'égalité

$$C_1\alpha_0(z^0 g_1^0) + \ldots + C_k\alpha_0(z^0 g_k^0) = 0.$$

qui signifie que α_0 est inductif.

Remarquons maintenant que D est le produit direct de n copies du groupe C_0 et donc (voir *i*), 3.3, chapitre III) un caractère quelconque $\alpha(\delta)$ du groupe D est de la forme

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\bar{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\bar{\lambda}_2^{q_2} \ldots \lambda_n^{p_n}\bar{\lambda}_n^{q_n}. \tag{2.5.4}$$

Supposons maintenant que $\alpha(\delta)$ est inductif relativement à G, et appliquons le lemme précédent au groupe G^0 des matrices g^0 de la forme

$$g^0 = \begin{Vmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.5.5}$$

où les éléments non indiqués sont des zéros, et $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Alors Z_+^0, Z_-^0, D^0 sont respectivement constitués par toutes les matrices

$$z^0 = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}, \quad \zeta^0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & & \\ \zeta_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\delta^0 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Il est évident que G^0, Z_+^0, Z_-^0, D^0 sont isomorphes au groupe $GL(2, \mathbf{C})$ et à ses sous-groupes correspondants Z_+, Z_-, D, et par conséquent

la décomposition de Gauss de $GL(n, C)$ induit une décomposition de Gauss de $GL(2, C)$. D'après le lemme, le caractère inductif $\alpha(\delta)$ du groupe D relativement à G est appliqué dans le caractère inductif

$$\alpha_0(\delta^0) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}$$

du groupe D^0 relativement à G^0. En vertu de la remarque 2 dans 2.4, ce dernier cas peut avoir lieu si et seulement si $r_1 = p_1 - p_2$ et $s_1 = q_1 - q_2$ sont des entiers non négatifs. En déplaçant maintenant la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le long de la diagonale principale et en répétant le raisonnement précédent, nous voyons également que $r_2 = p_2 - p_3$, $s_2 = q_2 - q_3, \ldots, r_{n-1} = p_{n-1} - p_n$, $s_{n-1} = q_{n-1} - q_n$ sont des nombres entiers non négatifs. Nous avons obtenu le résultat suivant:

I. *Si le caractère*

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2} \ldots \lambda_n^{p_n}\overline{\lambda}_n^{q_n}$$

du groupe D est inductif relativement à $GL(n, C)$, alors les nombres

$$r_1 = p_1 - p_2,\ s_1 = q_1 - q_2,\ \ldots,\ r_{n-1} = p_{n-1} - p_n,\ s_n = q_{n-1} - q_n \tag{2.5.6}$$

sont entiers non négatifs.

Montrons que l'on a l'assertion réciproque:

II. *Si les nombres* (2.5.6) *sont des entiers non négatifs, alors le caractère $\alpha(\delta)$ est inductif relativement à $GL(n, C)$.*

Démonstration. Désignons par $\Delta_1(g), \Delta_2(g), \ldots, \Delta_n(g)$ les mineurs principaux successifs de la matrice $g \in GL(n, C)$. En vertu des formules (1.8.13) et (2.5.4)

$$\alpha(zg) = \Delta_1(zg)^{p_1}\left(\frac{\Delta_2(zg)}{\Delta_1(zg)}\right)^{p_2}\overline{\Delta_1(zg)}^{q_1}\left(\frac{\overline{\Delta_2(zg)}}{\overline{\Delta_1(zg)}}\right)^{q_2} \ldots$$
$$\ldots \left(\frac{\Delta_n(zg)}{\Delta_{n-1}(zg)}\right)^{p_n}\left(\frac{\overline{\Delta_n(zg)}}{\overline{\Delta_{n-1}(zg)}}\right)^{q_n} =$$
$$= \Delta_1(zg)^{r_1}\overline{\Delta_1(zg)}^{s_1} \ldots \Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}}\overline{\Delta_{n-1}(zg)}^{s_{n-1}}\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n},$$

car $\Delta_n(zg) = \det zg = \det z \det g = \Delta(g)$.

On déduit de I, II et du théorème 3 de 2.3 le

Théorème 5. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe $G = GL(n, C)$ est déterminée par des nombres entiers non négatifs $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ et des nombres complexes p, q dont la différence est un nombre entier. La représentation T déterminée par les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ et p, q est équivalente à la représentation T_α qui agit dans l'espace F_α de*

polynômes $f(z, \bar{z})$ *de degré* $\leqslant r_1 + \ldots + r_{n-1}$ *en* z_{jl} *et de degré* $\leqslant s_1 + \ldots + s_{n-1}$ *en* $\bar{z}_{jl}$, *tandis que les opérateurs* $\dot{T}_\alpha(g)$ *sont donnés par la formule*

$$\dot{T}_\alpha(g) f(z, \bar{z}) =$$
$$= \Delta_1(zg)^{r_1} \overline{\Delta_1(zg)}^{s_1} \ldots \Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}} \overline{\Delta_{n-1}(zg)}^{s_{n-1}} \Delta_n^p \bar{\Delta}_n^q f(zg, \overline{zg}), \tag{2.5.7}$$

où $\Delta_j(g)$ *est le j-ième mineur principal de la matrice g. L'espace* F_α *est l'enveloppe linéaire des fonctions*

$$\Delta_1(zg)^{r_1} \overline{\Delta_1(zg)}^{s_1} \ldots \Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}} \overline{\Delta_{n-1}(zg)}^{s_{n-1}}.$$

Ainsi, chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ se détermine par une suite de nombres $\{p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ où $p_n - q_n$ est un nombre entier, tandis que $r_1 = p_1 - p_2, \ldots, r_{n-1} = p_{n-1} - p_n, s_1 = q_1 - q_2, \ldots, s_{n-1} = q_{n-1} - q_n$ sont des nombres entiers non négatifs. Cette suite s'appelle *signature* de la représentation T; on la désigne par α:

$$\alpha = \{p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n\}.$$

On appelle également signature la suite $\{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n; s_1, \ldots, s_{n-1}, q_n\}$ et l'on écrit

$$\alpha = \{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n; s_1, \ldots, s_{n-1}, q_n\}.$$

La représentation irréductible T du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ à signature α sera désignée par T_α.

Lorsque $s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = q = 0$, le nombre p est entier et F_α est constitué par des polynômes en z_{jl} seulement; la représentation est dite *analytique* dans ce cas. Par contre, lorsque $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-1} = p = 0$, alors q est un entier et F_α est constitué uniquement par des polynômes en $\bar{z}_{jl}$; la représentation est dite dans ce cas *antianalytique*; il est clair que $\dot{T}_\alpha$ est en même temps analytique et antianalytique si et seulement si elle est une représentation unité unidimensionnelle.

Il découle directement de (2.5.7):

III. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe GL* $(n, \mathbf{C})$ *est équivalente au produit tensoriel de ses représentations irréductibles analytique et antianalytique; réciproquement, chacun de ces produits tensoriels est une représentation irréductible du groupe GL* $(n, \mathbf{C})$.

Déjà pour $n > 2$ l'espace F_α, contrairement au cas $n = 2$, ne contient plus tous les polynômes de degré $\leqslant r_1 + \ldots + r_{n-1}$ en z_{jl} et de degré $\leqslant s_1 + \ldots + s_{n-1}$ en $\bar{z}_{jl}$, et la définition de F_α

est suffisamment compliquée. Donnons sans démonstration *), un des moyens de définir F_α. Définissons les opérateurs différentiels dans l'espace de tous les polynômes en z_{jl}, $\bar{z}_{jl}$ par les formules

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23}\frac{\partial}{\partial z_{13}} + \ldots + z_{2n}\frac{\partial}{\partial z_{1n}}, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial z_{23}} + \ldots + z_{3n}\frac{\partial}{\partial z_{2n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,\,n}}, \\ \bar{D}_1 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{12}} + \bar{z}_{23}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{13}} + \ldots + \bar{z}_{2n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{1n}}, \\ \bar{D}_2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{23}} + \ldots + \bar{z}_{3n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{2n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{D}_{n-2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1,\,n}}. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

IV. *L'espace F_α est l'ensemble de tous les polynômes en z_{jl}, $\bar{z}_{jl}$ qui vérifient les conditions*

$$\begin{aligned} &D_1^{r_1+1}f = 0, \quad D_2^{r_2+1}f = 0, \quad \ldots, \quad D_{n-1}^{r_{n-1}+1}f = 0, \\ &\bar{D}_1^{s_1+1}f = 0, \quad \bar{D}_2^{s_2+1}f = 0, \quad \ldots, \quad \bar{D}_{n-1}^{s_{n-1}+1}f = 0. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Au fait, on peut supposer que f est une fonction différentiable un nombre suffisant de fois. Dans ce cas aussi l'ensemble de toutes les fonctions vérifiant le système (2.5.9) s'avère être l'espace F_α.

Une autre description de l'espace F_α sera donnée plus loin, dans le § 3.

Remarque. L'application $z \to \overline{zg}$ est définie seulement pour $zg \in G_{rég}$. Cet inconvénient peut être éliminé si l'on considère, à la place de la fonction $f(z)$, $z \in Z_+$, la fonction $f(\tilde{z})$, où $\tilde{z}$ est une classe d'équivalence à droite:

$$\tilde{z} \in \tilde{Z} = G/K.$$

La classe $\tilde{z}$ est dite *régulière* si elle contient les matrices régulières g (dans ce cas, comme on le voit facilement, toutes les matrices de $\tilde{z}$ sont régulières), et *non régulière* dans le cas contraire. De la décomposition de Gauss (1.8.3) on tire immédiatement que:

V. *Chaque classe régulière $\tilde{z}$ contient exactement un élément $z \in Z_+$;*

) Pour la démonstration voir, par exemple, D. Jélobenko [1], chap. X, ou D. Jélobenko [1].

réciproquement, chaque élément $z \in Z_+$ *est contenu dans une seule classe régulière* $\tilde{z}$.

En identifiant chaque matrice $z \in Z_+$ avec la classe régulière qui la contient, nous obtiendrons une inclusion de Z_+ dans $\tilde{Z}$. Il est évident que $\tilde{Z}$ est un espace homogène relativement au groupe G qui agit suivant la formule

$$\tilde{z}\bar{g}_0 = \{g\}\bar{g}_0 = \{gg_0\} \tag{2.5.10}$$

(voir 2.6, chapitre III), et la transformation (2.5.10) est définie pour tous les $\tilde{z} \in \tilde{Z}$. Les éléments non réguliers de $\tilde{Z}$ peuvent alors être considérés comme des points à l'infini adjoints à Z_+.

Exercice. Trouver tous les éléments non réguliers de $\tilde{Z}$ pour $G = GL(2, \mathbf{C})$.

2.6. Réalisation des représentations dans l'espace des fonctions sur U. Servons-nous maintenant de la décomposition de Gram (1.9.7) à la place de la décomposition de Gauss. Si $f \in \Phi_\alpha$, alors en vertu de IV, 2.2, et de (1.9.7):

$$f(g) = f(\zeta \varepsilon u) = \alpha(\zeta\varepsilon) f(u) = \alpha(\varepsilon) f(u). \tag{2.6.1}$$

Il est évident que $f(u)$ en tant que restriction de f à U, est continue sur U, et l'application

$$f(g) \to f(u), \tag{2.6.2}$$

définie par la formule (2.6.1) est linéaire et bijective. Désignons par $\dot{F}_\alpha$ l'image de Φ_α par l'application (2.6.2) qui envoie la représentation $\dot{T}_\alpha$ sur une représentation équivalente dans $\dot{F}_\alpha$. Désignons à nouveau par $\dot{T}_\alpha$ cette représentation, et par $\dot{T}_\alpha(g)$ l'opérateur de la représentation $\dot{T}_\alpha$. En répétant le raisonnement employé pour obtenir la formule (2.3.5), nous voyons facilement que:

I. *Les opérateurs* $\dot{T}_\alpha(g)$ *de la représentation* $\dot{T}_\alpha$ *sont donnés par la formule*

$$T_\alpha(g_0) f(u) = \alpha(\varepsilon') f(u_{g_0}) \text{ si } ug_0 = \zeta_1 \varepsilon' u_{g_0}. \tag{2.6.3}$$

En outre, puisque $\Gamma = K \cap U$, on a en vertu de IV, 2.2:

II. *Les fonctions* $f \in \dot{F}_\alpha$ *vérifient la relation*

$$f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f(u). \tag{2.6.4}$$

La formule (2.6.3) est appelée *réalisation de la représentation irréductible du groupe* $GL(n, \mathbf{C})$ *dans l'espace des fonctions sur* U. Le fait que U est compact rend cette réalisation particulièrement commode dans nombre de cas pour une étude théorique des proprié-

tés de la représentation $\dot{T}_\alpha$. D'autre part, pour des études pratiques on préfère la réalisation sur Z_+, vu que les éléments de la matrice u s'expriment d'une manière compliquée en termes de paramètres indépendants.

§ 3. Décomposition d'une représentation de dimension finie du groupe GL (n, C) en représentations irréductibles

3.1. La méthode des Z-invariants. Soit T: $g \to T(g)$ une représentation du groupe $G = GL(n, \mathrm{C})$ dans un espace X de dimension finie. Le vecteur $x \in X$ s'appelle *Z-invariant* de la représentation T si

$$T(z)\, x = x \text{ pour tous les } z \in Z. \qquad (3.1.1)$$

Il est évident que les Z-invariants forment un sous-espace de X; nous le désignerons par Ω_T. En vertu de la définition donnée dans 2.1 (voir (2.1.2)), le Z-invariant $x \neq 0$ est un *vecteur de poids supérieur* si

$$T(\delta)\, x = \alpha(\delta)\, x \text{ pour tous les } \delta \in D, \qquad (3.1.2)$$

où $\alpha(\delta)$ est le poids supérieur. Désignons par $M(T)$ l'ensemble de tous les vecteurs x de Ω_T vérifiant la condition (3.1.2). Il est évident que $M_\alpha(T)$ est un sous-espace de Ω_T; sa dimension dim $M_\alpha(T)$ est appelée *multiplicité* du poids supérieur α dans la représentation T. Si en particulier X ne possède aucun vecteur de poids supérieur α, et seulement dans ce cas, dim $M_\alpha(T) = 0$.

I. *Soit T une représentation du groupe $G = GL(n, \mathrm{C})$ dans l'espace X de dimension finie. Si T est complètement réductible, alors la multiplicité avec laquelle la représentation irréductible T_α se rencontre dans T est égale à la multiplicité du poids supérieur α dans la représentation T*

D é m o n s t r a t i o n. Par hypothèse, T est complètement réductible. Il existe donc une décomposition

$$X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \ldots \dotplus X_n, \qquad (3.1.3)$$

dans laquelle chaque X_j est invariant relativement à T et la restriction $T_j = T|_{X_j}$ est irréductible. Soit α_j le poids supérieur de la représentation T_j, de sorte que $T_j \sim T_{\alpha_j}$. Supposons que $\alpha_j = \alpha$ pour $j = 1, \ldots, k$ et $\alpha_j \neq \alpha$ pour $j < k$. Alors la multiplicité avec laquelle T_α participe dans T est égale à k.

En vertu du théorème 1 de 2.1, chaque X_j, $j = 1, \ldots, k$ possède exactement un seul (à un facteur numérique près) vecteur x_j de poids α. Il est évident que tous les $x_j \in M_\alpha(T)$ sont linéairement indépendants, puisque $x_j \in X_j$ et les X_j, $j = 1, \ldots, k$, sont linéairement indépendants. Démontrons que les x_j, $j = 1, \ldots, k$, forment une base dans $M_\alpha(T)$. Cela signifiera que l'on a également dim $M_\alpha(T) = k$, et la proposition I sera démontrée.

Soit $x' \in M_\alpha (T)$. Alors, en vertu de (3.1.2) et (3.1.1),

$$T(\delta) x' = \alpha(\delta) x', \quad T(z) x' = x'. \tag{3.1.4}$$

D'autre part, il découle de (3.1.3) que

$$x' = \sum_{j=1}^{m} x'_j, \tag{3.1.5}$$

où $x'_j \in X_j$. En substituant dans (3.1.4), on obtient

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha(\delta) x'_j = \alpha(\delta) x' = \sum_{j=1}^{m} T(\delta) x'_j,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x'_j = x' = T(z) x' = \sum_{j=1}^{m} T(z) x'_j.$$

D'où

$$T(\delta) x'_j = \alpha(\delta) x'_j, \quad T(z) x'_j = x'_j\,; \tag{3.1.6}$$

par conséquent, si $x'_j \neq 0$, alors x'_j est un vecteur de poids supérieur $\alpha(\delta)$ de la représentation T_j dans X_j. Mais T_j possède dans X_j un seul vecteur (à un facteur numérique près) de poids supérieur et son poids est égal à $\alpha_j(\delta)$. Par conséquent, $x'_j = 0$ pour $\alpha_j \neq \alpha$, i. e. pour $j > k$ et $x'_j = c_j x_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$. Alors la relation (3.1.5) s'écrit comme $x' = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$; donc $\dim M_\alpha(T) = k$ et la proposition I est démontrée. On en déduit immédiatement la proposition suivante:

II. *Pour qu'une représentation complètement réductible T du groupe $G = GL(n, \mathbf{C})$ soit irréductible il faut et il suffit que l'espace X de cette représentation possède un seul (à un facteur numérique près) vecteur de poids supérieur.*

La nécessité découle du théorème 1 de 2.1; réciproquement, si X possède un seul vecteur de poids supérieur α, alors $\dim M_\alpha(T) = 1$, donc T contient seulement T_α et avec multiplicité 1, i.e. $T \sim T_\alpha$.

III. *Le nombre et la multiplicité des représentations irréductibles T_α entrant dans une représentation complètement réductible T du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ ne dépendent pas de la méthode de décomposition de T en représentations irréductibles.*

En effet, T_α entre dans T lorsqu'on a la condition $M_\alpha(T) \neq 0$, tandis que la multiplicité avec laquelle T_α apparaît dans T est égale à $\dim M_\alpha(T)$ (proposition I); d'autre part, $M_\alpha(T)$ ne dépend pas de la méthode de décomposition de T en représentations irréductibles.

Ainsi la proposition I fournit une méthode pratique de détermination de la famille T_α des représentations, avec leurs multipli-

cités en lesquelles se décompose une représentation T ; on l'appelle *méthode des Z-invariants*. Elle consiste à trouver d'abord l'espace Ω_T de tous les Z-invariants de la représentation T et ensuite à chercher dans Ω_T tous les sous-espaces $M_\alpha(T) \neq 0$.

La décomposition effective d'une représentation T du groupe G représente un problème beaucoup plus difficile, car sa solution n'est pas unique lorsque la multiplicité avec laquelle les représentations irréductibles entrent en T est supérieure à 1. Nous nous bornerons à une analyse de ce problème sur quelques exemples concrets.

3.2. Représentations analytiques du groupe $GL(n, C)$.

LEMME. *Soit V un voisinage de l'élément neutre du groupe $G = GL(n, C)$ déterminé par les conditions*

$$\sum_{j, l=1}^{n} |g_{jl} - \delta_{jl}|^2 < \varepsilon < 1, \tag{3.2.1}$$

où

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & si\ j = l, \\ 0 & si\ j \neq l; \end{cases}$$

et soit A l'ensemble de toutes les matrices complexes $a = (a_{jl})_{j,l=1}^{n}$. Alors l'image de A par l'application $a \to e^a$ contient V.

Démonstration. Considérons la série

$$a = (g-e) - \frac{1}{2}(g-e)^2 + \frac{1}{3}(g-e)^3 \ldots \tag{3.2.2}$$

En vertu de la condition (3.2.1) on a $|g - e| < \sqrt{\varepsilon}$; par conséquent, cette série converge absolument et pour la norme lorsque $g \in V$; désignons sa somme par $\ln g$. En vertu de la convergence absolue des séries correspondantes, on peut les manipuler de même que les séries numériques, et donc $e^a = e^{\ln g} = g$ pour $a = \ln g$.

Notons que lorsque la condition (3.2.1) est satisfaite, on a

$$|a| \leqslant |g-e| + \frac{1}{2}|g-e|^2 + \frac{1}{3}|g-e|^3 + \ldots$$
$$\ldots \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{2/2} + \varepsilon^{3/2} + \ldots = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.2.3}$$

La représentation $T: g \to T(g)$ du groupe $G = GL(n, C)$ dans un espace X de dimension finie est dite *analytique* si les éléments matriciaux de la représentation T relativement à une base donnée (et donc relativement à une base quelconque) sont des fonctions régulières analytiques des éléments matriciaux g_{jl}. On voit facilement que cette définition est en accord avec la définition de la représentation analytique irréductible donnée dans 2.5.

THÉORÈME 1. 1) *Chaque représentation analytique T de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est complètement réductible.*

2) *La restriction au groupe $U = U(n)$ d'une représentation analytique irréductible T de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est irréductible.*

Démonstration. a) Soient T une représentation analytique du groupe G dans un espace X de dimension finie, et Y un espace de dimension finie en dualité avec X relativement à une forme bilinéaire non dégénérée (x, y), $x \in M$, $y \in Y$.

Soit M un sous-espace de X invariant relativement à tous les $T(u)$, $u \in U$. Démontrons que M est également invariant relativement à tous les $T(g)$, $g \in G$.

Soit $N = M^{\perp}$ le complément orthogonal de M dans Y relativement à la forme (x, y); alors $M = N^{\perp}$ et

$$(T(u)\,x, y) = 0 \text{ pour tous les } x \in M,\ y \in N \tag{3.2.4}$$

car M est invariant relativement aux opérateurs $T(u)$, $u \in U$. Remarquons maintenant que la matrice $u \in U$ peut être représentée sous la forme $u = e^{ih}$, où h est une matrice hermitienne.

Pour déterminer la matrice u choisissons en guise de paramètres réels indépendants les nombres h_{jj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, et $b_{jl} = \operatorname{Re} h_{jl}$, $c_{jl} = \operatorname{Re} h_{jl}$ pour $j < l$, $1 \leqslant l = 2, \ldots, n$. Ces paramètres déterminent complètement la matrice h, et donc u. Par conséquent

$$\begin{aligned} h_{jl} &= b_{jl} + ic_{jl} \text{ si } j < l, \\ h_{jl} &= \overline{h}_{lj} = b_{lj} - ic_{lj} \text{ si } j > l. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Pour des valeurs complexes h_{jj}, b_{lj} et c_{jl}, la matrice $a = ih$ définie par la formule (3.2.5) est une matrice quelconque de A, donc les matrices de la forme $y = e^{ih}$ remplissent tout le voisinage V (voir le lemme); $(T(g)\,x, y)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des éléments matriciaux de l'opérateur $T(g)$ et donc, par hypothèse, elle est une fonction analytique régulière des éléments g_{jl}, et aussi des paramètres complexes h_{jj}, b_{lj}, c_{jl}. Mais pour des valeurs réelles de ces paramètres on a $g = u$ et, en vertu de (3.2.4),

$$(T(g)\,x, y) = (T(u)\,x, y) = 0 \text{ si } x \in M,\ y \in N.$$

Le principe d'unicité d'une fonction analytique permet d'en tirer

$$(T(g)\,x, y) = 0 \text{ si } x \in M,\ y \in N \tag{3.2.6}$$

pour toutes les valeurs complexes de la fonction analytique, et donc au moins pour tous les $g \in V$. On déduit de (3.2.6) que

$$T(g)\,M \subset M \text{ pour tous les } g \in V.$$

Mais alors

$T(g_1g_2) M = T(g_1) T(g_2) M \subset T(g_1) M$ pour tous les $g_1, g_2 \in V$, i.e.

$$T(g) M \subset M \text{ pour tous les } g \in V^2.$$

En répétant ce raisonnement, nous voyons que $T(g) M \subset M$ pour tous les $g \in V^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et donc pour tous les $g \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Mais $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = G$, car $G = GL(n, \mathbf{C})$ est connexe ; par conséquent M est invariant aussi relativement à tous les $g \in G$.

b) Soit à nouveau T une représentation analytique du groupe G dans un espace X de dimension finie. Sa restriction $u \to T(u)$ est une représentation du groupe compact U ; elle est donc complètement réductible. Par conséquent, il existe une décomposition $X = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_m$ telle que chaque X_j est invariant relativement à tous les $T(u)$ et la restriction de $T(u)$ à X_j est irréductible. D'après ce que nous avons démontré dans a), X_j est invariant aussi relativement à tous les $T(g)$, $g \in G$, et la restriction de $T(g)$ à X_j est irréductible, car même la restriction de $T(u)$ à X_j l'était. Ceci démontre l'assertion 1).

c) Supposons maintenant que T est irréductible. Admettons que sa restriction $u \to T(u)$, $u \in U$, est réductible. Alors il existe dans X un sous-espace $M \neq (0)$, $M \neq X$ invariant relativement à tous les $T(u)$, $u \in U$. D'après ce que nous avons démontré dans a), M est également invariant relativement à tous les $T(g)$, $g \in G$ ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de $T : g \to T(g)$. Nous avons démontré ainsi l'assertion 2).

Le raisonnement sur lequel nous avons axé la démonstration est un exemple de l'application au cas considéré d'une méthode générale appelée « méthode unitaire de H. Weyl » (elle sera exposée au chapitre XI).

Il découle du théorème 1 que toutes les assertions des propositions I à III de 3.1 sont valables pour une représentation analytique du groupe $GL(n, \mathbf{C})$. En particulier,

I. *La représentation analytique T du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ dans un espace X de dimension finie est irréductible si et seulement s'il existe dans X un seul (à un facteur numérique près) vecteur de poids supérieur de la représentation T.*

II. *Chaque représentation tensorielle du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est analytique et donc complètement réductible.*

Cette assertion découle directement des expressions des éléments matriciaux d'une représentation tensorielle (voir 2.6, chapitre I) et du théorème 1.

On déduit de II que toutes les assertions des propositions I à III de 3.1 sont valables pour les représentations tensorielles du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

Remarque 1. La condition d'analyticité est essentielle. Par exemple, la représentation

$$g \to \begin{Vmatrix} 1 & \ln|\det g| \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

n'est pas complètement réductible. D'autre part, la représentation

$$g \to \begin{Vmatrix} 1 & \ln \det g \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

est analytique, mais elle est multivaluée, parce que telle est la fonction $\ln \det g$. La fonction $\det g$ remplit le plan complexe dont on a éliminé le point 0 (i. e. l'ensemble $\mathbf{C}_0^1$ non simplement connexe); il est donc impossible de choisir une branche continue univoque de la fonction $\ln \det g$.

Remarque 2. En vertu de la relation $GL(n, \mathbf{C}) \sim \mathbf{C}_0^1 SL(n, \mathbf{C})$, toute représentation $T: g \to T(g)$ de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ peut être représentée sous la forme $T(g) = T_0(\tau) T_1(g)$ lorsque $g = \tau g_1$, $\tau \in \mathbf{C}_0^1$, $g_1 \in SL(n, \mathbf{C})$. Nous verrons plus loin (§ 3, chapitre X et 7.2, chapitre XI) que chaque représentation de dimension finie du groupe $SL(n, \mathbf{C})$ est complètement réductible; par conséquent, une réductibilité non complète des représentations du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ doit être portée sur le compte $\mathbf{C}_0^1$.

Remarque 3. La fonction $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ donnée dans le domaine V de $\mathbf{C}^n$ est dite *antianalytique* dans V si pour chaque point $(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ de ce domaine il existe un voisinage de ce point dans lequel

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1} a_{k_1, \ldots, k_n} (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1^0)^{k_1} \ldots (\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_0)^{k_n},$$

où la série dans le deuxième membre converge absolument. La représentation $T: g \to T(g)$ du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ dans un espace X de dimension finie est dite *antianalytique* si les éléments matriciaux de l'opérateur $T(g)$ dans une base donnée (et donc dans une base quelconque) de X sont des fonctions antianalytiques sur $GL(n, \mathbf{C})$ des éléments g_{jl} de la matrice g. Il est évident que cette définition s'accorde avec celle de la représentation irréductible antianalytique donnée plus haut dans 2.5. Il est également évident que le théorème d'unicité est valable aussi pour les fonctions antianalytiques, et donc les assertions du théorème 1 et des propositions I et II restent en vigueur pour les représentations antianalytiques.

3.3. Produit de Young. Appliquons maintenant les résultats de 3.2 aux représentations irréductibles du groupe GL (n, C). On déduit immédiatement des propositions I et II de 2.5 que

I. *Le produit $\alpha_1\alpha_2$ de deux caractères inductifs α_1, α_2 du groupe $G = GL\,(n, C)$ est également un caractère inductif de ce groupe.*

Par conséquent, $\alpha_1\alpha_2$ détermine aussi une représentation irréductible $T_{\alpha_1\alpha_2}$ de dimension finie du groupe G; on l'appelle *produit de Young* des représentations T_{α_1}, T_{α_2} et on la désigne par $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$. Dans de nombreuses réalisations l'espace de la représentation $T_{\alpha_1\alpha_2}$ se construit facilement à l'aide des espaces des représentations T_{α_1}, T_{α_2}. Considérons par exemple la réalisation dans l'espace Φ_α (2.3); alors:

II. *On a*

$$\Phi_{\alpha_1\alpha_2} = \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}, \tag{3.3.1}$$

où $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ désigne l'enveloppe linéaire de tous les produits de la forme $f_1(g)\,f_2(g)$, $f_1(g) \in \Phi_{\alpha_1}$, $f_2(g) \in \Phi_{\alpha_2}$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que T_{α_1} et T_{α_2} sont analytiques. L'espace $\Phi_{\alpha_1\alpha_2}$ est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha_1(gg_0)\,\alpha_2(gg_0)$, $g_0 \in G$, tandis que $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha_1(gg_1)\,\alpha_2(gg_2)$, $g_1, g_2 \in G$; par conséquent

$$\Phi_{\alpha_1\alpha_2} \subset \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}. \tag{3.3.2}$$

En posant $\alpha_1\alpha_2 = \alpha$ nous voyons que chaque fonction $f(g) = \alpha_1(gg_1)\,\alpha_2(gg_2)$ vérifie la condition

$$f(kg) = \alpha_1(kgg_1)\,\alpha_2(kgg_2) = \alpha_1(k)\,\alpha_2(k)\,\alpha_1(gg_1)\,\alpha_2(gg_2) = \alpha(k)\,f(g); \tag{3.3.3}$$

par conséquent cette condition est également vérifiée par chaque fonction $f(g) \in \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$.

En outre, il est évident que $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ est de dimension finie et invariant relativement aux translations à droite $g \to gg_0$. Définissons la représentation $T\colon g \to T(g)$ du groupe $G = GL\,(n, C)$ dans $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ suivant la formule:

$$T(g_0)\,f(g) = f(gg) \text{ si } f(g) \in \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}. \tag{3.3.4}$$

Il est évident que T est une représentation analytique dans $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$, et en vertu de VIII de 2.2 $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ contient un seul vecteur de poids supérieur; par conséquent (proposition I, 3.2) T est irréductible. Mais en vertu de (3.3.2) $\Phi_{\alpha_1\alpha_2}$ est un sous-espace dans $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$, et $\Phi_{\alpha_1\alpha_2} \neq (0)$; nous avons donc $\Phi_{\alpha_1\alpha_2} = \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ et (3.3.1) est démontrée pour les représentations analytiques; on la démontre d'une manière analogue pour les représentations antianalytiques. Si des

deux représentations l'une, T_{α_1}, est analytique et l'autre, T_{α_2}, antianalytique, la relation (3.3.1) est évidente, car dans ce cas $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$ coïncide avec le produit tensoriel $T_{\alpha_1} \otimes T_{\alpha_2}$ (voir II et III de 2.5). Il est aussi évident que le cas général se réduit aux cas particuliers déjà considérés, et la proposition II est démontrée.

Exercice. Démontrer qu'une relation analogue à (3.3.1) est valable pour les Z-réalisations et les U-réalisations des représentations irréductibles du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

3.4. Les représentations de base et leurs réalisations dans les espaces de tenseurs. Une représentation irréductible T_α est dite *de base* si dans sa signature un des nombres r_i ou s_i est égal à 1, tous les autres nombres étant nuls. Une représentation de base pour laquelle $r_i = 1$ sera désignée par d_i, si l'on a $s_i = 1$, la représentation correspondante sera désignée par $\bar{d}_i$. Convenons aussi de désigner par T_α^k le produit de Young de k facteurs T_α. Lorsqu'on multiplie les caractères, les signatures s'ajoutent, par conséquent pour une représentation T_α de signature $\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, 0, s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_{n-1}, 0\}$ nous avons la formule

$$T_\alpha = d_1^{r_1} d_2^{r_2} \ldots d_{n-1}^{r_{n-1}} \bar{d}_1^{s_1} \bar{d}_2^{s_2} \ldots \bar{d}_{n-1}^{s_{n-1}}. \qquad (3.4.1)$$

Dans le cas général il faut encore ajouter le facteur numérique $(\det g)^{p_n} \overline{(\det g)}^{q_n}$ (voir le théorème 5 de 2.5), de sorte que

$$T_\alpha = (\det g)^{p_n} \overline{(\det g)}^{q_n} d_1^{r_1} d_2^{r_2} \ldots d_{n-1}^{r_{n-1}} \bar{d}_1^{s_1} \bar{d}_2^{s_2} \ldots \bar{d}_{n-1}^{s_{n-1}}. \qquad (3.4.2)$$

Montrons maintenant comment réaliser les représentations de base dans l'espace de tenseurs. Considérons les tenseurs covariants de rang p. Chacun de ces tenseurs peut être envisagé comme une forme polylinéaire $f(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ de p variables indépendantes $\xi_j \in \mathbf{C}^n$, $j = 1, \ldots, p$; la représentation tensorielle correspondante, que nous désignerons par T_p, est donnée par la formule

$$T_p(g) f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 g, \ldots, \xi_p g), \qquad (3.4.3)$$

où $\xi_j g$ désigne le produit de la ligne $\xi_j = (\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn})$ par la matrice g. Un tenseur f est dit *symétrique* s'il ne change pas lorsqu'on change de place deux quelconques de ces arguments, et *antisymétrique* lorsque chacune de ces transpositions entraîne le changement de signe. Les tenseurs antisymétriques sont appelés *polyvecteurs*. Désignons par X_p l'espace de tous les polyvecteurs de rang p. Il est évident que X_p est un espace linéaire de dimension finie. Si un des coefficients $c_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ du polyvecteur f est donné, alors la propriété d'antisymétrie permet de connaître tous les coefficients qui s'obtiennent de $c_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ par permutation des indices. Par conséquent, pour donner un polyvecteur, il suffit de donner ses coefficients $c_{j_1 \ldots j_p}$ pour

$j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. D'où l'on tire: *les polyvecteurs* $e_{j_1 j_2 \ldots j_p}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, *pour lesquels* $c_{j_1 \ldots j_p} = 1$ *et* $c'_{j'_1 \ldots j'_p} = 0$ *pour les* $\{j'_1, \ldots, j'_p\}$ *que l'on ne peut obtenir de* $\{j_1, \ldots, j_p\}$ *par permutation, forment une base sur* X_p. Evidemment

$$e_{j_1 j_2 \ldots j_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_{1j_1} & \ldots & \xi_{1j_p} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{pj_1} & \ldots & \xi_{pj_p} \end{vmatrix}. \qquad (3.4.4)$$

En vertu de (3.4.3), chaque vecteur de base est un vecteur de poids, plus précisément

$$T_n(\delta)\, e_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_p} e_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \qquad (3.4.5)$$

et les poids $\lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_p}$ sont distincts pour des vecteurs de base différents. Par conséquent, X_p ne possède pas d'autres vecteurs de poids (à un coefficient numérique près). Mais parmi ces vecteurs, seul le vecteur

$$e_{12\ldots p} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1p} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{p1} & \ldots & \xi_{pp} \end{vmatrix}$$

est Z-invariant, de sorte que X_p possède un seul vecteur de poids supérieur, à un coefficient numérique près; par conséquent T_p est irréductible (II de 3.2; II de 3.1). Le poids supérieur correspondant sera $\alpha_p(\delta) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p = \Delta_p(g)$; cela signifie que dans la signature de la représentation T_p on a $r_p = 1$ tandis que tous les autres r_j, ainsi que tous les s_j, p_n, q_n, sont nuls. Ainsi les poids supérieurs des représentations d_p et T_p coïncident ce qui permet d'affirmer que ces représentations sont équivalentes. Nous avons démontré la proposition suivante:

I. *La représentation de base* d_p *du groupe* $G = GL(n, C)$ *est équivalente à sa représentation* T *dans l'espace* X_p *des polyvecteurs de rang* p, *qui agit suivant la formule*

$$T_p(g) f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 g, \ldots, \xi_p g), \; f \in X_p. \qquad (3.4.6)$$

La représentation $\overline{d}_p$ est le produit des applications $g \to \overline{g}$ et $\overline{g} \to d_p(\overline{g})$. Par conséquent,

II. *La représentation de base* $\overline{d}_p$ *du groupe* $G = GL(n, C)$ *est équivalente à sa représentation* $\overline{T}_p$ *dans l'espace* X_p *des polyvecteurs de rang* p, *qui agit suivant la formule*

$$\overline{T}_p(g) f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 \overline{g}, \ldots, \xi_p \overline{g}), \; f \in X_p. \qquad (3.4.7)$$

3.5. Décomposition de représentations tensorielles du groupe G **en représentations irréductibles.** Soit T une représentation tenso-

rielle du groupe $G = GL(n, \mathbf{C})$, i.e. T est le produit tensoriel de m copies de la représentation identique $g \to g$ du groupe G, où $m = 1, 2, \ldots$ Nous avons déjà noté dans II, 3.2, que la représentation T est analytique et complètement réductible, i.e. se décompose en une somme directe de représentations analytiques irréductibles. La signature de chaque représentation analytique irréductible S est de la forme $\{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n, 0, \ldots, 0\}$; désignons-la de façon concise par $[r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n]$; ici $r_1, \ldots, r_{n-1}$ sont des entiers non négatifs et p_n un entier. Posons $m_n = p_n$, $m_k = r_k + m_{k+1}$ pour $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Alors la suite des nombres $\beta = (m_1, \ldots, m_n)$ vérifie la condition $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$. Désignons dans ce cas la représentation analytique irréductible S du groupe G par $d(\beta)$. Soit H l'espace de la représentation T; on peut naturellement identifier l'espace H avec le produit tensoriel de m copies de l'espace $\mathbf{C}^n$. Soit $S(m)$ le groupe symétrique de rang m. Il est clair que les opérateurs de la représentation T sont permutables à chaque opérateur linéaire $\tilde{\sigma}$ de H, défini sur les éléments de la forme $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ par la formule $\tilde{\sigma}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$, où σ est un élément de $S(m)$, et prolongé par continuité à tout l'espace H. Prolongeons la représentation $\sigma \to \tilde{\sigma}$ à une représentation de l'algèbre de groupe $A = A_{S(m)}$ du groupe $S(m)$ sur l'espace H; cette représentation de l'algèbre A sera désignée par π.

Soit $m = m_1 + \ldots + m_h$ une décomposition du nombre m en une somme de h termes entiers naturels qui vérifient la condition $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_h$. Soient $\alpha = (m_1, \ldots, m_h)$, et Σ_α le diagramme de Young correspondant (voir 3.2, chapitre II). Soit ε_α l'élément de l'algèbre de groupe associé au diagramme Σ_α (voir 3.7, chapitre II). Désignons par $\varepsilon(\alpha)$ l'opérateur sur l'espace H qui est l'image de l'élément $\varepsilon_\alpha \in A$, i.e. $\varepsilon(\alpha) = \pi(\varepsilon_\alpha)$.

THÉORÈME. *Si dans une signature $\alpha = (m_1, \ldots, m_h)$ plus de n coordonnées sont non nulles, alors* $\varepsilon(\alpha) = 0$. *Si $h \leqslant n$, le sous-espace $H_\alpha = \varepsilon(\alpha) H$ est le sous-espace maximal de H où la représentation est multiple de la représentation irréductible $d(\tilde{\alpha})$; ici $\tilde{\alpha} = (m_1, m_2, \ldots, m_h, 0, \ldots, 0)$* *). *Par ailleurs la multiplicité correspondante $k(\tilde{\alpha})$ vérifie la condition $\mu(\tilde{\alpha}) k(\tilde{\alpha}) = m!$, où le nombre $\mu(\tilde{\alpha})$ a été défini par* (3.6.2), *chapitre* II.

Pour la démonstration, ainsi que pour les détails supplémentaires, voir H. Weyl [1] ou D. Jélobenko [1].

REMARQUE. Conformément au théorème 1 de 3.2, la représentation S_T du groupe $U(n)$ doit être irréductible, étant la restriction à ce groupe d'une représentation analytique irréductible T de dimen-

*) $\tilde{\alpha}$ est une ligne de n nombres; lorsque $h < n$ on complète la suite $(m_1, \ldots, m_h)$ en ajoutant des zéros.

sion finie du groupe $G = GL(n, C)$. Signalons que l'on peut ainsi obtenir toutes les représentations continues irréductibles de dimension finie du groupe U *).

En effet, envisageons l'ensemble A des combinaisons linéaires finies des éléments matriciaux des restrictions des représentations tensorielles du groupe G au sous-groupe U. Puisque la représentation identique du groupe G est un cas particulier de sa représentation tensorielle, tandis que la restriction de la représentation identique à G sépare les éléments de U, l'ensemble A sépare les éléments de U. En outre, le produit tensoriel des représentations tensorielles du groupe G est une représentation tensorielle du groupe G, d'où l'on tire facilement que A est une algèbre de fonctions sur U. Enfin, le lecteur vérifiera sans peine que la restriction de la représentation de base d_{n-1} au sous-groupe U est équivalente à la représentation $u \to \bar{u}$, où $\bar{u}$ est la matrice dont les éléments sont des conjugués complexes des éléments correspondants de la matrice u. D'où il découle, en vertu du théorème de Stone, que l'algèbre A est dense dans $C(U)$; alors on obtient du théorème de 2.8 du chapitre IV que l'ensemble des sous-représentations irréductibles des représentations S_T, où T parcourt l'ensemble des représentations tensorielles du groupe G, forme une famille complète de représentations unitaires irréductibles du groupe U.

Un raisonnement analogue nous montre que chaque groupe linéaire compact possède un système complet de représentations unitaires continues irréductibles, qui sont des sous-représentations de puissances tensorielles de la représentation identique de ce groupe.

*) Au chapitre XI nous obtiendrons un résultat analogue pour les groupes de Lie complexes semi-simples (voir IV, 8.2, chap. XI).

CHAPITRE VII

REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DES GROUPES COMPLEXES CLASSIQUES

§ 1. Les groupes complexes classiques

1.1. Définition des groupes complexes classiques. On appelle *groupes complexes classiques* les quatre familles de groupes suivantes :

1) Le groupe de toutes les transformations linéaires complexes unimodulaires (i.e. à déterminant égal à 1) de l'espace linéaire complexe X_{n+1} de dimension $n + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; il sera désigné par A_n. Il est évident que A_n est isomorphe à $SL(n + 1, \mathbf{C})$ et nous identifierons *) simplement A_n à $SL(n + 1, \mathbf{C})$; A_n s'appelle *groupe complexe unimodulaire d'ordre* $n + 1$.

2) Le groupe de toutes les transformations linéaires complexes unimodulaires de l'espace linéaire complexe X_{2n+1} de dimension impaire $2n + 1$, $n = 2, 3, \ldots$, qui laissent invariante une certaine forme bilinéaire symétrique non dégénérée φ sur X_{2n+1} ; ce groupe sera désigné par B_n et également par $SO(2n + 1, \mathbf{C})$; on l'appelle *groupe orthogonal complexe unimodulaire d'ordre* $2n + 1$.

3) Le groupe de toutes les transformations linéaires complexes unimodulaires de l'espace linéaire complexe X_{2n} de dimension paire $2n$, $n = 3, 4, \ldots$, qui laissent invariante une certaine forme bilinéaire symétrique non dégénérée φ sur X_{2n} ; ce groupe sera désigné par D_n ainsi que par $SO(2n, \mathbf{C})$; il s'appelle *groupe orthogonal complexe unimodulaire d'ordre* $2n$.

4) Le groupe de toutes les transformations linéaires complexes unimodulaires de l'espace linéaire complexe X_{2n} de dimension paire $2n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, qui laissent invariante une certaine forme bilinéaire antisymétrique φ sur X_{2n}. Ce groupe sera désigné par C_n ainsi que par $Sp(2n, \mathbf{C})$. On l'appelle *groupe complexe simplectique d'ordre* $2n$.

Comme nous verrons par la suite (§ 10, chapitre X), ces groupes et leurs représentations jouent un rôle important dans de nombreuses applications ainsi que dans l'étude de larges classes de groupes.

---

*) Comme précédemment (voir les exemples de 1.2, chapitre V), nous désignons par la même lettre g une matrice $g \in GL(n, \mathbf{C})$ et une application linéaire de X_n de matrice g dans une base fixe.

Pour une base donnée, les matrices dans les groupes B_n, D_n, C_n sont unimodulaires et on peut donc supposer que

$$B_n \subset SL(2n+1, C),\ D_n \subset SL(2n, C),\ C_n \subset SL(2n, C). \quad (1.1.1)$$

1.2. Choix de la base. Posons pour abréger $m = 2n$ dans le cas des groupes C_n, D_n et $m = 2n + 1$ dans le cas du groupe B_n. Choisissons une base de X_m de manière à ce que les matrices dans B_n, C_n, D_n aient la forme la plus simple. Désignons par s_0 la matrice de la forme φ dans une base quelconque. Dans le cas d'une forme φ symétrique choisissons une base $c_1, \ldots, c_m$ de manière à avoir $\varphi(x, y) = x_1y_m + x_2y_{m-1} + \ldots + x_my_1$, et, par conséquent, de sorte que la matrice s_0 soit, pour $m = 2n$, de la forme

$$s_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

où s_1 est la matrice suivante d'ordre n:

$$s_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|; \quad (1.2.1)$$

tandis que, dans le cas d'une forme φ antisymétrique, de manière à avoir

$$\varphi(x, y) = x_1y_m + x_2y_{m-1} + \ldots x_ny_{n+1} - x_{n+1}y_n - \ldots - x_my_1,$$

et donc

$$s_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 \end{matrix} \right\| \quad (1.2.2)$$

(voir N. Bourbaki [1]); la formule (1.2.1) contient le nombre 1 une fois dans chaque ligne et une fois dans chaque colonne.

Alors, en posant $(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_ky_k$ on obtient

$$\varphi(\xi, \eta) = (s_0x, y). \quad (1.2.3)$$

La forme φ doit être invariante relativement aux transformations g du groupe considéré; cela signifie que

$$(s_0gx, gy) = (s_0x, y). \quad (1.2.4)$$

D'où l'on tire que $g's_0g = s_0$, i.e.

$$g'^{-1} = s_0gs_0^{-1}, \quad (1.2.5)$$

où g' est la transposée de g.

Il est évident que la condition (1.2.5) est équivalente à chacune des conditions

$$g' s_0 g_0 s_0^{-1} = e, \qquad (1.2.6)$$

$$g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0. \qquad (1.2.7)$$

1.3. Principaux sous-groupes. Partout dans ce chapitre, nous désignerons par la lettre G un des groupes complexes classiques, et par m la dimension de l'espace dans lequel agissent les transformations du groupe G. Posons pour abréger

$$G_m = GL\,(m, \mathbf{C})$$

et désignons par H_m, Z_m^+, D_m, E_m, Z_m^-, K_m, U_m, Γ_m les sous-groupes de H, Z^+, D, E, Z^-, K, U, Γ construits dans le § 1 du chapitre VI pour le groupe G_m. Posons

$$H = G \cap H_m,\quad Z^+ = G \cap Z_m^+,\quad D = G \cap D_m,\quad Z^- = G \cap Z_m^-,$$
$$K = G \cap K_m,\quad U = G \cap U_m,\quad E = G \cap E_m,\quad \Gamma = G \cap \Gamma_m.$$

Nous allons montrer que, pour ces sous-groupes et pour le groupe G, on a des relations analogues à celles démontrées au § 1 du chapitre VI.

1.4. Décomposition des éléments du groupe *H*.

I. *Chaque élément $h \in H$ se met de manière unique sous la forme*

$$h = \delta z, \qquad \delta \in D, \quad z \in Z^+, \qquad (1.4.1)$$

et aussi sous la forme

$$h = z\delta, \qquad \delta \in D, \quad z \in Z^+. \qquad (1.4.2)$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que $G = SL\,(m, \mathbf{C})$. Alors G est constitué précisément par les éléments $g \in G_m$ pour lesquels on a $\det g = 1$. Puisque $h \in H_m$, on a en vertu de I, 1.7, chapitre VI, $h = \delta z$, $\delta \in D_m$, $z \in Z_m^+$, et cette décomposition est unique; il nous faut seulement montrer que δ, $z \in G$. Comme, évidemment, $\det z = 1$, alors $z \in G$. En outre, par hypothèse, $h \in G$. Par conséquent $1 = \det h = \det \delta \det z = \det \delta$ et $\delta \in G$. Ceci démontre (1.4.1); la relation (1.4.2) peut être démontrée d'une manière analogue.

Supposons maintenant que G est un groupe orthogonal ou simplectique. Alors $G \subset SL\,(m, \mathbf{C})$; par conséquent, dans la formule (1.4.1) on a $h \in SL\,(m, \mathbf{C})$ et, comme nous venons de le démontrer, δ, $z \in SL\,(m, \mathbf{C})$. En outre $h = s_0^{-1} h'^{-1} s_0$; en remplaçant ici h par δz nous obtenons

$$\delta z = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 s_0^{-1} z'^{-1} s_0. \qquad (1.4.3)$$

Mais comme on vérifie facilement $s_0^{-1}\delta'^{-1}s_0 \in D_m$, $s_0^{-1}z'^{-1}s_0 \in Z^+$. En vertu de l'unicité de la décomposition $h = \delta z$, $\delta \in D_m$, $z \in Z_m^+$,

on en déduit $\delta = s_0^{-1}\delta'^{-1}s_0$, $z = s_0^{-1}z'^{-1}s_0$. Par conséquent, $\delta \in D$, $z \in Z^+$ et (1.4.1) est démontré. La relation (1.4.2) se démontre d'une manière analogue.

1.5. Décomposition des éléments du groupe K.

I. *Chaque élément k du groupe K se met de manière unique sous la forme*

$$k = \delta\zeta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \tag{1.5.1}$$

et aussi sous la forme

$$k = \zeta\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-. \tag{1.5.2}$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition I de 1.4.

1.6. Décomposition de Gauss. Désignons par $\Delta_p(g)$ le mineur de la matrice g constitué par les éléments situés sur l'intersection de ses premières p lignes et ses premières g colonnes, et par $G_{\text{rég}}$ l'ensemble de tous les $g \in G$ pour lesquels

$$\Delta_p(g) \neq 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.6.1}$$

Evidemment

$$G_{\text{rég}} = G \cap G_{m\,\text{rég}}; \tag{1.6.2}$$

les matrices $g \in G_{\text{rég}}$ sont dites *régulières.*

I. *L'ensemble $G_{\text{rég}}$ est ouvert dans G et*

$$\overline{G}_{\text{rég}} = G. \tag{1.6.3}$$

D é m o n s t r a t i o n. La première assertion est évidente. Démontrons la seconde; remarquons tout d'abord qu'elle est évidente lorsque $G = A_n$.

Soit maintenant $G = B_n, C_n, D_n$. Posons pour $g \in G$

$$\Delta(g) = \Delta_1(g)\,\Delta_2(g)\ldots\Delta_n(g),$$
$$G_\Delta = \{g\colon\ g \in G,\ \Delta(g) = 0\}.$$

Il est clair que $G_{\text{rég}} \supset G \setminus G_\Delta$; il suffit donc de démontrer que $\overline{G \setminus G_\Delta} = G$. Notons pour cela que $e \in G \setminus G_\Delta$. D'autre part, si $\overline{G \setminus G_\Delta} \not\supset G$, il doit exister un ensemble ouvert non vide $U \subset G_\Delta$. Puisque Δ est un polynôme, on a alors $\Delta \equiv 0$ sur G, i.e. $G = G_\Delta$ ce qui est en contradiction avec la relation $e \in G \setminus G_\Delta$.

II. *Chaque matrice $g \in G_{\text{rég}}$ se met de manière unique sous la forme*

$$g = kz, \quad k \in K, \quad z \in Z^+. \tag{1.6.4}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de I, 1.8, chapitre VI, chaque matrice $g \in G_{\text{rég}}$ se met de façon unique sous la forme

$$g = kz, \quad k \in K_m, \quad z \in Z_m^+, \tag{1.6.5}$$

et il nous reste à démontrer que $k \in G$, $z \in G$. Dans le cas $G = A_n$ cela est évident. En effet, si $g \in A_n$, alors $1 = \det g = \det k \cdot \det z = \det k$.

Soit maintenant G un groupe simplectique ou orthogonal et $g \in G$; alors d'après (1.2.7) on a $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$. En substituant dans (1.6.5), on obtient

$$g = kz = s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \cdot s_0^{-1} z'^{-1} s_0.$$

Mais, comme on le vérifie facilement, $s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \in K_m$ et $s_0^{-1} z'^{-1} s_0 \in Z_m$. En vertu de l'unicité de la décomposition (1.6.5) on en tire $k = s_0^{-1} k'^{-1} s_0$, $z = s_0^{-1} z'^{-1} s_0$, i.e. $k \in K$, $z \in Z$.

En combinant II de 1.6 avec I de 1.5, on peut conclure:

III. *Chaque matrice $g \in G_{\text{rég}}$ se met de manière unique sous la forme*

$$g = \delta \zeta z, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \quad z \in Z^+. \tag{1.6.6}$$

et aussi sous la forme

$$g = \zeta \delta z, \quad \zeta \in Z^-, \quad \delta \in D, \quad z \in Z^+. \tag{1.6.7}$$

Chacune des décompositions (1.6.4), (1.6.6), (1.6.7) s'appelle *décomposition de Gauss dans G.*

Toute décomposition de Gauss dans G est également une décomposition de Gauss dans G_m, et donc les éléments des matrices k, z, δ, ζ de ces décompositions peuvent être calculés suivant les formules (1.8.10) à (1.8.15), chapitre VI.

1.7. Décomposition de Gram.

I. *Chaque élément $g \in G$ peut être représenté sous la forme*

$$g = ku, \qquad k \in K, \quad u \in U \tag{1.7.1}$$

Si $g = k_1 u_1$ est une autre décomposition de ce type, alors

$$k_1 = k\gamma, \quad u_1 = \gamma^{-1} u, \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{1.7.2}$$

Démonstration. En vertu de II, 1.9, chapitre VI,

$$g = ku, \quad k \in K_m, \qquad u \in U_m, \tag{1.7.3}$$

et si $g = k_1 u_1$ est une autre décomposition de ce type, alors

$$k_1 = k\gamma, \quad u_1 = \gamma^{-1} u, \qquad \gamma \in \Gamma_m.$$

Il nous reste donc à démontrer que l'on peut choisir k, $u \in G$ et alors on aura également $\gamma \in G$.

Notons tout d'abord que, par un choix approprié de γ dans (1.7.2), on peut trouver un k tel que

$$k_{pp} > 0 \tag{1.7.4}$$

et cette condition définit k de façon univoque. En posant $r = \det g$ nous voyons qu'alors

$$r = \prod_p k_{pp} > 0$$

En outre $|\det u| = 1$, de sorte que $\det u = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}^1$

Supposons d'abord que $G = A_n$ et $g \in G$. Alors en vertu de (1.7.3)

$$1 = \det g = \det k \cdot \det u = re^{i\varphi},$$

or ceci n'est possible que lorsque $r = 1$, $\varphi = 0$, i.e. $\det k = 1$, $\det u = 1$, i.e. lorsque $k, u \in A_n$.

Supposons maintenant que G est un groupe orthogonal ou simplectique, et $g \in G$. Alors $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$ (voir (1.2.7)). En substituant dans (1.7.3) nous obtenons

$$ku = s_0^{-1} k'^{-1} s_0 s_0^{-1} u'^{-1} s_0. \tag{1.7.5}$$

Nous allons supposer que k satisfait à la condition (1.7.4). Alors, comme on le vérifie aisément, on a $s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \in K$ et cet élément satisfait également à la condition (1.7.4). Mais cette condition détermine k dans (1.7.3) de manière unique. Par conséquent, $k = s_0^{-1} k'^{-1} s_0$ et donc $u = s_0^{-1} u'^{-1} s_0$, i.e. $k, u \in G$. Mais si l'on a également $g = k_1 u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, alors (1.7.2) est vérifié. Mais dans ce cas $\gamma = k_1^{-1} k \in G$, donc $\gamma = \Gamma_m \cap G = \Gamma$.

II. *Chaque élément $g \in G$ peut être représenté de manière unique sous la forme*

$$g = \varepsilon \zeta u, \qquad \varepsilon \in E, \quad \zeta \in Z^-, \quad u \in U. \tag{1.7.6}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de I on a (1.7.1), et il existe une matrice k, et une seule, qui satisfasse aux conditions (1.7.1) et (1.7.4). En vertu de I, 1.5,

$$k = \delta \zeta, \qquad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \tag{1.7.7}$$

où $\delta_{pp} = k_{pp} > 0$, donc $\delta \in E_m$ et l'on peut poser $\delta = \varepsilon$.

Mais alors $\varepsilon \in E_m \cap D \subset E_m \cap G = E$ et la proposition II est démontrée.

1.8. Paramètres indépendants du groupe Z^+.

a) L e g r o u p e u n i m o d u l a i r e ($G = SL(m, \mathbf{C})$). Dans ce cas $Z^+ = Z_m^+$, de sorte qu'en guise de paramètres indépendants on peut prendre z_{pq}, $p < q$. Par conséquent, Z^+ est homéomorphe à $\mathbf{C}^N$, où $N = \sum_{1 \leq p < q < m} 1$ et donc *le groupe $Z^+ = Z_m^+$ est connexe.*

b) Le groupe orthogonal d'ordre pair ($m = 2n$, $G = D_n$). Ecrivons chaque matrice $z \in Z^+$ sous la forme

$$z = \begin{Vmatrix} \eta & a \\ 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}, \qquad (1.8.1)$$

(où η_{-1}, η, a sont des matrices carrées d'ordre n et $\eta, \eta_{-1} \in Z^+_{A_{n-1}}$

Introduisons ensuite les matrices de la forme

$$x = \begin{Vmatrix} 1_n & \xi \\ 0 & 1_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}, \qquad (1.8.2)$$

où ξ est une matrice carrée d'ordre n, tandis que 1_n est la matrice unité d'ordre n.

I. *Chaque matrice $z \in Z^+$ se présente de manière unique sous la forme*

$$z = xy, \qquad (1.8.3)$$

où l'on a également $x, y \in Z^+$.

Démonstration. En multipliant les matrices x et y de (1.8.2), on obtient

$$xy = \begin{Vmatrix} \eta & \xi\eta_{-1} \\ 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}. \qquad (1.8.4)$$

Cette matrice coïncide avec z de (1.8.1) lorsque $\xi\eta_{-1} = a$, i.e. lorsque $\xi = a\eta_{-1}^{-1}$, d'où l'on déduit que la décomposition (1.8.3) existe et est unique. Il reste à démontrer que $x, y \in G$.

Puisque $z = xy \in G$, on a en vertu de (1.2.7)

$$z = xy = s_0^{-1}x'^{-1}s_0 s_0^{-1}y'^{-1}s_0. \qquad (1.8.5)$$

On vérifie facilement que $s_0^{-1}x'^{-1}s_0$ et $s_0^{-1}y'^{-1}s_0$ sont également des matrices de la forme x et y. Par conséquent, on tire de (1.8.5) et de l'unicité de la décomposition (1.8.3) que

$$s_0^{-1}x'^{-1}s_0 = x, \quad s_0^{-1}y'^{-1}s_0 = y, \qquad (1.8.6)$$

i.e. $x, y \in G$.

Voyons maintenant à quelles conditions les matrices de la forme x et y appartiennent à G. Rappelons que

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (1.8.7)$$

où s_1 est la matrice suivante d'ordre n:

$$s_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & . & . & . & . \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (1.8.8)$$

En remplaçant x, y et s_0 dans les conditions (1.8.6) par leurs expressions (1.8.2) et (1.8.7) et en multipliant les matrices des premiers membres des égalités obtenues, nous obtenons que les conditions (1.8.6) sont équivalentes au système d'égalités

$$\xi = -s_1^{-1}\xi' s_1, \tag{1.8.9}$$

$$\eta = s_1^{-1}\eta_{-1}'^{-1} s_1, \tag{1.8.10}$$

$$\eta_{-1} = s_1^{-1}\eta'^{-1} s_1. \tag{1.8.11}$$

On voit facilement que la condition (1.8.11) est équivalente à la condition (1.8.10).

On tire de la condition (1.8.11) que les matrices η et η_{-1} ne sont pas indépendantes. C'est-à-dire que la formule (1.8.11) définit uniquement η_{-1} lorsque la matrice $\eta \in Z^+_{A_{n-1}}$ est donnée. La condition (1.8.9) peut s'écrire sous une forme plus commode si l'on pose $\hat{\xi} = s_1\xi$. En effectuant cette substitution dans la condition (1.8.9) nous voyons que la condition considérée est équivalente à $\hat{\xi}' = -\hat{\xi}$, i.e. $\hat{\xi}$ est une matrice antisymétrique. Ainsi,

II. *Les « paramètres » indépendants dans Z^+ sont:* a) *la matrice $\eta \in Z^+_{A_{n-1}}$;* b) *la matrice antisymétrique $\hat{\xi}$ d'ordre n.*

La matrice $z \in Z^+$ s'exprime en termes de paramètres suivant la formule

$$z = \begin{Vmatrix} \eta_1 & s_1^{-1}\hat{\xi}\eta \\ 0 & \eta \end{Vmatrix}, \quad \text{où } \eta_1 = s_1^{-1}\eta'^{-1}s_1. \tag{1.8.12}$$

Soit $\hat{X}$ l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques d'ordre n. Il est évident que les formules (1.8.12) définissent une application bijective et continue dans les deux sens, i.e. un homéomorphisme de l'espace $Z^+_{A_{n-1}} \times \hat{X}$ sur l'espace Z^+; par conséquent,

III. *L'espace Z^+ est homéomorphe à l'espace $Z^+_{A_{n-1}} \times \hat{X}$.*

Le fait que la matrice $\hat{\xi}$ est antisymétrique signifie que

$$\hat{\xi}_{pq} = -\hat{\xi}_{qp}. \tag{1.8.13}$$

D'où l'on voit que $\hat{\xi}_{pp} = 0$ et les $\hat{\xi}_{pq}$, $p < q$, par exemple, peuvent être choisis arbitrairement; alors les $\hat{\xi}_{pq}$ pour $p > q$ se déterminent à l'aide de la condition (1.8.13). Par conséquent, $\hat{X}$ est homéomorphe à $\mathbf{C}^N$, où $N = \sum_{1 \leq p < q < n} 1$, et donc $\hat{X}$ est connexe. Puisque $Z^+_{A_{n-1}}$ est également connexe, on tire de III la proposition suivante:

IV. *Dans le cas $G = D_n$ le groupe Z^+ est connexe.*

c) L e g r o u p e s i m p l e c t i q u e ($G = C_n$). Tous les raisonnements précédents s'appliquent au cas considéré presque

mot pour mot. La seule différence est que maintenant

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

où s_1 est à nouveau donné par la formule (1.8.8); par conséquent, $\hat{\xi}$ est maintenant symétrique. D'où l'on tire:

V. *Le groupe Z^+ est connexe lorsque $G = C_n$.*

d) Le groupe orthogonal d'ordre impair ($G = B_n$, $m = 2n + 1$). Ecrivons les matrices $z \in Z$ sous la forme:

$$z = \begin{Vmatrix} \eta & \lambda & a \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}$$

où η, η_{-1}, a sont les mêmes que dans b), tandis que μ et λ sont une ligne et une colonne de n nombres. En raisonnant de même que dans b), nous voyons que pour $z \in Z^+$ on a la décomposition

$$z = xy, \tag{1.8.14}$$

où x et y sont des matrices de Z^+ de la forme

$$x = \begin{Vmatrix} 1_n & \eta_0 & \xi \\ 0 & 1 & \xi_0 \\ 0 & 0 & 1_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}. \tag{1.8.15}$$

En outre, la matrice s_0 peut se mettre sous la forme

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.8.16}$$

où s_1 est à nouveau donné par la formule (1.8.8). Alors en multipliant les matrices, on tire de la condition x, $y \in Z^+$

$$\eta = s_1^{-1} \eta_{-1}'^{-1} s_1, \quad \eta_0 = -s_1 \xi_0', \quad s_1 \xi' + \xi s_1 + \eta_0 \eta_0' = 0. \tag{1.8.17}$$

La dernière des égalités (1.8.17) signifie que la matrice $\hat{\xi} = \xi s_1 + (1/2)\, \eta_0 \eta_0'$ est antisymétrique. Par conséquent,

VI. *Dans le cas $G = B_n$, chaque matrice $z \in Z^+$ est définie par les « paramètres » indépendants suivants: une matrice $\eta \in Z_{A_{n-1}}$, une matrice antisymetrique $\hat{\xi}$ d'ordre n et une ligne ξ_0 de n nombres.*

D'où l'on conclut :

VII. *Lorsque $G = B_n$, le groupe Z^+ est connexe.*

En réunissant les propositions a), IV, V et VII de 1.8, nous voyons que:

VIII. *Pour chaque groupe complexe classique G le groupe Z^+ est connexe.*

1.9. Le groupe Z^-. Ce groupe est l'image du groupe Z^+ par l'homéomorphisme $g \to g'$. On tire des résultats de 1.8 :

I. *Pour chaque groupe complexe classique G le groupe Z^- est connexe.*

1.10. Paramètres indépendants dans le groupe D.

a) Le groupe unimodulaire ($G = SL(n, \mathbf{C})$). Dans ce cas la matrice

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

satisfait à la condition unique $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = 1$, de sorte que l'on peut prendre en guise de paramètres indépendants $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ par exemple, où l'on a $\lambda_j \in \mathbf{C}_0^1$, $j = 1, \dots, n-1$. Lorsqu'on multiplie deux matrices δ, les paramètres correspondants sont multipliés, donc :

I. *Dans le cas $G = SL(n, \mathbf{C})$, le groupe D est topologiquement isomorphe au groupe $\mathbf{C}_0^{n-1}$; il est donc connexe.*

b) Pour les autres groupes complexes classiques la condition $\delta'^{-1} = s_0\delta s_0^{-1}$ signifie que

$$\lambda_{m-\nu} = \lambda_{\nu+1}^{-1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \qquad (1.10.1)$$

Dans le cas d un groupe orthogonal d'ordre impair, on tire en particulier de (1.10.1) que $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^{-1}$; par conséquent, $\lambda_{n+1} = \pm 1$. Mais il découle de la condition $\det \delta = 1$ et des autres conditions (1.10.1) que $\lambda_{n+1} = 1$. Ainsi on a :

II. *Pour les groupes B_n, C_n, D_n, on peut prendre pour paramètres indépendants du groupe D les éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}_0^1$.*

Lorsqu'on multiplie les éléments du groupe D leurs éléments diagonaux correspondants se multiplient entre eux ; donc :

III. *Pour les groupes B_n, C_n, D_n le groupe D est topologiquement isomorphe au groupe $\mathbf{C}_0^n$, il est donc connexe.*

En réunissant les propositions I et III, nous obtenons

IV. *Pour chacun des groupes complexes classiques le groupe D est connexe.*

1.11. Connexité du groupe K.

I. *Pour chaque groupe complexe classique G le groupe K est connexe.*

Cette assertion découle directement de la relation $K = DZ^-$ (voir (1.5.1)) et de la connexité des groupes D et Z^- (II, 1.2, chapitre V).

1.12. Connexité du groupe H.

Le groupe H est l'image du groupe K par l'application $g \to g'$; comme cette application est un homéomorphisme, on peut affirmer que

I. *Le groupe H est connexe.*

1.13. Connexité des groupes complexes classiques.

I. *Chaque groupe complexe classique G est connexe.*

Démonstration. En vertu de la décomposition de Gauss on a $G_{rég} = KZ^+$, mais K et Z^+ sont connexes, donc $G_{rég}$ est connexe (II, 1.2, chapitre V); par conséquent, $G = \overline{G}_{rég}$ est également connexe (IV, 1.1, chapitre V).

1.14. Connexité du groupe U.

I. *Pour chaque groupe complexe classique G le groupe U est connexe.*

Démonstration. D'après la décomposition de Cramer (1.7.6), l'application $\varepsilon \times \zeta \times u \to \varepsilon\zeta u = g$ est une bijection continue de l'espace $E \times Z^- \times U$ sur G. L'application inverse est également continue; ceci découle des formules pour ε, ζ, u que l'on obtient en appliquant le procédé d'orthogonalisation (voir la déduction de la décomposition de Cramer dans l'exemple 10, 1.2, chapitre V). Par conséquent, l'application $\varepsilon \times \zeta \times u \to \varepsilon\zeta u$ est un homéomorphisme de l'espace $E \times Z^- \times U$ sur G. Mais G est connexe (I, 1.13); par conséquent, $E \times Z^- \times U$ et donc U (XII, 1.1, chapitre V) sont connexes.

§ 2. Représentations continues de dimension finie des groupes classiques complexes

2.1. Vecteurs de poids et poids d'une représentation. Notre étude des représentations de dimension finie du groupe linéaire général (voir chapitre VI) était surtout basée sur sa décomposition de Gauss. Puisque la décomposition de Gauss existe pour chacun des groupes complexes classiques G (voir II et III, 1.6), tous les résultats concernant la description des représentations irréductibles de dimension finie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ peuvent être étendus à ces groupes à l'aide des caractères inductifs de $GL(n, \mathbf{C})$. Nous donnerons donc l'énoncé de ces résultats sans démonstration, et exposerons plus en détail les questions concernant la détermination des caractères inductifs des groupes de différentes classes, car c'est là que se manifestent les traits spécifiques de chaque groupe.

Soit T une représentation du groupe G dans un espace X de dimension finie. Le vecteur $x \in X$, $x \neq 0$, s'appelle *vecteur de poids* de la représentation T, et la fonction $\nu(\delta)$ poids du vecteur x, si

$$T(\delta)\, x = \nu(\delta)\, x \quad \text{quel que soit} \quad \delta \in D. \tag{2.1.1}$$

Il est évident que $\nu(\delta)$ est un caractère du groupe D. Le vecteur de poids x de la représentation T s'appelle *vecteur de poids supérieur* si

$$T(z)\, x = x \quad \text{pour tout} \quad z \in Z^+, \tag{2.1.2}$$

et *vecteur de poids inférieur* si

$$T(\zeta)\, x = x \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in Z^- \tag{2.1.3}$$

THÉORÈME 1. 1) *L'espace X de chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe G contient un vecteur de poids supérieur et un vecteur de poids inférieur.*

2) *Si en outre T est irréductible, alors X contient un seul (à un facteur numérique près) vecteur de poids supérieur et un seul (à un facteur numérique près) vecteur de poids inférieur.*

L'assertion 1) découle directement du théorème de Lie (voir 3.1, chapitre V) appliqué aux représentations $T|_K$, $T|_H$, puisque K et H sont des sous-groupes des groupes résolubles K_m et H_m et sont donc également résolubles, et en outre connexes (I de 1.11 ; I de 1.12).

La démonstration de l'assertion 2) répète mot pour mot celle de l'assertion analogue du théorème I, 2.1, chapitre VI. Le poids du vecteur de poids supérieur d'une représentation irréductible s'appelle *poids supérieur* de cette représentation.

Le caractère $\alpha(\delta)$ du groupe D est dit *inductif relativement à G* si :

1) la fonction $\alpha(g) = \alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta)$ définie pour $g = \delta\zeta z \in G_{\text{rég}}$ se prolonge à une fonction continue $\alpha(g)$ sur tout le groupe G ;

2) l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(gg_0)$, $g \in G$, est de dimension finie.

THÉORÈME 2. 1) *Le caractère $\alpha(\delta)$ du groupe D est le poids supérieur d'une représentation irréductible du groupe G si et seulement si $\alpha(\delta)$ est inductif relativement à G.*

2) *Deux représentations irréductibles de dimension finie du groupe G sont équivalentes si et seulement si leurs poids supérieurs coïncident.*

3) *Une représentation irréductible T de dimension finie du groupe G à poids supérieur α est équivalente à la représentation T_α de ce groupe construite de la manière suivante :*

a) *l'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$;*

b) *pour $f(g) \in X_\alpha$ on a*

$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0). \tag{2.1.4}$$

La représentation T_α s'appelle *réalisation canonique de la représentation irréductible à poids supérieur* α, tandis que la fonction $\alpha(g)$

construite d'après le caractère inductif $\alpha(\delta)$ s'appelle *fonction génératrice de la représentation* T_α.

En appliquant maintenant la décomposition de Gauss (voir 1.6) et en répétant le raisonnement de 2.3, chapitre VI, nous obtenons la réalisation suivante de la représentation T_α dans l'espace des fonctions sur le groupe Z^+:

THÉORÈME 3. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie du groupe G est équivalente à la représentation T_α définie de la manière suivante:*

1) *l'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire des fonctions $\alpha(zg)$, $g \in G$, où $\alpha(g)$ est une fonction génératrice définie par le poids supérieur α de la représentation T;*

2) *les opérateurs de la représentation T_α sont donnés par la formule*

$$(T_\alpha(g) f)(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}).$$

Enfin, en nous servant de la décomposition de Gram, nous obtenons la réalisation suivante de la représentation T_α dans l'espace des fonctions sur le groupe U:

L'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(ug)$, $g \in G$, et les opérateurs de la représentation sont donnés par la formule

$$(T_\alpha(g) f)(u) = \alpha(\varepsilon') f(u_g) \quad pour \quad ug = \varepsilon' \zeta u_g,$$
$$\varepsilon' \in E, \quad \zeta \in Z^-, \quad u_g \in U.$$

Pour obtenir une description définitive des représentations T_α il reste à déterminer les caractères inductifs du groupe G considéré.

Les matrices δ du groupe D sont données par leurs éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et l'application $\delta \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un isomorphisme topologique du groupe D sur C_0^n (I, 1.10). Par conséquent, chaque caractère $\alpha(\delta)$ du groupe D est de la forme

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1} \bar{\lambda}_1^{q_1} \lambda_2^{p_2} \bar{\lambda}_2^{q_2} \ldots \lambda_n^{p_n} \bar{\lambda}_n^{q_n}, \tag{2.1.5}$$

où $p_1 - q_1$, $p_2 - q_2$, $\ldots$, $p_n - q_n$ sont des nombres entiers; la suite $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ s'appelle *signature* du caractère $\alpha(\delta)$. Si $\alpha(\delta)$ est inductif, alors sa signature est également appelée signature de la représentation T_α qu'il définit. Il nous reste à déterminer, pour chacun des groupes classiques, pour quelles signatures le caractère $\alpha(\delta)$ est inductif.

2.2. Le groupe unimodulaire ($G = A_n$). En reprenant les raisonnements de 2.5, chapitre VI, nous obtenons:

I. *Le caractère $\alpha(\delta)$ du groupe $D \subset A_n$ est inductif si et seulement si sa signature $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ est telle que les nombres*

$$p_1 - p_2,\ p_2 - p_3, \ldots, p_n,\quad q_1 - q_2,\ q_2 - q_3, \ldots, q_n \tag{2.2.3}$$

sont des entiers non négatifs.

En vertu des formules (1.6.4), (1.8.10) du chapitre VI et (2.1.5), on a pour $g = \delta\zeta z$

$$\alpha(g) = \alpha(\delta) =$$

$$= \Delta_1(g)^{p_1}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1}\left(\frac{\Delta_2(g)}{\Delta_1(g)}\right)^{p_2}\left(\frac{\overline{\Delta_2(g)}}{\overline{\Delta_1(g)}}\right)^{q_2}\ldots\Delta_n(g)^{p_n}(\Delta_n(g))^{q_n} =$$

$$= \Delta_1(g)^{r_1}\overline{\Delta_1(g)}^{s_1}\Delta_2(g)^{r_2}\overline{(\Delta_2(g))}^{s_2}\ldots(\Delta_n(g))^{r_n}(\Delta_n(g))^{s_n}, \quad (2.2.4)$$

où l'on a désigné

$$r_1 = p_1 - p_2,\ s_1 = q_1 - q_2,\ \ldots,\ r_n = p_n,\ s_n = q_n. \quad (2.2.5)$$

En vertu de la proposition I, les nombres $r_1, s_1, \ldots, r_n, s_n$ sont des entiers non négatifs, et l'on peut donc tirer de (2.2.4) que:

II. *Le caractère inductif $\alpha(g)$ du groupe A_n est un polynôme de degré $\leqslant r_1 + \ldots + r_n = p_1$ en g_{jl} et de degré $\leqslant s_1 + \ldots + s_n =$* $= q_1$ en $\bar{g}_{jl}$.

En réunissant le théorème 2 de 2.1 avec la proposition I nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 1. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe $A_n = SL(n+1, \mathbf{C})$ est déterminee par le système de nombres entiers*

$$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \quad (2.2.6)$$

tels que

$$\begin{matrix} p_1 - p_2 \geqslant 0,\ p_2 - p_3 \geqslant 0,\ \ldots,\ p_n \geqslant 0, \\ q_1 - q_2 \geqslant 0,\ q_2 - q_3 \geqslant 0,\ \ldots,\ q_n \geqslant 0. \end{matrix} \quad (2.2.7)$$

Une représentation T_α avec un système (2.2.6) donné se réalise (à une équivalence près) de la manière suivante. L'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(gg_1)$, $g_1 \in A_n$, où

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1-q_2}\Delta_2(g)^{p_2-p_3}\overline{\Delta_2(g)}^{q_2-q_3}\ldots$$

$$\ldots\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n} \quad (2.2.8)$$

est la fonction génératrice de la représentation T_α, tandis que les opérateurs $T_\alpha(g)$ sont donnés par la formule

$$T_\alpha(g_0)f(g) = f(gg_0). \quad (2.2.9)$$

En nous servant de la décomposition de Gauss, nous obtenons la réalisation suivante de la représentation T_α dans l'espace des fonctions sur Z^+:

III. *L'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(zg)$, $g \in G$, et les opérateurs de la représentation*

se définissent par la formule

$$T_\alpha(g) f(z) = \Delta_1(zg)^{p_1-p_2} \overline{\Delta_1(zg)}^{q_1-q_2} \Delta_2(zg)^{p_2-p_3} \overline{\Delta_2(zg)}^{q_2-q_3} \ldots$$

$$\ldots \Delta_n(zg)^{p_n} \overline{\Delta_n(zg)}^{q_n} f(z\bar{g}), \qquad (2.2.10)$$

où $z\bar{g} \in Z^+$ *se détermine d'après la décomposition de Gauss* $zg = kz\bar{g}$.

D'une manière analogue, en utilisant la décomposition de Gram, nous obtenons la réalisation T_α dans l'espace des fonctions sur le groupe U.

En comparant le théorème 1 de 2.1, avec le théorème 5 de 2.5, chapitre VI, nous aboutissons à la proposition suivante:

IV. *Chaque représentation irréductible du groupe* $SL(n+1, \mathbf{C})$ *est la restriction sur ce groupe d'une certaine représentation irréductible du groupe* $GL(n+1, \mathbf{C})$.

2.3. Le groupe simplectique ($G = C_n$).

I. *Le caractère* $\alpha(\delta)$ *du groupe* $D \subset C_n$ *est inductif relativement à* C_n *si et seulement si sa signature est telle que les nombres*

$$p_1 - p_2,\ p_2 - p_3,\ \ldots,\ p_n,\ q_1 - q_2,\ q_2 - q_3,\ \ldots,\ q_n \qquad (2.3.1)$$

sont des entiers non négatifs.

Démonstration. Posons $G = C_n$ et désignons par G_0 l'ensemble des matrices de la forme

$$g_0 = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & s_1^{-1} a'^{-1} s_1 \end{Vmatrix}, \qquad (2.3.2)$$

où $a \in A_{n-1} = GL(n, \mathbf{C})$, et s_1 est de la forme (1.2.1). Posons maintenant $D_0 = G_0 \cap D$. En multipliant les matrices, on vérifie aisément que $G_0 \subset C_n$ et que l'application $g_0 \to a$ est l'isomorphisme topologique du groupe G_0 sur $GL(n, \mathbf{C})$ qui envoie D_0 sur le groupe D_n pour $GL(n, \mathbf{C})$. Supposons que le caractère $\alpha(\alpha)$ du groupe D est inductif relativement à G; en vertu du lemme de 2.5, chapitre VI, sa restriction $\alpha_0(\delta_0)$ à D_0 est un caractère inductif relativement à G_0. L'isomorphisme signalé ci-dessus permet d'affirmer que $\alpha_0(\delta_0)$ est le caractère inductif du groupe D_n pour $GL(n, \mathbf{C})$. Cette restriction est de la forme

$$\alpha_0(\delta_0) = \lambda_1^{p_1} \bar{\lambda}_1^{q_1} \lambda_2^{p_2} \bar{\lambda}_2^{q_2} \ldots \lambda_n^{p_n} \bar{\lambda}_n^{q_n}$$

pour

$$\delta = \begin{Vmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & s_1^{-1} \delta_0'^{-1} s_1 \end{Vmatrix}, \qquad \delta_0 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \lambda_n^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_1^{-1} \end{Vmatrix}.$$

D'où l'on tire en vertu de I de 2.5 que

$$p_1 - p_2,\ p_2 - p_3,\ \ldots,\ p_{n-1} - p_n,\ q_1 - q_2,\ q_2 - q_3,\ \ldots,\ q_{n-1} - q_n$$

sont des nombres entiers non négatifs.

Désignons maintenant par G_0 l'ensemble de toutes les matrices

$$g_1 = \begin{Vmatrix} 1_{n-1} & & \\ & a & \\ & & 1_{n-1} \end{Vmatrix},$$

où $a \in SL(2, \mathbf{C})$ et les endroits vides sont des zéros ; écrivons ensuite s_0 sous la forme

$$s_0 = \begin{Vmatrix} & & -s \\ & \sigma & \\ s & & \end{Vmatrix}, \qquad (2.3.3)$$

où

$$\sigma = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad s = \begin{Vmatrix} 0 & -1_{n-1} \\ 1_{n-1} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.3.4)$$

et les endroits vides dans (2.3.3.) sont des zéros. Posons $D_0 = D \cap G_0$. En multipliant directement les matrices on s'aperçoit que : 1) $g_1'^{-1} = s_0 g_1 s_0^{-1}$, i.e. $g_1 \in C_n$; 2) G_0 est un sous-groupe du groupe C_n ; 3) l'application $g_1 \to a$ est un isomorphisme topologique du groupe G_0 sur $SL(2, \mathbf{C})$ qui envoie D_0 dans le groupe D pour $SL(2, \mathbf{C})$.

En vertu du lemme de 2.5, chapitre VI, la restriction $\alpha_0(\delta_0)$ du caractère inductif $\alpha(\delta)$ du groupe D relativement à G est un caractère inductif relativement à $SL(2, \mathbf{C})$. Cette restriction est de la forme

$$\alpha_0(\delta_0) = \lambda_n^{p_n} \bar{\lambda}_n^{q_n},$$

d'où l'on obtient, en vertu de I de 2.2, que p_n, q_n sont également des nombres entiers non négatifs. En définitive, les nombres

$$p_1 - p_2,\ p_2 - p_3,\ \ldots,\ p_n,\quad q_1 - q_2,\ q_2 - q_3,\ \ldots,\ q_n$$

sont des entiers non négatifs. Ainsi la nécessité de la condition (2.3.1) est démontrée. Réciproquement, si l'on a (2.3.1), alors

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1 - p_2} \overline{\Delta_1(g)}^{q_1 - q_2} \Delta_2(g)^{p_2 - p_3} \overline{\Delta_2(g)}^{q_2 - q_3} \ldots \Delta_n(g)^{p_n} \overline{\Delta_n(g)}^{q_n}$$

est un polynôme de degré $\leqslant p_1$ en g_{jl} et de degré $\leqslant q_1$ en $\bar{g}_{jl}$. D'où l'on tire l'inductivité du caractère $\alpha(\delta)$ relativement à C_n. La proposition I et le théorème 2 de 2.1 entraînent le

THÉORÈME 2. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe $C_n = Sp(2n, \mathbf{C})$ se détermine par un système de nombres entiers*

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\quad q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n, \qquad (2.3.5)$$

qui vérifient les conditions

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0, \quad q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0.$$

La représentation T_α avec un système (2.3.5) donné se réalise, à une équivalence près, de la manière suivante: l'espace X_α de la représentation est l'enveloppe linéaire des fonctions $\alpha(gg_1)$, $g_1 \in C_n$, où

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\,\overline{\Delta_1(g)}^{q_1-q_2}\,\Delta_2(g)^{p_2-p_3}\,\overline{\Delta_2(g)}^{q_2-q_3}\ldots$$

$$\ldots\,\Delta_n(g)^{p_n}\,\overline{\Delta_n(g)}^{q_n} \qquad (2.3.6)$$

est la fonction génératrice de la représentation, tandis que ses opérateurs $T_\alpha(g)$ sont donnés par la formule

$$T_\alpha(g_0)\,f(g) = f(gg_0). \qquad (2.3.7)$$

En appliquant la décomposition de Gauss nous obtenons la réalisation suivante de la représentation T_α dans l'espace des fonctions sur Z^+.

II. *L'espace X_α de la représentation T_α est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(zg)$, $g \in C_n$, et les opérateurs de la représentation sont donnés par la formule*

$$T_\alpha(g)\,f(z) = \alpha(zg)\,f(\overline{zg}), \qquad (2.3.8)$$

où $\overline{zg} \in Z^+$ se détermine à partir de la décomposition de Gauss $zg = k\overline{zg}$.

D'une manière analogue, en utilisant la décomposition de Gram, nous pouvons obtenir la réalisation de la représentation T_α dans l'espace des fonctions sur le groupe U.

2.4. Le groupe orthogonal. a) $G = D_n$, i.e. $G = SO(2n, \mathbf{C})$. En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on obtient:

I. *Le caractère $\alpha(\delta)$ du groupe $D \subset D_n$ est inductif relativement à D_n si et seulement si tous les nombres $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - |p_n|$, $q_1 - q_2, \ldots, q_{n-2} - q_{n-1}, q_{n-1} - |q_n|$ sont des entiers non négatifs.*

De la proposition I et du théorème 2 de 2.1 nous déduisons le

THÉORÈME 3. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe $G = SO(2n, \mathbf{C})$ se détermine par un système de nombres entiers $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ qui vérifient les conditions $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{n-1} \geqslant |p_n|$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_{n-1} \geqslant |q_n|$.*

En appliquant la décomposition de Gauss, nous pouvons décrire la représentation correspondante comme on l'a fait dans la proposition II de 2.3.

b) $G = B_n$, i.e. $G = SO(2n + 1, \mathbf{C})$. En raisonnant comme dans l'exemple précédent, ou en appliquant a) et en se servant de l'opération de restriction à un sous-groupe, on obtient:

II. *Pour que le caractère* $\alpha(\delta)$ *du groupe* $D \subset B_n$ *soit inductif relativement à* B_n *il faut et il suffit que sa signature satisfasse à la condition: tous les nombres* $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - p_n, p_n, q_1 - q_2, \ldots, q_{n-1} - q_n, q_n$ *sont des entiers non négatifs.*

On tire de la proposition II et du théorème 2 de 2.1 le

THÉORÈME 4. *Chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe* $G = SO(2n+1, \mathbf{C})$ *se détermine par le système de nombres entiers* $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ *qui vérifient les conditions* $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$.

On peut trouver les détails dans le livre de D. Jélobenko [1].

Soit G le groupe $SO(n, \mathbf{C})$. Il existe un groupe $\widetilde{G}$ pour lequel G est isomorphe au groupe quotient $\widetilde{G} \diagdown N$, où N est un sous-groupe distingué de deux éléments du groupe $\widetilde{G}$. Le groupe $\widetilde{G}$ s'appelle *groupe des spineurs*, et les représentations irréductibles du groupe $\widetilde{G}$ non triviales sur N s'appellent *représentations bivaluées* du groupe G. Voir D. Jélobenko [1] et C. Chevalley [1].

CHAPITRE VIII

REVÊTEMENTS ET GROUPES SIMPLEMENT CONNEXES

§ 1. Revêtements

Un espace topologique séparé X est dit *localement connexe* si pour chaque point $x \in X$, tout voisinage du point x contient un certain voisinage connexe de x.

I. *Soient X un espace localement connexe, U un ensemble ouvert de X. La réunion de tous les sous-ensembles connexes de l'ensemble U qui contiennent le point x est un ensemble ouvert.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $K(x)$ la réunion de tous les sous-ensembles connexes de l'ensemble U qui contiennent le point $x \in X$. Si $y \in K(x)$, et $V \subset U$ est un certain voisinage connexe du point y, alors la réunion $K(x) \cup V$ est connexe et contient l'élément x, donc $V \subset K(x)$. Par conséquent, chaque point $y \in K(x)$ est un point intérieur de $K(x)$.

Rappelons (voir § 1, chapitre V) que la réunion de tous les sous-ensembles connexes d'un ensemble donné M qui contiennent un certain point x de M s'appelle *composante* (*connexe*) du point x dans M, ou simplement *composante* de l'ensemble M. La proposition I signifie que chaque composante d'un ensemble ouvert dans un espace localement connexe est un ensemble ouvert.

Soient X, Y des espaces topologiques, f une application continue de Y *sur* X. On dit que Y est un *revêtement* pour X (relativement à l'application f) si Y est connexe et localement connexe et chaque point $x \subset X$ possède un voisinage $U \subset X$ pour lequel la restriction de f à chaque composante de l'ensemble ouvert $f^{-1}(U)$ est un homéomorphisme sur tout l'ensemble U. Notons que le voisinage U est nécessairement connexe.

Il est clair que si X possède un revêtement, alors cet espace est connexe et localement connexe. Réciproquement, si X est connexe et localement connexe, alors X est le revêtement pour X relativement à l'application identique. Ce revêtement est dit *trivial.*

II. *Si Y est le revêtement de X relativement à une application f et G est un ensemble ouvert de Y, alors $f(G)$ est ouvert dans X.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $y \in G$, $x = f(y)$. Supposons que $U \subset X$ est un voisinage du point x tel que chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement par f sur U. Soit V la composante du point y dans $f^{-1}(U)$. L'ensemble $V \cap G$ est ouvert, en particulier $V \cap G$ est ouvert dans V. Puisque f est un homéomorphisme appliquant V sur U, l'ensemble $f(V \cap G)$ est ouvert dans U ; $f(V \cap G)$ contient le point x et constitue donc un voisinage de ce point. D'autre part, $f(V \cap G) \subset f(G)$, par conséquent $f(G)$ contient un voisinage de chacun de ces points x.

III. *Soient Y un espace localement connexe, f une application continue de Y dans un espace X, $y \in Y$, et U un voisinage du point $x = f(y)$ dans X. La composante V du point y dans $f^{-1}(U)$ est un voisinage du point y.*

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble $f^{-1}(U)$ est ouvert, donc V l'est également en vertu de I.

IV. *Si Y est un revêtement de X relativement à une application f, alors f est un homéomorphisme local, i.e. chaque point $y \in Y$ possède un voisinage que f applique topologiquement dans X.*

La proposition s'obtient immédiatement de III et de la définition du revêtement.

V. *Soient f une application continue de Y dans X, et G un sous-ensemble de X tel que la restriction de f à chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un homéomorphisme sur G. Alors, pour chaque sous-ensemble connexe $F \subset G$, chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(F)$ est appliquée topologiquement sur F, par l'application f, tandis que les composantes de $f^{-1}(F)$ sont les intersections des composantes de l'ensemble $f^{-1}(G)$ avec l'ensemble $f^{-1}(F)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{H_\alpha\}$ la famille des composantes de l'ensemble $f^{-1}(G)$; posons $\Phi_\alpha = H_\alpha \cap f^{-1}(F)$. Puisque $\Phi_\alpha \subset H_\alpha$ et f applique topologiquement H_α sur G, alors f applique topologiquement Φ_α sur F. Par conséquent, les Φ_α sont des ensembles connexes. D'autre part, chaque sous-ensemble connexe de l'ensemble $f^{-1}(F)$ est contenu dans une certaine composante H_α de l'ensemble $f^{-1}(G)$. Par conséquent, les Φ_α sont les composantes de l'ensemble $f^{-1}(F)$, ce qui termine la démonstration de la proposition V.

VI. *Soit φ une application continue d'un espace localement connexe Z dans un espace connexe X. Supposons que chaque point $x \in X$ possède un voisinage U tel que chaque composante de l'ensemble $\varphi^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement sur U par φ. Soient Y une composante quelconque de l'espace Z, et f l'application de Y dans X déterminée comme la restriction de l'application φ à Y. Alors Y est ouvert dans Z, et Y est le revêtement de X relativement à l'application f.*

D é m o n s t r a t i o n. Montrons tout d'abord que $f(Y) = X$. Supposons que $x \in X$ et U est un voisinage de ce point tel que φ applique topologiquement les composantes V_α de l'ensemble $\varphi^{-1}(U)$ sur U. Si une certaine composante V_α de l'ensemble $\varphi^{-1}(U)$ coupe Y, alors $V_\alpha \subset Y$ puisque Y est une composante de l'espace Z. On en tire que $Y \cap \varphi^{-1}(U)$ est la réunion de certaines composantes V_α de l'ensemble $\varphi^{-1}(U)$ telles que $V_\alpha \cap Y$ n'est pas vide. Par conséquent, si U coupe $f(Y)$, alors $Y \cap \varphi^{-1}(U)$ est la réunion non vide de certaines composantes V_α. D'autre part, $\varphi(V_\alpha) = U$, donc $U \subset \subset f(Y)$. En particulier, si $x \in \overline{f(Y)}$, alors chaque voisinage du point x intersecte $f(Y)$, d'où l'on tire que $U \cap f(Y) \neq \varnothing$; par conséquent $U \subset f(Y)$ et chaque point $x \in \overline{f(Y)}$ est un point intérieur de l'ensemble $f(Y)$. On en déduit que $f(Y)$ est à la fois ouvert et fermé dans X ; mais X est connexe, donc $f(Y) = X$.

Les ensembles V_α sont les sous-ensembles connexes maximaux de l'ensemble $\varphi^{-1}(U)$, tandis que $f^{-1}(U) = Y \cap \varphi^{-1}(U)$ est la réunion de certains V_α qui sont donc les composantes de l'ensemble $f^{-1}(U)$. On peut en tirer que Y est le revêtement de l'espace X relativement à f. L'ensemble Y est ouvert dans Z en vertu de I.

VII. *Supposons que Y est le revêtement pour X relativement à l'application f. Soit Z un sous-espace connexe et localement connexe de X. Chaque composante W de l'ensemble $f^{-1}(Z)$ est ouverte dans $f^{-1}(Z)$, et W est le revêtement de Z relativement à la restriction de l'application f à W.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in Z$ et supposons que U est un voisinage du point x dans X tel que chaque composante de $f^{-1}(U)$ est topologiquement appliquée sur U par f. Puisque l'espace Z est localement connexe, il existe un voisinage connexe V du point x dans Z qui est contenu dans U. Soient W_α les composantes de l'ensemble $f^{-1}(V)$. En vertu de V, chaque ensemble W_α est l'intersection de $f^{-1}(V)$ avec une certaine composante H_α de l'ensemble $f^{-1}(U)$. Si y_α est un point de W_α tel que $f(y_\alpha) = x$, alors W_α est un voisinage du point y_α relativement à $f^{-1}(Z)$, par conséquent $f^{-1}(Z)$ est localement connexe et chaque point $x \in Z$ possède un voisinage V tel que toute composante de l'ensemble $f^{-1}(V)$ est appliquée topologiquement sur V par la restriction de l'application f à $f^{-1}(Z)$. Alors VII découle directement de VI.

Exemple. Soit X le cercle unité Γ^1, i.e. $X = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R}\}$. Soit $Y = \mathbf{R}$ la droite numérique. Alors Y est connexe (voir l'exemple 1, § 1, chapitre V) et localement connexe (puisque chaque voisinage du point $y \in Y$ contient l'intervalle connexe $(y - \delta, y + \delta)$ pour un certain $\delta > 0$). Soit f l'application de Y dans X définie par la formule $f(y) = e^{i\varphi}$, $y \in Y = \mathbf{R}$. Alors f est une application de Y sur X, et chaque point $x = e^{i\varphi} \in X$ possède un voisinage $U = \{e^{iy}, e^{iy} \neq$

$\neq -e^{i\varphi}\}$ tel que son image inverse $f^{-1}(U) = \{(\varphi + (2k-1)\pi, \varphi + (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ est la réunion d'une famille dénombrable de composantes $Y_k = (\varphi + (2k-1)\pi, \varphi + (2k+1)\pi)$, $k \in Z$, dont chacune est appliquée topologiquement sur U par f. En effet, l'application f est continue, et l'application continue $\psi_k: U \to Y_k$ inverse à $f|_{Y_k}$ est déterminée par la formule

$$\psi_k(e^{iy}) = \varphi + 2k\pi + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{iy}e^{-i\varphi} - e^{-iy}e^{i\varphi}}{i(2 + e^{iy}e^{-i\varphi} + e^{-iy}e^{i\varphi})},$$

$$e^{iy} \neq -e^{i\varphi}.$$

Ainsi **R** est le revêtement de Γ^1 relativement à l'application

$$y \to e^{iy}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

§ 2. Espaces simplement connexes et principe de monodromie

2.1. Espaces simplement connexes. Soient X un espace topologique, Y et Z des revêtements de X relativement aux applications f et g respectivement. Les revêtements Y et Z sont dits *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme φ de l'espace Y sur Z tel que $f = g \circ \varphi$. L'espace X est dit *simplement connexe* si X est un espace connexe et localement connexe tel qu'un revêtement quelconque de X est isomorphe à son revêtement trivial. Ainsi, si X est simplement connexe et si Y est un revêtement de X relativement à l'application f, alors f est un homéomorphisme de Y sur X. Il est évident qu'un espace homéomorphe à un espace simplement connexe est aussi simplement connexe.

L'espace Γ^1 est un exemple d'espace non simplement connexe. En effet, l'exemple du § 1 nous montre qu'il existe un revêtement de l'espace Γ^1, à savoir l'espace **R**, qui n'est pas homéomorphe à Γ^1. Au § 4 nous donnerons des exemples d'espaces simplement connexes, en particulier nous montrerons que l'espace **R** est simplement connexe.

Mettons en évidence certaines propriétés générales des espaces simplement connexes.

I. *Soit Y le revêtement de X relativement à l'application f. Si G est un sous-ensemble ouvert de Y et si l'application f est une bijection de G sur X, alors f est un homéomorphisme de Y et X, i.e. Y est isomorphe au revêtement trivial.*

D é m o n s t r a t i o n. L'application f est continue par hypothèse. Il découle de la proposition II, § 1, que f envoie les ensembles ouverts dans les ensembles ouverts. Par conséquent, f est

un homéomorphisme de l'ensemble G sur X. Montrons que $G = Y$. Puisque Y est connexe, il suffit de démontrer que G est fermé dans Y.

Soit $y \in \overline{G}$, et supposons que U est un voisinage connexe du point $x = f(y)$ tel que toute composante de l'ensemble $f^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement sur U par f. Soit V la composante de l'ensemble $f^{-1}U$ qui contient le point y. Les restrictions de f à l'ensemble V et à l'ensemble $V_1 = G \cap f^{-1}(U)$ sont des homéomorphismes sur U. D'autre part, V est un voisinage du point y en vertu de I, § 1, donc V coupe G. Par conséquent, V coupe également V_1. Puisque V_1 est homéomorphe à U, il est connexe et donc $V_1 \subset V$. La restriction de f à V étant bijective et $f(V_1) = f(V) = U$, on a $V_1 = V$. Par conséquent, $y \in G$, ce qui termine la démonstration de la proposition I.

II. *Si X_1 et X_2 sont des espaces simplement connexes, alors leur produit $X_1 \times X_2$ est aussi simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que l'espace $X_1 \times X_2$ est connexe et localement connexe. Soit X le revêtement de $X_1 \times X_2$ relativement à l'application f. Pour chaque $x_2 \in X_2$ toute composante de l'ensemble $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$ est le revêtement pour X_1 (relativement à la restriction de l'application f à cette composante) en vertu de VII, § 1. L'espace X_1 étant simplement connexe, chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$ est appliquée topologiquement sur X_1 par l'application f. Soit $Z_2^0(x_1^0)$ une composante donnée de l'ensemble $f^{-1}(\{x_1^0\} \times X_2)$, où $x_1^0 \in X_1$. Soit G la réunion des composantes $Z_1(x_2)$ des ensembles de la forme $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$, où $x_2 \in X_2$, qui coupent l'ensemble $Z_2^0(x_1^0)$. Il est évident que f applique bijectivement l'ensemble G sur $X_1 \times X_2$. Montrons que G est ouvert, alors II se déduira de I.

Soit M la famille de tous les points intérieurs de l'ensemble G qui appartiennent au sous-ensemble donné $Z_1(x_2) \subset G$. L'ensemble M est ouvert dans $Z_1(x_2)$. Montrons que M est fermé et non vide.

Soit $z \in Z_1(x_2)$ et supposons que $f(z) = (x_1, x_2)$. Soient U_1, U_2 des voisinages connexes des points x_1 et x_2 dans X_1 et X_2 tels que chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ est appliquée topologiquement sur $U_1 \times U_2$ par f. Soit V un voisinage du point z dans $f^{-1}(U_1 \times U_2)$. Soit $(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$; posons $V_1(y_2) = V \cap f^{-1}(U_1 \times \{y_2\})$, $V_2(y_1) = V \cap f^{-1}(\{y_1\} \times U_2)$. Alors f applique topologiquement $V_1(y_2)$) sur $U_1 \times \{y_2\}$ et $V_2(y_1)$ sur $\{y_1\} \times U_2$. Par conséquent, $V_1(y_2)$ est contenu dans une certaine composante $Z_1(y_2)$, tandis que $V_2(y_1)$ est contenu dans une certaine composante $Z_2(y_1)$. Ces composantes possèdent au moins un point commun w de V tel que $f(w) = (y_1, y_2)$. Si l'on prend pour z un point d'intersection de $Z_1(x_2)$ avec $Z_2^0(x_1^0)$, alors $Z_2(x_1)$ coïncide avec $Z_2^0(x_1^0)$ et l'on a $Z_1(y_2) \subset G$ pour tous les $y_2 \in U_2$. La relation $V = \bigcup_{y_2 \in U_2} V_1(y_2)$ implique $V \subset G$, et donc $z \in M$. Ainsi M n'est pas vide.

Si $z \in \overline{M}$, alors $V_1(x_2)$ possède un point commun w^* avec M. Soit $f(w^*) = (x_1^*, x_2)$. Soit U_2^* un voisinage du point x_2 dans X_2 tel que $U_2^* \subset U_2$ et $V \cap f^{-1}(\{x_1^*\} \times U_2^*)$ est contenu dans G. Pour $x_2^* \in U_2^*$ une certaine composante $Z_1(x_2^*)$ possède une intersection vide avec G, donc $Z_1(x_2^*) \subset G$. En outre, l'ensemble $V \cap \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*)$ est la réunion des ensembles $Z_1(x_2^*)$ pour tous les $x_2^* \in U_2^*$. Par conséquent $V \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*) \subset G$. L'ensemble $V \cap \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*)$ est ouvert; c'est donc un voisinage du point z. Ainsi $z \in M$ et M est fermé.

Etant donné que $M \subset Z_1(x_2)$ est non vide, fermé et ouvert dans $Z_1(x_2)$, et $Z_1(x_2)$ est homéomorphe à l'espace connexe X_1, on a $M = Z_1(x_2)$. Par conséquent, tous les points de l'ensemble G sont des points intérieurs, ce qui termine la démonstration de la proposition II.

2.2. Principe de monodromie. Le théorème suivant concerne la propriété fondamentale des espaces simplement connexes appelée *principe de monodromie*.

Théorème 1. *Soit X un espace simplement connexe. Supposons qu'à chaque $x \in X$ correspond un certain ensemble non vide M_x et que pour chaque point (x, y) d'un certain sous-espace $D \subset X \times X$ est définie l'application φ_{xy} de l'ensemble M_x sur l'ensemble M_y de manière à satisfaire aux conditions suivantes:*

1) *D est un sous-ensemble ouvert connexe de $X \times X$ contenant la diagonale (i. e. contenant tous les points de la forme (x, x), $x \in X$);*

2) *l'application φ_{xy} est bijective pour tous les $(x, y) \in D$; φ_{xx} est l'application identique pour tout $x \in X$;*

3) *lorsque (x, y), (y, z), $(z, x) \in D$, on a $\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy}$.*

Il existe alors une application ψ qui fait correspondre à chaque $x \in X$ l'élément $\psi(x)$ de l'ensemble M_x de sorte que $\psi(y) = \varphi_{xy}(\psi(x))$ pour tous les $(x, y) \in D$. En outre, l'application ψ peut être choisie de manière à avoir dans chaque point donné $x_0 \in X$ l'égalité $\psi(x_0) = w_{x_0}^0$ où $w_{x_0}^0$ est un élément fixe de l'ensemble M_{x_0}; cette condition supplémentaire détermine uniquement l'application ψ.

Démonstration. Soit $Y = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times M_x$. Soit O la famille de tous les ensembles $G \subset Y$ tels que pour chaque point $(x, w_x) \in G$ il existe un voisinage U du point x dans l'espace X tel que $U \times U \subset D$ et $(y, \varphi_{xy}(w_x)) \in G$ pour tous les $y \in U$. Il est évident que Y et $\varnothing$ appartiennent à la famille O. Le lecteur vérifiera sans peine que la réunion d'une famille quelconque d'ensembles de O et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de O appartiennent toujours à O. La famille O, envisagée comme la famille des ensembles ouverts, munit Y d'une structure d'espace topologique.

Définissons l'application π de l'espace Y sur X en posant $\pi(x, w_x) = x$. Il découle immédiatement de la définition de la

famille O que $\pi^{-1}(U) \in O$ pour tout ensemble ouvert $U \subset X$, i.e. π est une application continue de Y sur X, et pour chaque $G \in O$ l'ensemble $\pi(G)$ est ouvert dans X.

Soit U un ensemble ouvert de X tel que $U \times U \subset D$. Soient $x \in U$ et $w_x \in M_x$. Désignons par $G(x, U, w_x)$ l'ensemble constitué des éléments de la forme $(y, \varphi_{xy}(w_x))$ pour tous les $y \in U$. Démontrons que $G(x, U, w_x) \in O$. En effet, soit $(y, \varphi_{xy}(w_x))$ un élément de l'ensemble $G(x, U, w_x)$; alors la relation $U \times U \subset D$ implique que pour tout $z \in U$ les applications φ_{xy}, φ_{yz} et φ_{xz} sont définies et la condition 3) entraîne $(z, \varphi_{yz}(\varphi_{xy}(w_x))) = (z, \varphi_{xz}(w_x)) \in G(x, U, w_x)$. Par conséquent $G(x, U, w_x) \in O$.

Soient (x, w_x) et (y, w_y) des points distincts de Y. Lorsque $x \neq y$, alors X contient des voisinages disjoints U, V des points x et y respectivement. Alors $(x, w_x) \in \pi^{-1}(U)$, $(y, w_y) \in \pi^{-1}(V)$, où $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ appartiennent à la famille O et sont disjoints. Mais lorsque $x = y$, on a $w_x \neq w_y$. Soit U un voisinage du point x dans X tel que $U \times U \subset D$; alors les ensembles $G(x, U, w_x)$ et $G(x, U, w_y)$ appartiennent à la famille O et sont disjoints, puisque les applications φ_{xy} sont bijectives. Par conséquent, l'espace topologique Y est séparé.

Pour chaque point $x \in X$ il existe un voisinage connexe U dans X tel que $U \times U \subset D$. Puisque chacune des applications φ_{xy}, $x, y \in U$, est une bijection de M_x sur M_y, l'ensemble $\pi^{-1}(U)$ peut être représenté comme la réunion d'ensembles de la forme $G(x, U, w_x)$ pour tous les $w_x \in M_x$. Tous les ensembles $G(x, U, w_x)$, $w_x \in M_x$, sont ouverts dans Y et appliqués bijectivement sur U par π. Puisque π est continue et applique les ensembles ouverts sur des ensembles ouverts, elle applique topologiquement chacun des ensembles $G(x, U, w_x)$, $w_x \in M_x$, sur U. L'ensemble U est connexe, donc les ensembles $G(x, U, w_x)$, deux à deux disjoints, sont les composantes de l'ensemble $\pi^{-1}(U)$. Ainsi chaque point $x \in X$ possède un voisinage U tel que chaque composante de l'ensemble $\pi^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement sur U par π. Puisque U est connexe, les ensembles $G(x, U, w_x)$ sont ouverts et connexes dans Y, d'où l'on déduit que Y est un espace localement connexe.

Soient Y_0 la composante du point $(x_0, w^0_{x_0})$ dans l'espace Y, et ω la restriction de l'application π à Y_0. Il découle de la proposition VI, § 1, que Y_0 est le revêtement de l'espace X relativement à l'application ω. Puisque X est simplement connexe, ω est un homéomorphisme de l'espace Y_0 sur X.

Définissons l'application ψ par la formule

$$\omega^{-1}(x) = (x, \psi(x)). \tag{2.2.1}$$

Désignons par D^* l'ensemble de tous les points $(x, y) \in D$ qui vérifient la condition $\psi(y) = \varphi_{xy}(\psi(x))$. Soit (x_1, y_1) un point de l'ensemble D. Soient U_1, V_1 des voisinages connexes des points x_1 et y_1

dans l'espace X tels que $U_1 \times U_1 \subset D$, $V_1 \times V_1 \subset D$ et $U_1 \times \times V_1 \subset D$. Supposons que $U_1 \times V_1$ intersecte D^* et soit $(x_2, y_2) \in \in D^* \cap (U_1 \times V_1)$. Alors

$$\psi(y_2) = \varphi_{x_2 y_2}(\psi(x_2)) \tag{2.2.2}$$

en vertu de la condition $(x_2, y_2) \in D^*$. L'ensemble $G(x_1, U_1, \psi(x_1))$ est connexe et contient le point $(x_1, \psi(x_1)) \in Y_0$; comme Y_0 est une composante de Y, alors $G(x_1, U_1, \psi(x_1)) \subset Y_0$. Par conséquent, en vertu de la définition de $G(x_1, U_1, \psi(x_1))$, nous avons pour le point $x_2 \in U_1$

$$\psi(x_2) = \varphi_{x_1 x_2}(\psi(x_1)). \tag{2.2.3}$$

D'une manière analogue

$$\psi(y_2) = \varphi_{y_1 y_2}(\psi(y_1)). \tag{2.2.4}$$

D'autre part, comme toutes les applications $\varphi_{x_1 x_2}$, $\varphi_{x_2 y_1}$, $\varphi_{x_1 y_2}$, $\varphi_{x_2 y_2}$, $\varphi_{y_1 y_2}$ sont définies, on peut déduire de la condition 3) du théorème 1 et des égalités (2.2.2) et (2.2.3) que

$$\psi(y_2) = \varphi_{x_2 y_2}(\psi(x_2)) = \varphi_{x_2 y_2}(\varphi_{x_1 x_2}(\psi(x_1))) =$$
$$= \varphi_{x_1 y_2}(\psi(x_1)) = \varphi_{y_1 y_2}(\varphi_{x_1 y_1}(\psi(x_1))). \tag{2.2.5}$$

Mais, par hypothèse, $\varphi_{x_1 y_1}$ est une bijection de M_{x_1} sur M_{y_1} alors en comparant les deuxièmes membres des formules (2.2.4) et (2.2.5) nous obtenons

$$\varphi_{x_1 y_1}(\psi(x_1)) = \psi(y_1), \tag{2.2.6}$$

i.e. $(x_1, y_1) \in D^*$. Ainsi, lorsque $(x_1, y_1) \in \overline{D}^*$, on a $(x_1, y_1) \in D^*$, i.e. D^* est fermé dans D. Inversement, si $(x_1, y_1) \in D^*$, on a l'égalité (2.2.6), tandis que des relations (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6) et de la condition 3) du théorème que nous démontrons nous voyons que

$$\psi(y_2) = \varphi_{y_1 y_2}(\psi_1(y_1)) = \varphi_{y_1 y_2}(\varphi_{x_1 y_1}(\psi(x_1))) = \varphi_{x_1 y_2}(\psi(x_1)) =$$
$$= \varphi_{x_2 y_2} \circ \varphi_{x_1 x_2}(\psi(x_1)) = \varphi_{x_2 y_2}(\varphi_{x_1 x_2}(\psi(x_1))) = \varphi_{x_2 y_2}(\psi(x_2))$$

pour tous les $x_2 \in U_1$, $y_2 \in V_1$, i.e. $(x_2, y_2) \in D^*$ pour $(x_2, y_2) \in \in U_1 \times V_1$ et D^* est ouvert dans D. Enfin, $(x, x) \in D^*$ pour tous les $x \in X$, donc D^* est non vide. Puisque D est connexe, on a $D^* = D$, i.e. l'égalité (2.2.6) est maintenant valable pour tous les $(x_1, y_1) \in D$.

Démontrons maintenant l'unicité de l'application ψ. Soit χ une application qui vérifie toutes les conditions du théorème 1, y compris la condition $\chi(x_0) = w^0_{x_0}$. Soit U l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que $\chi(x) = \psi(x)$; puisque $x_0 \in U$, l'ensemble U est non vide. Supposons que y est un point de X et V est un voisinage du point y tel que $V \times V \subset D$. Si V et U possèdent un point commun y_1, on a

$$\varphi_{y_1 y}(\chi(y)) = \chi(y_1) = \psi(y_1) = \varphi_{y_1 y}(\psi(y)),$$

d'où $\psi(y) = \chi(y)$ et donc U est fermé dans X. Réciproquement, si $\psi(y) = \chi(y)$, alors $\varphi_{y_1 y}(\chi(y)) = \varphi_{y_1 y}(\psi(y))$, donc $\chi(y_1) = \psi(y_1)$ pour $y_1 \in V$ et U est ouvert dans X. Puisque X est connexe, on a $U = X$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

2.3. Quelques applications du principe de monodromie dans la théorie des groupes topologiques. Soit G un groupe topologique. L'application f d'un voisinage U de l'élément neutre du groupe G dans un certain groupe H s'appelle *homéomorphisme local* si pour tous les $g, h \in U$ qui vérifient $gh \in U$ on a l'égalité $f(gh) = f(g) f(h)$.

I. *Soient G un groupe topologique simplement connexe, et f un homéomorphisme local du groupe G dans le groupe H. Si l'ensemble de définition de l'application f est un voisinage connexe U de l'élément $e \in G$, il existe un homomorphisme ψ du groupe G dans H qui coïncide avec f sur U. L'application ψ est uniquement déterminée.*

Démonstration. Supposons que $D \subset G \times G$ est l'ensemble de tous les couples (g, h) tels que $hg^{-1} \in U$. Il est évident que D est un ensemble ouvert dans $G \times G$ contenant tous les éléments de la forme (g, g), $g \in G$. L'ensemble D peut être représenté comme réunion d'ensembles de la forme $\{g\} \times Ug$, $g \in G$. Puisque U est connexe, chacun des ensembles $\{g\} \times Ug$ est connexe; tous ces ensembles coupent l'ensemble connexe constitué des couples (g, g), $g \in G$, par conséquent, D est connexe.

Soit $(g, h) \in D$. Désignons par φ_{gh} l'application $x \to f(hg^{-1})x$ du groupe H sur lui-même. Lorsque (g, h), (h, k) et (g, k) sont situés dans D, kh^{-1}, hg^{-1} et $kg^{-1} = kh^{-1} \cdot hg^{-1}$ sont situés dans U, donc

$$\varphi_{gk}(x) = f(kg^{-1})x = f(kh^{-1}) f(hg^{-1})x = \varphi_{hk}(\varphi_{gh}(x))$$

pour tous les $x \in H$. Ceci permet d'appliquer le principe de monodromie (en posant $M_g = H$ pour tous les $g \in G$); on obtient l'existence d'une application ψ du groupe G dans H telle que $\psi(e)$ est l'élément neutre du groupe H et $\psi(h) = f(hg^{-1})\psi(g)$ pour tous les $g, h \in G$ qui vérifient $hg^{-1} \in V$. En posant $g = e$, nous voyons que l'application ψ coïncide avec f sur l'ensemble U. Lorsque $k \in U$, on a $\psi(kg) = f(kg \cdot g^{-1})\psi(g) = f(k)\psi(g) = \psi(k)\psi(g)$. D'autre part, lorsque $V = U \cap U^{-1}$, on a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ en vertu de la connexité du groupe G. Chaque élément $g \in G$ peut donc s'écrire sous la forme $k_1, \ldots, k_n$, où $k_i \in U \cap U^{-1}$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$. Par récurrence sur n nous arrivons à l'égalité $\psi(k_1 \ldots k_n h) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)\psi(h)$. Pour $h = e$ nous obtenons $\psi(k_1 \ldots k_n) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)$, donc $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$ pour tous les $g, h \in G$, i.e. ψ est un homomorphisme de G dans H. L'unicité de l'homomorphisme découle de l'égalité $\psi(g) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)$ pour $g = k_1 \ldots k_n$, $k_i \in V_i$.

Soient G, H des groupes topologiques, U et V des voisinages des éléments neutres des groupes G et H respectivement. Une application homéomorphe f du voisinage U sur le voisinage V s'appelle *isomorphisme local* du groupe G dans H, si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) si $g \in U$, $g_1 \in U$ et $gg_1 \in U$, alors $f(gg_1) = f(g)\, f(g_1)$,
2) si $g \in U$, $g_1 \in U$ et $f(g)\, f(g_1) \in V$, alors $gg_1 \in U$.

II. *Soient G un groupe topologique simplement connexe, et H un groupe topologique connexe localement isomorphe au groupe G. Alors le groupe H est isomorphe au groupe quotient du groupe G par un certain sous-groupe discret du centre du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient U, V des voisinages des éléments neutres des groupes G et H respectivement, f un homéomorphisme de U sur V qui vérifie les conditions 1) et 2) de la définition précédente. En vertu de I, l'application f peut être prolongée à un homomorphisme ψ du groupe G dans H qui coïncide sur U avec l'application f. L'homomorphisme ψ est continu dans l'élément neutre du groupe G, il est donc continu partout. L'ensemble $\psi(G)$ est un sous-groupe du groupe H, mais $\psi(G)$ contient $\psi(U) = f(U) = V$, donc $\psi(G)$ contient $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Puisque H est connexe, on a $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, donc $\psi(G) = H$. Comme l'image du voisinage U est un ensemble ouvert V dans H, l'image de tout ensemble ouvert dans le groupe G est ouvert dans H. Ainsi, un sous-ensemble du groupe H est ouvert si et seulement si son image inverse dans G est ouverte, par conséquent le groupe H est isomorphe, en tant que groupe topologique, au groupe quotient du groupe G par le noyau N de l'homomorphisme ψ. Puisque ψ applique topologiquement U sur V, l'ensemble $U \cap N$ se réduit à l'élément neutre. Par conséquent, N est un groupe discret. Enfin, N appartient au centre du groupe G en vertu de VI, 1.2, chapitre V.

§ 3. Groupes de revêtement

3.1. Quelques propriétés des revêtements.

I. *Soient Y un revêtement de l'espace X relativement à l'application f, et φ, φ' des applications continues d'un espace connexe Z dans Y qui vérifient la condition $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$. Si les applications φ et φ' coïncident au moins en un point de l'espace Z, alors $\varphi = \varphi'$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit F l'ensemble de tous les points $z \in Z$ pour lesquels $\varphi(z) = \varphi'(z)$. L'ensemble F est évidemment fermé; par hypothèse, F n'est pas vide. Montrons que F est ouvert. Soit $z \in F$. Le point $x = f(\varphi(z))$ possède un voisinage U tel que toute composante de l'ensemble $f^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement sur U par f. Soit V la composante du point $\varphi(z) = \varphi'(z)$ dans l'ensemble $f^{-1}(U)$. En vertu de I, 1.1, l'ensemble V est un voisinage du

point $\varphi(z) = \varphi(z')$. Par conséquent, Z contient un voisinage W du point z tel que $\varphi(W) \subset V$, $\varphi'(W) \subset V$. Puisque f applique topologiquement V sur U, on a $\varphi(w) = \varphi'(w)$ pour tous les $w \in W$. Par conséquent, $W \subset F$ et F est ouvert. L'espace Z étant connexe, on a $F = Z$, i.e. $\varphi(z) = \varphi'(z)$, pour tous les $z \in Z$.

II. *Soient Z un espace simplement connexe, et Y le revêtement de l'espace X relativement à l'application f. Si φ est une application continue de Z dans X, il existe une application continue ψ de Z dans Y telle que $f \circ \psi = \varphi$. Si $z_0 \in Z$ et $y_0 \in Y$ sont des points pour lesquels $f(y_0) = \varphi(z_0)$, alors l'application ψ peut être choisie de manière à avoir $\psi(z_0) = y_0$; cette condition détermine uniquement l'application ψ.*

Démonstration. Soit W le sous-ensemble du produit $Z \times Y$ constitué de tous les couples (z, y) tels que $\varphi(z) = f(y)$. Posons $\chi(z, y) = z$ pour tous les $(z, y) \in W$. Il existe pour chaque point $z \in Z$ un voisinage connexe U du point $\varphi(z)$ dans l'espace X tel que toute composante V_α de l'ensemble $f^{-1}(U)$ est appliquée topologiquement sur U par f. Soit G un voisinage connexe du point z_0 dans Z tel que $\varphi(G) \subset U$. Soit $z \in G$ et y_α un élément de V_α tel que $f(y_\alpha) = \varphi(z)$; alors l'application $z \to (z, y_\alpha)$ applique continûment le voisinage G sur un certain sous-ensemble $G_\alpha \subset W$, et $\chi(z, y_\alpha) = z$. Par conséquent, χ applique topologiquement l'ensemble ouvert $G_\alpha \subset W$ sur $G \subset Z$. L'ensemble $\chi^{-1}(G)$ est la réunion des ensembles G_α. L'application $(z, y) \to y$ de l'espace W dans Y envoie chaque sous-ensemble connexe $F \subset \chi^{-1}(G)$ sur un sous-ensemble connexe de l'ensemble $f^{-1}(U)$; par conséquent, l'image de F est contenue dans une composante V_α de l'ensemble $f^{-1}(U)$. Les ensembles G_α sont donc les composantes de l'ensemble $\chi^{-1}(G)$ et chacune de ces composantes est topologiquement appliquée sur G par χ.

Soit W_0 la composante du point (z_0, y_0) dans l'espace W. En vertu de VII, 1.1, l'espace W_0 est le revêtement de Z relativement à la restriction χ_0 de l'application χ à W_0. Mais l'espace Z est simplement connexe, par conséquent l'application χ_0 est un homéomorphisme. Définissons l'application ψ par la formule $\chi_0^{-1}(z) = (z, \psi(z))$, $z \in Z$. Il est évident que l'application ψ vérifie toutes les conditions que lui impose la proposition II. L'unicité de l'application ψ découle de I.

III. *Soient Y_1, Y_2 des revêtements de l'espace X (relativement aux applications f_1 et f_2 respectivement). Si les espaces Y_1 et Y_2 sont simplement connexes, alors Y_1 et Y_2 sont homéomorphes.*

Démonstration. Soient $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ des points tels que $f_1(y_1) = f_2(y_2)$. En vertu de la proposition II, il existe des applications continues $\varphi: Y_1 \to Y_2$ et $\psi: Y_2 \to Y_1$ telles que $\varphi(y_1) = y_2$, $\psi(y_2) = y_1$, $f_2 \circ \varphi = f_1$, $f_1 \circ \psi = f_2$. Alors $\theta = \psi \circ \varphi$ est une application continue de l'espace Y_1 dans lui-

même telle que $f_1 \circ \theta = f_1$ et $\theta(y_1) = y_2$. En vertu de II, l'application θ est l'identité de l'espace Y_1 sur lui-même. D'une manière analogue, l'application $\varphi \circ \psi$ est l'application identique de l'espace Y_2 sur lui-même. Ainsi φ et ψ sont des homéomorphismes, et l'on a $\varphi = \psi^{-1}$.

La proposition III montre que si un espace topologique connexe et localement connexe donné X possède un revêtement simplement connexe Y, alors l'espace Y est défini uniquement à un isomorphisme près. Ainsi la proposition III est un « théorème d'unicité » des revêtements simplement connexes.

L'espace X est dit *localement simplement connexe* si chacun de ses points possède au moins un voisinage simplement connexe. La proposition suivante donne une condition suffisante d'existence d'un revêtement simplement connexe.

IV. *Chaque espace simplement connexe et localement connexe possède un revêtement simplement connexe.*

On peut trouver la démonstration de cette assertion dans les livres de L. Pontriaguine [1] et de C. Chevalley [1], par exemple.

3.2. Groupes de revêtement. Soit G un groupe topologique. Le groupe topologique $\widetilde{G}$ s'appelle *groupe de revêtement* pour G (relativement à l'application f) si : 1) $\widetilde{G}$ est le revêtement pour G relativement à l'application f; 2) f est un homomorphisme du groupe $\widetilde{G}$ dans G.

I. *Soient G un groupe topologique, $\widetilde{G}$ un revêtement simplement connexe pour G (relativement à l'application f). Alors on peut définir la multiplication dans $\widetilde{G}$ de manière à munir $\widetilde{G}$ d'une structure de groupe topologique, l'application f devenant un homomorphisme du groupe $\widetilde{G}$ dans G.*

Démonstration. Soit e l'élément neutre du groupe G. Désignons par $\widetilde{e}$ un certain élément de l'espace $\widetilde{G}$ pour lequel $f(\widetilde{e}) = e$.

D'après la proposition II de 2.1, l'espace $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ est simplement connexe. En vertu de la proposition II de 3.1, il existe une application continue φ de l'espace $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ telle que

$$f(\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{h})) = f(\widetilde{g})\,(f(\widetilde{h}))^{-1} \tag{3.2.1}$$

pour tous les $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$, et en outre

$$\varphi(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}. \tag{3.2.2}$$

Lorsque $\widetilde{h} = \widetilde{e}$, on a $f(\widetilde{h}) = e$, donc

$$f(\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{e})) = f(\widetilde{g}) \tag{3.2.3}$$

pour tous les $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Ainsi, d'après (3.2.3), l'application ψ de l'espace $\tilde{G}$ dans $\tilde{G}$, définie par la formule $\psi(\tilde{g}) = \varphi(\tilde{g}, \tilde{e})$, vérifie la condition $f \circ \psi = f$; la relation (3.2.2) implique que $\psi(\tilde{e}) = \tilde{e}$. En vertu de l'unicité affirmée par la proposition II de 3.1, l'application ψ est identique, donc

$$\varphi(\tilde{g}, \tilde{e}) = \tilde{g} \tag{3.2.4}$$

pour tous les $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Posons

$$\tilde{h}^{-1} = \varphi(\tilde{e}, \tilde{h}), \quad \tilde{g}\tilde{h} = \varphi(\tilde{g}, \tilde{h}^{-1}). \tag{3.2.5}$$

On tire alors de (3.2.1) et (3.2.5) que

$$\begin{aligned} &f(\tilde{h}^{-1}) = f(\varphi(\tilde{e}, \tilde{h})) = (f(\tilde{h}))^{-1};\\ &f(\tilde{g}\tilde{h}) = f(\varphi(\tilde{g}, \tilde{h}^{-1})) = f(\tilde{g})\,(f(\tilde{h}^{-1}))^{-1} = f(\tilde{g})\,f(\tilde{h}). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

En appliquant à nouveau la propriété d'unicité aux applications de $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G}$ dans $\tilde{G}$ définies par les formules $(\tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k}) \to (\tilde{g}\tilde{h})\tilde{k}$ et $(\tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k}) \to \tilde{g}(\tilde{h}\tilde{k})$, nous obtenons en nous servant de (3.2.6) que

$$\tilde{g}(\tilde{h}\tilde{k}) = (\tilde{g}\tilde{h})\,\tilde{k} \tag{3.2.7}$$

pour tous les $\tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k} \in \tilde{G}$. De manière analogue,

$$\tilde{g}\tilde{e} = \tilde{e}\tilde{g} = \tilde{g}. \tag{3.2.8}$$

Envisageons maintenant l'application $\tilde{g} \to \tilde{g}\tilde{g}^{-1}$. Cette application envoie l'espace connexe $\tilde{G}$ dans l'espace discret $f^{-1}(e)$. Puisque $\tilde{e}$ est appliqué dans $\tilde{e}$, on a

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1} = \tilde{e} \tag{3.2.9}$$

pour tous les $\tilde{g} \in \tilde{G}$. D'une manière analogue,

$$\tilde{g}^{-1}\tilde{g} = \tilde{e} \tag{3.2.10}$$

pour tous les $\tilde{g} \in \tilde{G}$.

Les relations (3.2.7) à (3.2.10) signifient que $\tilde{G}$ est un groupe relativement à l'opération de multiplication définie par (3.2.5), tandis que $\tilde{e}$ est l'élément neutre de ce groupe. Comme l'application φ est continue, les formules (3.2.5) impliquent que $\tilde{G}$ est un groupe topologique. Enfin, on tire des relations (3.2.5) et (3.2.1) que $f(\tilde{g}\tilde{h}^{-1}) = f(\tilde{g})\,(f(\tilde{h}))^{-1}$ pour tous les $\tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{G}$, donc f est un homomorphisme du groupe $\tilde{G}$ dans le groupe G.

La proposition que nous venons de démontrer signifie que *chaque groupe topologique qui possède un revêtement simplement connexe possède un groupe de revêtement simplement connexe.* La proposition

suivante montre que ce groupe est déterminé uniquement à un isomophisme près.

II. *Soient G un groupe topologique et G_1, G_2 des revêtements simplement connexes pour le groupe G (relativement aux applications f_1 et f_2 respectivement). Il existe alors un isomorphisme θ_1 du groupe topologique G_1 sur G_2 tel que*

$$f_1 = f_2 \circ \theta_1.$$

Démonstration. Soient e, e_1, e_2 les éléments neutres des groupes G, G_1, G_2 respectivement. Il existe des voisinages U, U_1, U_2 des points e, e_1, e_2 respectivement tels que l'application f_i détermine une application localement isomorphe φ_i du groupe G_i sur G ($i = 1, 2$) telle que les voisinages U_i et U vérifient les conditions 1) et 2) de la définition d'une application localement isomorphe, φ_i étant la restriction de l'application f_i à U_i. Il existe alors des applications $\psi_1 : U_1 \to U_2$ et $\psi_2 : U_2 \to U_1$ (définies par les formules $\psi_1(g_1) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(g_1))$, $\psi_2(g_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(g_2))$ pour $g_1 \in U_1$, $g_2 \in U_2$) qui déterminent des applications localement isomorphes de G_1 dans G_2 et de G_2 dans G_1 respectivement, en outre $\psi_2 \circ \psi_1$, $\psi_1 \circ \psi_2$ sont les identités des voisinages U_1 et U_2 sur eux-mêmes et $f_2 \circ \psi_1$ coïncide sur U_1 avec l'application f_1. En vertu de la proposition I de 2.3, il existe des homomorphismes θ_1 et θ_2 des groupes G_1 et G_2 dans les groupes G_2 et G_1 respectivement, prolongeant les applications ψ_1 et ψ_2; puisque $\psi_2 \circ \psi_1$ et $\psi_1 \circ \psi_2$ sont des identités, il découle de l'unicité affirmée par la proposition I de 2.3 que $\theta_1 \circ \theta_2$ et $\theta_2 \circ \theta_1$ sont les applications identiques des groupes G_2 et G_1 respectivement. Par conséquent, les applications θ_1 et θ_2 sont des isomorphismes de groupes topologiques. Comme f_1 et $f_2 \circ \theta_1$ sont des homomorphismes du groupe connexe G_1 dans G_2 qui coïncident sur le voisinage U_1, on a $f_1 = f_2 \circ \theta_1$.

§ 4. Connexité simple de quelques groupes

4.1. Connexité simple du groupe R.

I. *Le groupe* **R** *est simplement connexe.*

Démonstration. Il est évident que **R** est connexe et localement connexe. Soit Y le revêtement de **R** relativement à l'application f. D'après III, § 1, chaque point $x \in$ **R** possède un voisinage $U_x \subset$ **R** tel que toute composante de l'ensemble ouvert $f^{-1}(U_x)$ est ouverte dans Y et la restriction de l'application f l'applique topologiquement sur U_x. Soit n un entier. On peut choisir dans le recouvrement du segment $[n, n+1]$ par les voisinages U_x un certain sous-recouvrement fini $V_1^{(n)}, \ldots, V_m^{(n)}$; en réunissant tous ces recouvrements finis, nous obtiendrons un recouvrement dénombrable $\mathcal{V}$, fini sur chaque segment de la droite **R**. En choisissant

les ensembles ouverts $V_k^{(n)}$ aussi petits que l'on veut, on peut admettre que chaque point $x \in \mathbf{R}$ appartient au plus à deux intervalles du recouvrement $\mathcal{V}$, i.e. chaque intervalle du recouvrement $\mathcal{V}$ en coupe exactement deux intervalles disjoints entre eux. Alors les intervalles V du recouvrement $\mathcal{V}$ peuvent être numérotés naturellement par les nombres entiers p, et les conditions suivantes sont remplies: 1) V_0 contient 0; 2) si $V_p = (a_p, b_p)$, alors $a_p < b_{p-1} < a_{p+1} < b_p$ pour tous les nombres entiers p.

Soit W_0 une certaine composante donnée de l'ensemble ouvert $f^{-1}(V_0)$. Supposons déjà construits des ensembles ouverts W_r, $r = p, p+1, \ldots, q$, $p \leqslant 0 \leqslant q$, tels que W_r est composante de l'ensemble ouvert $f^{-1}(V_r)$ pour tous les $r = p, p+1, \ldots, q$, tandis que la réunion $\bigcup\limits_{r=p}^{q} W_r$ est connexe. Puisque $V_{p-1} \cap V_p \neq \varnothing$, $V_{q+1} \cap V_q \neq \varnothing$, il existe des composantes uniquement déterminées des ensembles ouverts $f^{-1}(V_{p-1})$ et $f^{-1}(V_{q+1})$ qui coupent W_p et W_q respectivement. Désignons ces composantes par W_{p-1} et W_{q+1} respectivement; il est évident que $\bigcup\limits_{r=p-1}^{q+1} W_r$ est connexe. Ainsi les ensembles W_r se déterminent par récurrence sur r pour tous les r entiers. Soit $G = \bigcup\limits_{r=-\infty}^{+\infty} W_r$. Il découle de la construction de l'ensemble G que la restriction φ de l'application f à G est une bijection de G sur $\mathbf{R}$. D'autre part, l'application φ est par construction un homéomorphisme local, donc φ est un homéomorphisme de G sur $\mathbf{R}$. Montrons que $G = Y$. L'ensemble G est par construction non vide et ouvert. Montrons que G est fermé. Soit $y \in \overline{G}$; alors chaque voisinage $W(y)$ du point y coupe G, i.e. $W(y) \cap W_p \neq \varnothing$ pour un p donné. Soit $x = f(y)$ et $x \in V_r$. Choisissons un voisinage $W(y)$ de sorte que $f(W(y)) \subset V_r$; alors $\varnothing \neq f(W(y) \cap W_p) \subset f(W(y)) \cap f(W_p) \subset V_r \cap V_p$. En outre, la restriction de l'application f à W_p étant un homéomorphisme, on tire de la relation $f(W(y) \cap W_p) \subset V_r \cap V_p$ que $W(y) \cap W_p \subset f^{-1}(V_r) \cap W_p$, tandis que par construction des ensembles W_r on a $f^{-1}(V_r) \cap W_p = W_r \cap W_p$. Ainsi $W(y) \cap W_p \subset W_r \cap W_p$, donc $W(y) \cap W_r \supset W(y) \cap W_p \cap W_r = W(y) \cap W_p \neq \varnothing$ et $W(y) \cap W_r$ est non vide. Si $W(y)$ est connexe, alors les relations $f(W(y)) \subset V_r$, $W(y) \cap W_r \neq \varnothing$ impliquent $W(y) \subset W_r$ (voir V, § 1); en particulier, $y \in W_r \subset G$, i.e. $\overline{G} = G$ et G est fermé. Puisque Y est connexe, on a $G = Y$, donc f est un homéomorphisme de Y sur $\mathbf{R}$ et chaque revêtement de l'espace $\mathbf{R}$ est isomorphe au revêtement trivial.

Exercice. Soient X un espace simplement connexe, Y un espace connexe et localement connexe, f une application bijective continue de Y sur X. Démontrer que f est un homéomorphisme.

4.2. Connexité simple du segment et de la sphère.

I. *Soit Y le revêtement de X relativement à l'application f. Soient M, N des sous-ensembles fermés localement connexes de X et supposons que chaque composante des ensembles $f^{-1}(M)$, $f^{-1}(N)$ est appliquée topologiquement sur M et N respectivement par la restriction correspondante de l'application f. Si $M \cap N$ est un ensemble non vide connexe, alors chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(M \cup N)$ est appliquée topologiquement sur $M \cup N$ par la restriction de l'application f.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient M_α les composantes des ensembles $f^{-1}(M)$ ($M_{\alpha_1} \neq M_{\alpha_2}$ pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Posons $F = M \cap N$, $M_\alpha \cap f^{-1}(F) = F_\alpha$. Par hypothèse, f applique topologiquement M_α sur M, par conséquent f applique topologiquement F_α sur F. En particulier, puisque F est connexe, F_α l'est aussi et donc F_α appartient à une composante bien déterminée N_α de l'ensemble $f^{-1}(N)$. Posons $S_\alpha = M_\alpha \cup N_\alpha$, $T_\alpha = \bigcup_{\alpha' \neq \alpha} S_{\alpha'}$. Il est évident que l'ensemble S_α est fermé (puisqu'il est fermé dans $f^{-1}(M \cup N)$). Puisque $T_\alpha = (\bigcup_{\alpha' \neq \alpha} M_{\alpha'}) \cup (\bigcup_{\alpha' \neq \alpha} N_{\alpha'})$ et M_α et N_α sont ouverts dans $f^{-1}(M)$ et $f^{-1}(N)$ respectivement (voir VII, § 1), les ensembles $\bigcup_{\alpha' \neq \alpha} M_{\alpha'}$, $\bigcup_{\alpha' \neq \alpha} N_{\alpha'}$ sont fermés dans $f^{-1}(M)$ et $f^{-1}(N)$, i.e. sont fermés dans Y. Par conséquent, l'ensemble T_α est fermé. Puisque $S_\alpha \cup T_\alpha = f^{-1}(M \cup N)$ est un ensemble fermé, l'ensemble S_α est non seulement fermé mais aussi ouvert dans $f^{-1}(M \cup N)$. Mais M_α et N_α sont connexes et possèdent des points communs ($M_\alpha \cap N_\alpha \supset F_\alpha$), donc les S_α sont les composantes de l'ensemble $f^{-1}(M \cup N)$. Soit f_α la restriction de l'application f à S_α. En vertu de VII, § 1, l'espace S_α est le revêtement de $M \cup N$ relativement à l'application f_α. Montrons que cette application f_α est bijective. En effet, si $f(y_1) = f(y_2)$ pour $y_1, y_2 \in S_\alpha$, alors ou bien y_1, y_2 appartiennent tous deux à un des ensembles M_α ou N_α, et alors évidemment $y_1 = y_2$, ou bien $f(y_1) = f(y_2) \in f(M_\alpha) \cap f(N_\alpha) = M \cap N = F$ et l'on a à nouveau $y_1 = y_2$, de sorte que l'application f_α est un homéomorphisme sur M_α et sur N_α. Ainsi f_α est une bijection; puisqu'elle est localement homéomorphe, on en déduit que f_α applique topologiquement S_α sur $M \cup N$, ce qui termine la démonstration de la proposition I.

II. *Chaque intervalle de la droite numérique est simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Un intervalle de la forme (a, b) est homéomorphe à $\mathbf{R}$, il est donc simplement connexe. Envisageons un intervalle semi-ouvert de la forme $(a, b]$. Soit Y le revêtement de $X = (a, b]$ relativement à l'application f. En vertu de VII, § 1, chaque composante de l'ensemble $f^{-1}((a, b))$ est un revêtement de l'intervalle (a, b) relativement à la restriction correspondante de l'application f. Mais (a, b) est simplement connexe, par conséquent

chaque composante de l'ensemble $f^{-1}((a, b))$ est appliquée topologiquement sur (a, b) par la restriction de f. D'autre part, le point b possède un voisinage de la forme $(b - \delta, b]$, $\delta > 0$, qui présente cette particularité que chaque composante de l'ensemble $f^{-1}((b-\delta, b])$ est appliquée topologiquement sur $(b - \delta, b]$ par la restriction de l'application f. Alors les ensembles $M = (a, b - \delta/4)$ et $N = [b - \delta/2, b]$ vérifient les hypothèses de la proposition I. Par conséquent, chaque composante de l'ensemble $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}((a, b]) = Y$ est appliquée topologiquement sur $(a, b]$ par la restriction de f. Mais Y est connexe, donc f est un homéomorphisme de Y sur $(a, b]$. Par conséquent, $(a, b]$ est un espace simplement connexe. Un raisonnement analogue montre maintenant que le segment $[a, b]$ est également simplement connexe.

III. *Le produit d'un nombre fini d'intervalles est simplement connexe.*

La proposition s'obtient immédiatement de II et de II, 2.1.

IV. *La sphère* $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n), x_k \in \mathbf{R}, \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\}$ *est simplement connexe lorsque* $n > 2$.

Démonstration. Soit Y le revêtement de S^{n-1} relativement à l'application f. Soient $M = \{(x_1, \ldots, x_n): x_n \geqslant 0, (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}\}$; $N = \{(x_1, \ldots, x_n): x_n \leqslant 0, (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}\}$. L'application $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$ envoie topologiquement M et N sur la boule $\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leqslant 1$ dans $\mathbf{R}^{n-1}$. Puisque cette boule est homéomorphe à un cube de dimension $n - 1$, on tire de III que M et N sont simplement connexes. L'ensemble $M \cap N = \{(x_1, \ldots, x_n): x_n = 0, \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 1\}$ est homéomorphe à la sphère S^{n-2}. On vérifie facilement que la sphère S^{n-2} est connexe lorsque $n > 2$. Alors les ensembles M et N vérifient les hypothèses de la proposition I. Par conséquent, chaque composante de l'ensemble $Y = f^{-1}(M \cup N)$ est appliquée topologiquement sur $M \cup N = S^{n-1}$ par la restriction de f. Mais Y est connexe, donc f est un homéomorphisme de Y sur S^n. D'où l'on tire que S^n est simplement connexe.

4.3. Propositions auxiliaires.

I. *Soient G un groupe topologique connexe et localement connexe, H son sous-groupe fermé localement connexe et H_0 la composante de l'élément neutre de H. Il existe une application f de l'espace G/H_0 sur G/H telle que G/H_0 est le revêtement de G/H relativement à l'application f. En particulier, si H est un sous-groupe distingué, alors G/H_0 est un groupe de revêtement pour G/H relativement à l'homomorphisme f.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque H est localement connexe, l'ensemble H_0 est relativement ouvert dans H (voir I, § 1). Par conséquent, il existe dans H un voisinage V de l'élément neutre tel que $V^{-1}V \cap H \subset H_0$. En choisissant le cas échéant un voisinage connexe contenu dans V, nous pouvons supposer que V est connexe.

Soient π et π_0 les applications canoniques du groupe G dans les espaces des classes d'équivalence G/H et G/H_0 respectivement. Chaque élément ξ de l'espace G/H_0 est une classe d'équivalence par le sous-groupe H_0; par conséquent ξ est entièrement contenu dans une certaine classe d'équivalence par H: si $g \in G$ et $\xi = gH_0$, alors $\xi \subset \eta$, où $\eta = gH$. Posons $\eta = f(\xi)$; cette relation détermine une application de G/H_0 sur G/H. Puisque les applications π et π_0 sont ouvertes et continues, l'application f, comme on vérifie facilement, l'est aussi.

Soit $g \in G$. Posons $W(g) = \pi(gV)$: l'ensemble $W(g)$ sera alors un voisinage de l'élément $\pi(g)$ dans G/H. Choisissons dans G un représentant dans chacune des classes d'équivalence hH_0, $h \in H$. Soit A l'ensemble de tous ces représentants. Alors $H = \bigcup_{a \in A} aH_0$. Considérons l'ensemble $f^{-1}(W(g))$ qui coïncide avec $gVH = \bigcup_{a \in A} gVaH_0$. Posons $W_a(g) = \pi_0(gVa)$, il est alors evident que $f^{-1}(W(g)) = \bigcup_{a \in A} W_a(g)$. Montrons que chacun des ensembles $W_a(g)$ est appliqué bijectivement par la restriction de f sur $W(g)$ et que les ensembles $W_a(g)$ sont disjoints. En effet, $f(W_a(g)) = f(\pi_0(gVa)) = gVaH = gVH = \pi(gV) = W(g)$; si $f(y_1) = f(y_2)$ pour $y_1 \in W_a(g)$, $y_2 \in W_{a'}(g)$, on a $y_1 = \pi(gx_1a)$, $y_2 = \pi_0(gx_2a')$ pour certains $x_1, x_2 \in V$, et $\pi(gx_1a) = f(\pi_0(gx_1a)) = f(\pi_0(gx_2a')) = \pi(gx_2a')$, d'où $gx_1a = gx_2a'h$ pour un certain $h \in H$. Par conséquent,

$$x_2^{-1}x_1 = a'ha^{-1}. \tag{4.3.1}$$

Comme a', h, $a \in H$, on a $a'ha^{-1} \in H$ et $x_2^{-1}x_1 \in V^{-1}V \cap H \subset H_0$. En supposant que $a' = a$ (i.e. y_1, $y_2 \in W_a(g)$), on tire de l'égalité (4.3.1) que

$$h = a^{-1}(x_2^{-1}x_1)a \in a^{-1}H_0a. \tag{4.3.2}$$

Rappelons-nous que le sous-groupe H_0 est un sous-groupe distingué H (voir III de 1.2, chapitre V), alors (4.3.2) entraîne $h \in H_0$, i.e. $\pi_0(gx_1a) = \pi_0(gx_2a)$ et $y_1 = y_2$. Ainsi f applique bijectivement $W_a(g)$ sur $W(g)$. Enfin, si $W_a(g)$ et $W_{a'}(g)$ se coupent, i.e. $\pi_0(gx_1a) = \pi_0(gx_2a')$ pour certains $x_1, x_2 \in V$, alors $gx_1a = gx_2a'h$, où $h \in H_0$; par conséquent

$$a'ha^{-1} \in a'H_0a^{-1} = (a'H_0a'^{-1})\,a'a^{-1} \subset H_0a'a^{-1},$$

et en même temps $a'ha^{-1} = x_2^{-1}x_1 \in H_0$, i.e. l'intersection $H_0 \cap H_0a'a^{-1}$ n'est pas vide, d'où l'on tire que $H_0a \cap H_0a'$ n'est pas

vide. Mais a et a' sont des représentants de deux classes disjointes, donc $a = a'$ et les ensembles $W_a(g)$ sont deux à deux disjoints.

Chacun des ensembles $W_a(g)$ est ouvert dans G/H_0. Puisque f est continue et ouverte, et applique bijectivement $W_a(g)$ sur $W(g)$, c'est un homéomorphisme de $W_a(g)$ sur $W(g)$. Chacun des ensembles $W_a(g)$ est connexe comme image continue de l'ensemble connexe gVa. Par conséquent, les ensembles $W_a(g)$, deux à deux disjoints, sont les composantes de l'ensemble $f^{-1}(W(g))$. Nous avons donc démontré que l'espace G/H_0 est le revêtement de l'espace G/H relativement à l'application f.

Si H est un sous-groupe distingué de G, alors H_0 est aussi un sous-groupe distingué de G. En effet, pour chaque $g \in G$, l'ensemble gH_0g^{-1} est connexe, contient l'élément neutre et est contenu dans $gHg^{-1} = H$, i.e. $gH_0g^{-1} \subset H_0$ pour tous les $g \in G$, et H_0 est un sous-groupe distingué de G. Dans ce cas, l'application f que nous avons construite est un homéomorphisme du groupe G/H_0 sur le group G/H, et son noyau coïncide avec H/H_0. Ainsi G/H_0 sera dans ce cas le groupe de revêtement pour G/H relativement à l'homomorphisme f.

II. *Supposon vérifiées les hypothèses de la proposition* I. *Si l'espace G/H est simplement connexe, alors le groupe H est connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Si G/H est simplement connexe, l'application $f: G/H_0 \to G/H$ est un homéomorphisme. Alors $H = H_0$, i.e. H est connexe.

III. *Soient G un groupe topologique connexe et localement connexe, H un sous-groupe distingué discret du groupe G, π l'homomorphisme canonique du groupe G sur G/H. Alors G est le groupe de revêtement de G/H relativement à l'application π.*

D é m o n s t r a t i o n. La proposition découle immédiatement de I. En effet, le fait que le groupe H est discret entraîne $H_0 = \{e\}$ et $G/H_0 = G$.

IV. *Soient G un groupe topologique connexe et localement connexe, et H son sous-groupe localement connexe fermé. Supposons que G est localement simplement connexe, tandis que H et G/H sont simplement connexes. Alors le groupe G est également simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme G est connexe et localement simplement connexe, il possède un revêtement simplement connexe. Soit $\tilde{G}$ le groupe de revêtement pour G relativement à l'application π. Soit $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$. Si $\tilde{g} \in \tilde{G}$ et $\pi(\tilde{g}) = g$, alors $\pi(\tilde{g}\tilde{H}) = \pi(\tilde{g})\,\pi(\tilde{H}) = gH$, i.e. π applique les classes d'équivalence du groupe $\tilde{G}$ par le sous-groupe $\tilde{H}$ sur les classes d'équivalence du groupe G par H, et lorsque $\pi(\tilde{g}_1\tilde{H}) = \pi(\tilde{g}_2\tilde{H})$, on a $\pi(\tilde{g}_1)H = \pi(\tilde{g}_2)H$, i.e. $\pi(\tilde{g}_2^{-1}\tilde{g}_1) \in H$, $\tilde{g}_2^{-1}\tilde{g}_1 \in \tilde{H}$, $\tilde{g}_1 \in \tilde{g}_2\tilde{H}$ et $\tilde{g}_1\tilde{H} = \tilde{g}_2\tilde{H}$. Ainsi l'application $\pi^*: \tilde{G}/\tilde{H} \to G/H$ définie par la formule $\pi^*(\tilde{g}\tilde{H}) = \pi(\tilde{g})H$

est bijective. Puisque les applications canoniques $\rho: G \to G/H$ et $\tilde{\rho}: \tilde{G} \to \tilde{G}/\tilde{H}$ sont continues et ouvertes, et $\pi^* \circ \tilde{\rho} = \rho \circ \pi$, l'application π^* est continue et ouverte. Par conséquent, π^* est un homéomorphisme de $\tilde{G}/\tilde{H}$ sur G/H. Comme G/H est simplement connexe par hypothèse, $\tilde{G}/\tilde{H}$ le sera aussi. Notons maintenant que $\tilde{H}$ est fermé dans $\tilde{G}$, en tant qu'image inverse du groupe fermé H); d'autre part, la connexité et connexité locale du groupe H impliquent, à l'aide de la proposition VII, § 1, la connexité locale du groupe $\tilde{H}$. Puis, la connexité simple de $\tilde{G}/\tilde{H}$ et la proposition II permettent d'affirmer que le groupe $\tilde{H}$ est connexe. Appliquant à nouveau la proposition VII, § 1, nous voyons que $\tilde{H}$ est l'espace de revêtement pour H relativement à l'application π. Mais H est simplement connexe; par conséquent, l'application π est un isomorphisme de $\tilde{H}$ sur H. En particulier, le noyau de l'application π se réduit à l'élément neutre, donc π est un isomorphisme de $\tilde{G}$ sur G; par conséquent, G est simplement connexe.

4.4. Connexité simple de certains groupes classiques.

I. *Soient $G = SU(n)$, et H le sous-groupe du groupe G constitué des matrices de la forme $h \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{Vmatrix}$, où g est une matrice d'ordre $n - 1$. Alors le sous-groupe H est isomorphe au groupe $SU(n - 1)$, et l'espace-quotient G/H est homéomorphe à la sphère S^{2n-1}.*

Démonstration. Soit $h = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix}$, où u est une matrice carrée d'ordre $n - 1$. La relation $h \in G$ est équivalente à la condition $h^*h = 1_n$, i.e. à $u^*u = 1_{n-1}$, où 1_k est la matrice unité d'ordre k. Ainsi $u \in SU(n - 1)$, i.e. $H \approx SU(n - 1)$. Montrons que $G/H \approx$ $\approx S^{2n-1}$. Remarquons que la sphère unité S dans l'espace complexe $\mathbf{C}^n$ est homéomorphe à la sphère unité S^{2n-1}. Montrons que S est un espace homogène relativement à l'action du groupe G. En effet, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$, i.e. $(x, x) = 1$, on a $(xg, xg) = 1$ pour tous les $g \in G$, où $xg = (x_1, \ldots, x_n) \begin{Vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix}$. D'autre part, posons $x_0 = (1, \ldots, 0) \in S$; si x est un élément de S, il existe une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ dans $\mathbf{C}^n$ dont le premier vecteur est x: $e_1 = x$. La matrice g de passage de la base $(1, 0, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ à la base $e_1, \ldots, e_n$ appartient au groupe G, et $x = x_0 g$, de sorte que S est homogène relativement à G. Enfin, le lecteur vérifiera sans difficulté que l'application $g \to x_0 g$ est continue et ouverte. D'après III de 2.6, chapitre III, l'espace S est homéomorphe à l'espace des classes d'équivalence $G/\tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est le sous-groupe stationnaire du point x_0. Trouvons le sous-groupe $\tilde{H}$.

La condition $x_0 g = x_0$ est équivalente à la condition suivante: $g_{11} = 1$, $g_{12} = \ldots = g_{1n} = 0$. Puisque les lignes de la matrice g sont orthogonales, on a $g_{21} = \ldots = g_{n1} = 0$ pour $g \in \widetilde{H}$, donc $\widetilde{H} = H$. Ainsi $G/H \approx S \approx S^{2n-1}$.

Désignons par $Sp\,(2n)$ le groupe de toutes les matrices unitaires g d'ordre $2n$ qui vérifient la condition

$$g' J_n g = J_n, \tag{4.4.1}$$

où g' est la transposée de g, et $J_n = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}$. Le groupe $Sp\,(2n)$ est un sous-groupe fermé du groupe $U\,(2n)$, donc $Sp\,(2n)$ est un sous-groupe compact.

II. *Soient $G = Sp\,(2n)$, σ la matrice carrée d'ordre $2n$ de la forme*

$$\sigma = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & 1 \\ & 0 & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

et H le sous-groupe du groupe G constitué des matrices de la forme

$$h = \sigma \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & \ldots & h_{2,\,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & h_{n-1,\,2} & \ldots & h_{n-1,\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sigma^{-1}. \tag{4.4.2}$$

Alors le sous-groupe H est isomorphe au groupe $Sp\,(2n-2)$ pour $n > 2$ et $H = \{e\}$ pour $n = 2$, tandis que l'espace quotient G/H est homéomorphe à la sphère S^{4n-1}.

D é m o n s t r a t i o n. Si $n = 2$, alors évidemment $H = \{e\}$. Soit $n > 2$ et

$$h = \sigma \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sigma^{-1}, \tag{4.4.3}$$

où u est une matrice carrée d'ordre $2n-2$. La condition $h \in G$ est équivalente aux conditions $h^* h = 1_{2n}$ et $h^1 J_n h = J_n$. Puisque $\sigma = \sigma^{*-1} = \sigma'^{-1}$, la condition $h^* h = 1_{2n}$ est équivalente à la condition $u^* u = 1_{2n-2}$, i.e. témoigne de l'unitarité de u. D'autre part,

un calcul immédiat nous donne

$$\sigma^{-1}J_n\sigma = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & J_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad (4.4.4)$$

d'où il découle que pour $g = \sigma \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sigma^{-1}$ l'égalité (4.4.1) est équivalente à la relation $u'J_{n-1}u = J_{n-1}$. Par conséquent, pour un élément g de la forme (4.4.3), les relations $g \in Sp(2n)$ et $u \in Sp(2n-2)$ sont équivalentes, i.e. H est isomorphe à $Sp(2n-2)$.

Montrons que $G/H = S^{4n-1}$. Remarquons que la sphère unité S dans l'espace complexe C^{2n} est homéomorphe à la sphère unité S^{4n-1}. Montrons que S est un espace homogène relativement à l'action du groupe G. Puisque $G \subset SU(2n)$, on a $xg \in S$ pour tous les $x \in S$, $g \in G$. Posons maintenant $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ et montrons que pour chaque $x \in S$ on peut trouver un élément $g \in G$ tel que $x_0 g \in x$. Posons $e_1 = x$. Soit $e_{n+1} = \bar{x}J_n$, où $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2n})$ pour $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$. Il est évident que $e_{n+1} \in S$ et $(e_1, e_{n+1}) = 0$. Supposons construite une suite de vecteurs orthonormés $e_1, \ldots, e_k, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}$ telle que $e_{n+j} = \bar{e}_j J_n$ pour tous les $j = 1, \ldots, k$. Choisissons en guise de e_{k+1} un vecteur quelconque de longueur 1, orthogonal à tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_k, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}$; soit $e_{n+k+1} = \bar{e}_{k+1}J_n$. Alors

$$(e_{n+k+1}, e_j) = (\bar{e}_{k+1}J_n, -\bar{e}_{n+j}J_n) =$$
$$= -(\bar{e}_{k+1}, \bar{e}_{n+j}) = -\overline{(e_{k+1}, e_{n+j})} = 0$$

et

$$(e_{n+k+1}, e_{n+j}) = (\bar{e}_{k+1}J_n, \bar{e}_jJ_n) = (\bar{e}_{k+1}, \bar{e}_j) = \overline{(e_{k+1}, e_j)} = 0,$$

i.e. on peut construire par récurrence sur k une base orthonormée $e_1, \ldots, e_{2n}$ dans C^{2n} telle que $x = e_1$ et $e_{n+k} = \bar{e}_kJ_n$ pour $k = 1, \ldots, n$. Soit g la matrice de passage de la base $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ à la base $e_1, \ldots, e_{2n}$. Alors g est une matrice unitaire, et la relation $e_{n+k} = \bar{e}_kJ_n$ signifie que $J_ng = \bar{g}J_n$, où $\bar{g}$ est la matrice dont les éléments sont les conjugués complexes des éléments correspondants de la matrice g. Mais en vertu de l'unitarité de g, la relation

$$J_ng = \bar{g}J_n \qquad (4.4.5)$$

est équivalente à la relation (4.4.1), i.e. $g \in G$ et $x_0g = x$.

Montrons maintenant que le sous-groupe stationnaire de l'élément $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ coïncide avec H. La condition $x_0g = x_0$

signifie que l'on a $g = \begin{Vmatrix} 1 & w \\ 0 & v \end{Vmatrix}$ pour une certaine ligne w et une certaine matrice v; puisque g est unitaire, on a $g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{Vmatrix}$. La relation (4.4.5), comme on vérifie immédiatement, veut dire que la $(n + 1)$-ième ligne de la matrice g est égale à $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \ldots, 0)$, où le nombre 1 est situé à la $(n + 1)$-ième place; ceci veut dire à son tour que la dernière ligne de la matrice $\sigma^{-1}g\sigma$ est égale à $(0, \ldots, 0, 1)$. Comme g et σ sont unitaires, h ne peut satisfaire à la condition (4.4.2) que s'il appartient au sous-groupe stationnaire de l'élément x_0. Le lecteur vérifiera aisément que l'application $g \to x_0g$ est continue et ouverte. En appliquant III de 2.6, chapitre III, nous obtenons que G/H est homéomorphe à S^{4n-1}.

III. *Les groupes $SU(n)$ et $Sp(2n)$ sont simplement connexes pour tous les $n \geqslant 1$.*

D é m o n s t r a t i o n. Le groupe $SU(1)$ est égal à $\{e\}$ et est donc simplement connexe. Le groupe $Sp(2)$ est homéomorphe à S^3 (voir II) et est donc simplement connexe (voir IV de 4.2). Plus loin (§ 3, chapitre IX et § 2, chapitre XI) nous verrons que les groupes $SU(n)$ et $Sp(2n)$ sont localement simplement connexes (il sera notamment démontré que $SU(n)$ et $Sp(2n)$ sont des groupes de Lie, or chaque élément d'un groupe de Lie possède un voisinage homéomorphe à la boule de l'espace euclidien et donc simplement connexe). Alors la proposition III se démontre par récurrence sur n à l'aide des propositions IV de 4.2, IV de 4.3, I et II.

IV. *Le groupe $SO(3, \mathbf{R})$ n'est pas simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. L'homomorphisme $\pi: SU(2) \to SO(3)$ construit dans l'exercice de 1.2, chapitre IV, possède un noyau discret égal à $\{e, -e\}$, donc le groupe $SU(2)$ est le groupe de revêtement pour $SO(3)$ (voir III de 4.3). Puisque π n'est pas un homéomorphisme, $SO(3, \mathbf{R})$ n'est pas simplement connexe.

Par la suite (voir III de 7.2, chapitre XI), nous montrerons que les groupes $SO(n, \mathbf{R})$ et $SO(n, \mathbf{C})$ ne sont pas simplement connexes pour $n \geqslant 3$. Le groupe de revêtement simplement connexe du groupe $SO(n, \mathbf{C})$ ou $SO(n, \mathbf{R})$ s'appelle *groupe des spineurs* (voir, par exemple, D. J é l o b e n k o [1] et C. C h e v a l l e y [1]).

CHAPITRE IX

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GROUPES ET DES ALGÈBRES DE LIE

§ 1. Variétés analytiques

1.1. Définition d'une variété analytique. Soit M un espace topologique séparé à base dénombrable d'ensembles ouverts. L'espace M s'appelle *variété analytique* réelle (respectivement complexe) si l'on a fait correspondre à chaque sous-ensemble ouvert $U \subset M$ une algèbre $D(U)$ de fonctions à valeurs complexes sur U contenant la fonction unité, de sorte que les conditions suivantes sont vérifiées:

a) si V, U sont des sous-ensembles ouverts de M, et $V \subset U$, alors la restriction de toute fonction $f \in D(U)$ à l'ensemble V est contenue dans $D(V)$;

b) si V et V_i $(i \in I)$ sont des sous-ensembles ouverts de M, $V = \bigcup_i V_i$ et f est une fonction à valeurs complexes sur V telle que $f \mid V_i \in D(V_i)$ pour tous les $i \in I$, alors $f \in D(V)$;

c) il existe un nombre entier $m > 0$ tel que pour chaque $x \in M$ on peut trouver un ensemble ouvert $U \subset M$ qui contient x, et m fonctions réelles (respectivement complexes) $x_1, \ldots, x_m \in D(U)$ qui vérifient les conditions:

1) l'application $\xi: y \to (x_1(y), \ldots, x_m(y))$ est un homéomorphisme de l'ensemble U sur un sous-ensemble ouvert de l'espace $\mathbf{R}^m$ (respectivement $\mathbf{C}^m$);

2) pour chaque ensemble ouvert $W \subset U$ l'algèbre $D(W)$ est constituée de toutes les fonctions sur W, et d'elles seules, que l'on peut représenter sous la forme $F \circ \xi$, où F est une fonction analytique réelle (respectivement complexe) sur $\xi(W)$.

Les éléments de l'algèbre $D(U)$ sont appelés *fonctions analytiques sur* U. Chaque ensemble ouvert U qui vérifie la condition c) s'appelle *voisinage de coordonnées*, ou *carte* dans M, tandis que les fonctions $x_1, \ldots, x_m$ s'appellent *coordonnées analytiques sur* U. Le nombre m est dit *dimension* de la variété M.

I. *Soient* $x_1, \ldots, x_m$ *des coordonnées analytiques sur* U, *et* $y_1, \ldots, y_n$ *un nombre fini de fonctions choisies dans* $D(U)$. *Pour que la famille* $y_1, \ldots, y_n$ *vérifie les conditions* 1) *et* 2) *de* c) *dans un certain ensemble ouvert* $V \subset U$ *il faut et il suffit que* 1) $m = n$, 2) *si* $y_i =$

$= F_i \circ \xi_i$, *où* F_i *est une fonction analytique des variables* $x_1, \ldots, x_m$, *le déterminant* $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ *ne soit pas nul en un certain point de l'ensemble* $\xi(U)$.

Démonstration. Supposons que la famille $y_1, \ldots, y_n$ vérifie les conditions 1) et 2) de c) dans l'ensemble ouvert $V \subset U$. Démontrons que $y_1, \ldots, y_n$ vérifie les conditions 1) et 2) de la proposition I. Soit $y_i = F_i \circ \xi$, où F_i $(i = 1, \ldots, n)$ est une fonction analytique des variables $x_1, \ldots, x_n$ sur l'ensemble $\xi(V)$. D'autre part, l'application $\eta: z \to (y_1(z), \ldots, y_n(z))$ est par hypothèse un homéomorphisme de l'ensemble V sur l'ensemble ouvert $\eta(V)$ de l'espace arithmétique correspondant, et l'on a $x_k = G_k \circ \eta$, où G_k $(k = 1, \ldots, m)$ est une fonction analytique des variables $y_1, \ldots, y_n$. Par conséquent,

$$F_i(G_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, G_m(y_1, \ldots, y_n)) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.1}$$

$$G_k(F_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_m)) = x_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.1.2}$$

où $(x_1, \ldots, x_m) \in \xi(V)$, $(y_1, \ldots, y_m) \in \eta(V)$. En calculant les dérivées de (1.1.1) et (1.1.2), nous voyons que sur $\xi(V)$ et $\eta(V)$ nous avons respectivement

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial G_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial y_i}\frac{\partial F_i}{\partial x_l} = \delta_{kl}. \tag{1.1.3}$$

La première relation (1.1.3) peut être envisagée comme une famille de système d'équations linéaires à matrice $(\partial F_i/\partial x_k)$ relativement aux variables $\partial G_k/\partial y_j$ $(k = 1, \ldots, m$, j étant donné). La résolubilité de ces systèmes d'équations à deuxième membre δ_{ij} entraîne celle de systèmes d'équations à matrice $(\partial F_i/\partial x_k)$ avec un deuxième membre quelconque. Par conséquent, $m \geqslant n$, et le rang de la matrice $\partial F_i/\partial x_k$ est égal à n. D'une manière analogue, en considérant la deuxième relation (1.1.3) comme une famille de systèmes d'équations linéaires à matrice $(\partial F_i/\partial x_l)$ relativement aux variables $\partial G_k/\partial y_i$ $(i = 1, \ldots, n$, k étant donné), nous obtenons $n \geqslant m$. Par conséquent, $(\partial F_i/\partial x_k)$ est une matrice carrée à déterminant non nul, i.e. la famille $y_1, \ldots, y_n$ vérifie les conditions 1) et 2) de la proposition I.

Réciproquement, supposons que la famille $y_1, \ldots, y_n \in D(U)$ vérifie les conditions 1) et 2) de la proposition I. Supposons que $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0$ au point $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe dans l'ensemble $\xi(U)$ un voisinage W du point $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ tel que pour chaque point $(y_1, \ldots, y_m) \in W$

le système d'équations

$$F_i(x_1, \ldots, x_m) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.1.4}$$

possède une solution unique $(x_1, \ldots, x_m)$ qui se détermine par les égalités de la forme

$$x_k = G_k(y_1, \ldots, y_m), \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{1.1.5}$$

les fonctions G_k, $k = 1, \ldots, m$, étant analytiques sur W.

Soit V l'image inverse de l'ensemble W par l'application ξ. Par hypothèse, V et W sont homéomorphes. Soit $\eta(z) = (y_1(z), \ldots, y_m(z))$. Les formules (1.1.4) et (1.1.5) nous montrent que l'application $\Phi: (x_1, \ldots, x_m) \to (F_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_m))$ est un homéomorphisme de l'ensemble W sur l'ensemble $\eta(V)$, et la relation $\eta = \Phi \circ \xi$ implique que η est un homéomorphisme de l'ensemble ouvert $V \subset M$ sur l'ensemble ouvert $\eta(V)$ de l'espace arithmétique, i.e. la condition 1) de c) est satisfaite. Lorsque $z \in D(V)$, on a $z = H \circ \xi$, où H est une fonction analytique; alors $z = H \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \xi = (H \circ \Phi^{-1}) \circ \eta$, où Φ^{-1} est l'application $(y_1, \ldots, y_m) \to G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_m(y_1, \ldots, y_m))$. En vertu de l'analyticité des fonctions G_k on a $z = H_1 \circ \eta$, où $H_1 = H \circ \Phi^{-1}$ est une fonction analytique sur $\eta(V)$. Réciproquement, lorsque $z = H_1 \circ \eta$, où H_1 est analytique, on a $z = (H_1 \circ \Phi) \circ \xi$, où $H_1 \circ \Phi$ est une fonction analytique, i.e. la condition 2) de c) est vérifiée.

1.2. Exemples de variétés. 1. Soit M l'espace $\mathbf{R}^m$ et supposons que l'on a fait correspondre à chaque sous-ensemble ouvert $U \subset M$ l'algèbre $D(U)$ de toutes les fonctions analytiques complexes sur l'ensemble U. Le lecteur vérifiera sans peine que les conditions a) à c) sont vérifiées; en particulier, en guise des fonctions $x_1, \ldots, x_m$ on peut prendre les fonctions définies par les formules $x_k(y_1, \ldots, y_m) = y_k$, $k = 1, \ldots m$, $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$. Ainsi l'espace $\mathbf{R}^m$ peut être envisagé comme une variété analytique (réelle). D'une manière analogue, l'espace $\mathbf{C}^m$ peut être envisagé comme une variété analytique complexe.

2. Soit T^1 le cercle de rayon 1 sur le plan complexe, i.e. $T^1 = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R}\}$. Si f est une fonction sur T^1, alors $f(e^{i\varphi})$ est une fonction de la variable réelle φ. Faisons correspondre à chaque ensemble ouvert $U \subset T^1$ l'algèbre $D(U)$ constituée par toutes les fonctions f sur U, à valeurs complexes, telles que $f(e^{i\varphi})$ est une fonction analytique de φ sur son domaine de définition. La validité des conditions a) et b) est évidente. Pour démontrer la condition c), il suffit de remarquer que pour tout point $x \in T^1$, $x \neq \pm 1$, on peut poser $x_1(\varphi) = \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{i\varphi}}\right)$ et $U = \left\{\varphi : |x - \varphi| < \min\left(\frac{|1-x|}{2}, \frac{|1+x|}{2}\right)\right\}$, tandis que pour tout point $x \neq \pm i$ on

peut poser $x_1(\varphi) = \sin \varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - \frac{1}{e^{i\varphi}}\right)$ et $U = \{\varphi : |x - \varphi| < \min\left\{\frac{|x-i|}{2}, \frac{|x+i|}{2}\right\}\}$. Ainsi T^1 peut être envisagé comme une variété analytique (réelle) de dimension 1.

3. Soient M une variété analytique, et U un sous-ensemble ouvert de M. Il est évident que l'application $V \to D(V)$, où V est un sous-ensemble ouvert de U, vérifie les conditions a) à c), donc U est une variété analytique; on l'appelle *sous-variété ouverte* de la variété M.

4. Soit M une variété analytique complexe. Remplaçons dans chaque carte $U \subset M$ la famille de fonctions $x_1, \ldots, x_m \in D(U)$ par la famille de $2m$ fonctions $(y_1, \ldots, y_{2m}) = (\mathrm{Re}\, x_1, \mathrm{Im}\, x_1, \ldots, \mathrm{Re}\, x_m, \mathrm{Im}\, x_m)$, et remplaçons chacune des algèbres $D(U)$ par l'algèbre $D_r(U)$ définie de la manière suivante: une fonction réelle f sur U appartient à $D_r(U)$ si et seulement si la restriction de f à V pour chaque carte $V \subset U$ est une fonction analytique réelle de $y_1, \ldots, y_{2m}$. Le lecteur vérifiera facilement que l'on peut ainsi envisager M comme une variété analytique *réelle*.

1.3. Applications de variétés. Produits de variétés. Soient M, N des variétés et φ une application de M dans N. L'application φ est dite *analytique* si pour chaque ensemble ouvert $W \subset N$ qui coupe $\varphi(M)$, et chaque fonction $f \in D(W)$, la fonction $f \circ \varphi$ appartient à $D(\varphi^{-1}(W))$.

Si φ est une application homéomorphe de la variété M sur N, et si les applications φ et φ^{-1} sont analytiques sur M et N respectivement, on dit que l'application φ est *isomorphisme analytique* des variétés M et N.

Soient M_1 et M_2 des variétés de dimensions m_1 et m_2 respectivement. Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit des espaces topologiques M_1 et M_2; alors M est un espace séparé à base dénombrable. Soient $U \subset M$ un ensemble ouvert, et f une fonction sur U à valeurs complexes. Nous supposerons que $f \in D(U)$ si et seulement si pour chaque point $(y_1, y_2) \in U$ on peut trouver des cartes V_1, V_2 des points y_1 et y_2 dans M_1 et M_2 respectivement, et des coordonnées analytiques $x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}$ et $x_1^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}$ sur V_1 et V_2 respectivement, vérifiant les conditions suivantes: 1) $V_1 \times V_2 \subset U$, 2) si $\tilde{V}_i$ est l'image de V_i par l'application $y \to (x_1^{(i)}(y), \ldots, x_{m_i}^{(i)}(y))$, $i = 1, 2$, alors il existe une fonction analytique φ sur $\tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$ telle que $f(z_1, z_2) = \varphi(x_1^{(1)}(z_1), \ldots, x_{m_1}^{(1)}(z_1), x_1^{(2)}(z_2), \ldots, x_{m_2}^{(2)}(z_2))$ pour tous les $(z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$. Le lecteur vérifiera aisément que l'application $U \to D(U)$ vérifie les conditions a) à c); ainsi $M_1 \times M_2$ peut être envisagé comme une variété analytique; on l'appelle *produit* des variétés M_1 et M_2. Il est évident que les applications $\varphi_i : M \to M_i$, $i = 1, 2$, définies par les formules $\varphi_i(x_1, x_2) = x_i$ sont analytiques.

L'application φ_i s'appelle *projection* de la variété M sur M_i, $i = 1, 2$.

1.4. Vecteurs tangents; espaces tangents. Soient M une variété analytique réelle (respectivement complexe) de dimension m, et x un point de M. Désignons par $A(x)$ la réunion des algèbres $D(U)$ sur tous les ensembles ouverts U qui contiennent x. Si $f, g \in A(x)$ et $f \in D(U_1)$, $g \in D(U_2)$, alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont contenus dans $D(U_1 \cap U_2)$, donc les opérations linéaires et le produit de deux éléments quelconques sont définis dans la classe des fonctions $A(x)$.

On appelle *vecteur tangent* à la variété M au point x toute application v de la classe $A(x)$ sur le corps des nombres réels (respectivement complexes) si elle vérifie les deux conditions suivantes:

1)
$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \tag{1.4.1}$$

pour tous les $f, g \in A(x)$ et tous les nombres λ et μ réels (respectivement complexes);

2)
$$v(fg) = v(f)\, g(x) + f(x)\, v(g) \tag{1.4.2}$$

pour tous les $f, g \in A(x)$.

Si v est un vecteur tangent, f une fonction de $A(x)$, le nombre $v(f)$ est alors appelé *dérivée de la fonction f suivant la direction v.*

Soient v, v' des vecteurs tangents à la variété M au point x. Il est évident que l'application $\lambda v + \mu v'$ définie par la formule $(\lambda v + \mu v')(f) = \lambda v(f) + \mu v'(f)$ vérifie les conditions 1) et 2) pour tous les nombres μ et λ réels (respectivement complexes). Par conséquent, les vecteurs tangents au point x forment un espace linéaire. Cet espace est appelé *espace tangent* à la variété M au point x; on le désigne par $T_x(M)$.

Soit U une certaine carte au point $x \in M$ et soit $x_1, \ldots, x_m$ un système de fonctions analytiques sur U. Soit $f \in A(x)$; alors $f \in D(V)$, où V est un certain ensemble ouvert dans M qui contient x. Puisque $U \cap V$ est ouvert et contient x, on peut supposer que $U \subset V$. En vertu de la condition c), il existe une fonction F, analytique sur l'ensemble $\xi(V)$ et telle que $f = F \circ \xi$.

Il est évident que la formule

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{x_k = x_k(x)} \tag{1.4.3}$$

définit un vecteur tangent à la variété M au point x pour un choix arbitraire des coefficients réels (respectivement complexes) c_i. Montrons que la formule (1.4.3) donne la forme générale d'un vecteur tangent à la variété M au point x.

I. *Soient $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dan une certaine carte U au point $x \in M$, et v un vecteur tangent à la va*

riété M au point x. Pour chaque fonction $f \in A(x)$ on a l'égalité

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{x_k = x_k(x)}. \tag{1.4.4}$$

En particulier, le vecteur tangent est uniquement déterminé par ses valeurs sur les éléments du système de coordonnées analytiques.

D é m o n s t r a t i o n. Si $f = g$ est une fonction identiquement égale à 1 dans un certain voisinage V du point x, alors la relation (1.4.2) implique $v(f) = 2v(f)$, i.e. $v(f) = 0$. Par conséquent, $v(c) = 0$ pour chaque fonction constante c. Soient maintenant f une fonction quelconque de $A(x)$, et F la fonction analytique correspondante des variables $x_1, \ldots, x_m$ telle que $f = F \circ \xi$. En utilisant la formule de Taylor pour la fonction F dans un voisinage du point $(y_1^0, \ldots, y_m^0) = (x_1(x), \ldots, x_m(x))$, on obtient

$$F(y_1, \ldots, y_m) = a_0 + a_1(y_1 - y_1^0) + \ldots + a_m(y_m - y_m^0) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} (y_i - y_i^0)(y_j - y_j^0) G_{ij}, \tag{1.4.5}$$

où les G_{ij} sont des fonctions analytiques des variables $y_1, \ldots, y_m$ dans un voisinage du point $(y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Il découle de la formule (1.4.5) que la fonction $f = F \circ \xi$ peut être représentée sous la forme

$$f = a_0 + a_1(x - y_1^0) + \ldots + a_m(x_m - y_m^0) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} (x_i - y_i)(x_j - y_j^0) g_{ij}, \tag{1.4.6}$$

où les g_{ij} sont des fonctions de $A(x)$. En appliquant le vecteur tangent v aux deux membres de l'égalité (1.4.6) et en se servant des égalités (1.4.1), (1.4.2) et de la relation $v(c) = 0$, on obtient

$$v(f) = a_1 v(x_1 - y_1^0) + \ldots + a_m v(x_m - y_m^0) + \\ + v\Big(\sum_{i,j=1}^{m} (x_i - y_i^0)(x_j - y_j^0) g_{ij}\Big) = a_1 v(x_1) + \ldots + a_m v(x_m) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} \{[(x_i(x) - y_i^0) v(x_j - y_j^0) + (x_j(x) - y_j^0) v(x_i - y_i^0)] g_{ij}(x) + \\ + v(g_{ij})(x_i(x) - y_i^0)(x_j(x) - y_j^0)\} = a_1 v(x_1) + \ldots + a_m v(x_m), \tag{1.4.7}$$

étant donné que $x_i(x) = y_i^0$ pour tous les $i = 1, \ldots, m$. Comme $a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(y_1^0, \ldots, y_m^0)$, la formule (1.4.4) découle de (1.4.7).

II. *L'espace tangent $T_x(M)$ possède une base constituée de m vecteurs v_i définis par les formules $v_i(f) = \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{x_k = x_k(x)}$.*

La proposition découle immédiatement de (1.4.4). Il suffit de montrer que les vecteurs v_i sont linéairement indépendants, ce que l'on tire immédiatement de la relation $v_i(x_j) = \delta_{ij}$.

1.5. Différentielle d'une application analytique. Soient M, N des variétés analytiques, et φ une application analytique de la variété M dans la variété N. Soit v un vecteur tangent à la variété M au point x. Soit $y = \varphi(x)$. Posons pour toute fonction $g \in A(y)$

$$w(g) = v(g \circ \varphi); \tag{1.5.1}$$

il est clair que la formule (1.5.1) définit un vecteur w tangent à la variété N au point y. Notons $w = \varphi_*(v)$. L'application φ_* de l'espace tangent $T_x(M)$ dans l'espace tangent $T_y(N)$, définie par la formule (1.5.1), est évidemment une application linéaire. On l'appelle *différentielle* de l'application φ au point x et on la désigne parfois par $d\varphi$ ou $d\varphi_x$.

I. *Soient M et N deux variétés, φ une application analytique de la variété M dans N, et x un point de M. Supposons que l'application $d\varphi_x$ vérifie la condition suivante: si $v \in T_x(M)$ et $d\varphi_x(v) = 0$, alors $v = 0$. Dans ce cas, pour toute carte W au point $\varphi(x)$ dans N et tout système de coordonnées analytiques $y_1, \ldots, y_n$ dans W on peut choisir, parmi les fonctions $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_n \circ \varphi$, m fonctions qui définissent un système de coordonnées dans un certain voisinage $U \subset \varphi^{-1}(W)$ du point x dans M. Réciproquement, si U est une carte au point x dans M et $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans U, il existe alors une carte W au point $\varphi(x)$ et un système de coordonnées analytiques $z_1, \ldots, z_n$ dans W qui vérifie la condition $x_j = z_j \circ \varphi$ pour tous les $j = 1, \ldots, m$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $(M) \subset \varphi^{-1}(W)$ une carte au point x dans M, et $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans V. Les fonctions $y_i \circ \varphi$ peuvent être représentées dans V sous la forme $y_i \circ \varphi = F_i \circ \xi$, où F_i sont des fonctions analytiques sur $\xi(V)$. Montrons que le rang de la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ est égal à m, i.e. au nombre de variables $x_1, \ldots, x_m$. Il suffit de montrer que la relation

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0 \tag{1.5.2}$$

implique que tous les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont nuls. Introduisons le vecteur v tangent à la variété M au point x en le définissant par la formule (1.4.3) avec $c_i = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$. Alors la relation (1.5.2) signifie que $v(y_i \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0$ pour tous

les $i = 1, \ldots, n$, i.e. $(\partial\varphi_x(v))(y_i) = 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$. La formule (1.4.4) implique alors que $d\varphi_x(v) = 0$. D'où, en vertu de l'hypothèse de la proposition I, on a $v = 0$, i.e. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Ainsi la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ est de rang m. Par conséquent, on peut trouver des indices $i_1, \ldots, i_m$ parmi les nombres $1, \ldots, n$ pour lesquels le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial F_{i_p}}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$, $p, j = 1, \ldots, m$, n'est pas nul. D'après I de 1.1, les fonctions $y_{i_1} \circ \varphi, \ldots, y_{i_m} \circ \varphi$ forment un système de coordonnées analytiques dans un certain sous-ensemble ouvert $U \subset V$.

A leur tour, les fonctions x_j, $j = 1, \ldots, m$, peuvent être représentées sur l'ensemble U sous la forme $x_j = G_j(y_{i_1} \circ \varphi, \ldots, y_{i_n} \circ \varphi$ où les G_j sont des fonctions analytiques de leurs arguments et le déterminant de $\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_{ip}}\right)_{y_{i_k} = y_{i_k}(\varphi(x))}$ n'est pas nul. Soit $z_j = G_j(y_{i_1}, \ldots, y_{i_m})$, $j = 1, \ldots, m$, et prenons en guise de $z_{m+1}, \ldots, z_n$ les fonctions y_i dont les indices ne font pas partie de la famille $i_1, \ldots, i_m$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que $z_1, \ldots, z_n$ est un système de coordonnées dans un certain voisinage W du point $\varphi(x)$ et l'on a $z_j \circ \varphi = x_j$ pour $j = 1, \ldots, m$.

II. *Dans les hypothèses de la proposition* I, *il existe un voisinage U du point x dans M tel que φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$.*

La proposition découle immédiatement de la proposition I. En effet, si W et $z_1, \ldots, z_n$ vérifient les conditions de la proposition I et $U \subset \varphi^{-1}(W)$, alors l'application φ possède sur $\varphi(U)$ une application analytique inverse définie par la formule $\psi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_m)$, de sorte qu'en vertu de I, $\psi \circ \varphi$ est l'identité de U sur lui-même.

On dit que l'application φ de la variété M dans la variété N est *régulière* au point $x \in M$ si φ est analytique et $d\varphi_x$ est une bijection, de $T_x(M)$ sur un sous-ensemble $T_{\varphi(x)}(N)$ (i.e. la condition $d\varphi_x(v) = 0$ pour un $v \in T_x(M)$ donné implique $v = 0$).

III. *Soient M et N deux variétés, φ une application analytique de M dans N, et x un point de M. Soit $d\varphi_x(T_x(M)) = T_{\varphi(x)}(N)$. Si $y_1, \ldots, y_n$ est un système de coordonnées analytiques dans un voisinage W du point $\varphi(x)$ dans N, alors il existe une carte U du point x et un système de coordonnées analytiques $z_1, \ldots, z_m$ dans U tels que $z_j = y_j \circ \varphi$ pour tous les $j = 1, \ldots, n$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans un voisinage V du point x, $V \subset \varphi^{-1}(W)$. Alors $y_i \circ \varphi = F_i \circ \xi$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$. Montrons que le rang de la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ est égal à n. En effet, supposons

que l'on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.5.3}$$

et soit w_i le vecteur tangent à la variété N au point $\varphi(x)$ défini par la condition $w_i(y_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$. Par hypothèse, il existe un vecteur tangent $v_i \in T_x(M)$ tel que $d\varphi_x(v_i) = w_i$. Alors, on peut tirer de l'égalité évidente

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_p}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} v_i(x_j) = v_i(y_p \circ \varphi) \tag{1.5.4}$$

(qui découle du théorème sur la dérivée d'une fonction de fonction) que

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_p}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} v_i(x_j) = \\ = v_i(y_p \circ \varphi) = (d\varphi_x(v_i))(y_p) = w_i(y_p) = \delta_{ip}. \tag{1.5.5}$$

En multipliant la p-ième égalité (1.5.5) par λ_p et en sommant de 1 à n, on obtient, en se servant de (1.5.3), que $\lambda_i = 0$. Ainsi le rang dé la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ est égal à n. On peut supposer que le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, est différent de zéro. Alors de la proposition I de 1.1 on tire que les fonctions $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_n \circ \varphi, x_{n+1}, \ldots, x_m$ forment un système de coordonnées analytiques dans un certain voisinage $U \subset V$ du point x dans M.

IV. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* III. *Il existe alors un voisinage U du point x dans M tel que $\varphi(U)$ est un voisinage du point $\varphi(x)$ dans N.*

La proposition découle immédiatement de la proposition III.

V. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* I *et supposons en outre que $d\varphi_x(T_x(M)) = T_{\varphi(x)}(N)$ (de sorte que $d\varphi_x$ est un isomorphisme linéaire de l'espace $T_x(M)$ sur l'espace $T_{\varphi(x)}(N)$). Il existe alors un voisinage U du point x dans M que l'application φ envoie topologiquement sur un certain voisinage W du point $\varphi(x)$ dans N; en plus, l'application φ^{-1} de l'ensemble ouvert W sur U est analytique.*

La proposition s'obtient immédiatement des propositions I à IV.

Soient M_1, M_2 des variétés de dimensions m_1 et m_2 respectivement, $M = M_1 \times M_2$ le produit de ces variétés. Soient $x_1 \in M_1$,

$x_2 \in M_2$, $x = (x_1, x_2) \in M$. Désignons par φ_i la projection de la variété M sur M_i, $i = 1, 2$. Lorsque $v \in T_x(M)$, on peut déterminer les vecteurs tangents $v_i = d\varphi_i(v) \in T_{x_i}(M)$, $i = 1, 2$. Soit $x_1^{(i)}, \ldots$ $\ldots, x_{m_i}^{(i)}$ un système de coordonnées analytiques dans le voisinage U_i du point x_i sur la variété M_i, $i = 1, 2$. Alors les fonctions $x_1^{(1)} \circ \varphi_1, \ldots, x_{m_1}^{(1)} \circ \varphi_1, \ldots, x_1^{(2)} \circ \varphi_2, \ldots, x_{m_2}^{(2)} \circ \varphi_2$ forment un système de coordonnées dans le voisinage $U = U_1 \times U_2$ du point x sur M. Si $v_i \in T_{x_i}(M_i)$, $i = 1, 2$, sont des vecteurs tangents arbitraires, alors les égalités $v(x_k^{(1)} \circ \varphi_1) = v_1(x_k^{(1)})$, $k = 1, \ldots, m_1$, $v(x_k^{(2)} \circ \varphi_2) = v_2(x_k^{(2)})$, $k = 1, \ldots, m_2$, déterminent un vecteur $v \in T_x(M)$ et l'on a $d\varphi_i(v) = v_i$, $i = 1, 2$. En même temps nous voyons que les égalités $d\varphi_i(v) = v_i$, $i = 1, 2$, déterminent le vecteur $v \in T_x(M)$ de manière unique. Ainsi, *l'espace* $T_x(M)$ *peut être identifié avec la somme directe des espaces* $T_{x_1}(M_1)$ *et* $T_{x_2}(M_2)$.

Soient M une variété analytique réelle (respectivement complexe), et f une fonction analytique réelle (respectivement complexe) sur M. Alors f peut être envisagée comme une application de la variété M dans la variété **R** (respectivement **C**) de l'exemple 1 de 1.2. La différentielle de la fonction f au point $x \in M$ est l'application linéaire de l'espace tangent $T_x(M)$ dans l'espace tangent $L = T_{f(x)}(\mathbf{R})$ (respectivement $L = T_{f(x)}(\mathbf{C})$). L'espace tangent L est unidimensionnel. On peut prendre en guise de vecteur unique de la base de L le vecteur w_0 déterminé par la condition $w_0(x) = 1$, où x est l'application identique de l'espace **R** (respectivement **C**) sur lui-même. Identifions l'espace L à l'espace **R** (**C**), en identifiant le vecteur λw_0 au nombre λ. Dans ce cas l'application df peut être envisagée comme une fonctionnelle linéaire réelle (respectivement complexe) sur $T_x(M)$. Nous avons par définition $df(v) = v(f)$ pour tous les $v \in T_x(M)$.

1.6. Champs de vecteurs. Soient M une variété analytique, et U un ensemble ouvert de M. Une application X qui fait correspondre à chaque point $x \in U$ le vecteur $X(x)$ tangent à la variété M au point x s'appelle *champ de vecteurs sur* U.

Soient $U \subset M$, $f \in D(U)$, et soit X un champ vectoriel sur U. Posons

$$g(x) = X(x) f \tag{1.6.1}$$

pour tous les $x \in U$; alors la fonction g est définie sur U. Désignons la fonction g par Xf. Le champ vectoriel X est dit *analytique* si pour chaque $V \subset U$ nous avons $Xf \in D(V)$ pour tous les $f \in D(V)$. Soient U une carte dans M, et $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans U, $V \subset U$, $f \in D(V)$. Alors $f = F \circ \xi$, où F

est une fonction analytique sur $\xi(V)$. Posons

$$X_j(x)(f)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k=x_k(x)},\quad j=1,\ \ldots,\ m,\quad x\in U. \tag{1.6.2}$$

Il est évident qu'à chaque point $x \in U$ correspond un vecteur tangent à la variété M au point x, l'application $x \to X_i(x)$ étant un champ vectoriel sur U.

Soit X un champ vectoriel sur U. En vertu de la proposition I de 1.4, X peut être représenté sous la forme

$$X(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j(x)\,X_j(x),\quad x\in U, \tag{1.6.3}$$

où $X_j(x)$ est défini par l'égalité (1.6.2) tandis que les $a_1, \ldots, a_m$ sont des fonctions définies sur U. Si le champ vectoriel X est analytique, alors les fonctions $a_j(x)$ le sont aussi, car

$$a_j(x) = Xx_j,\quad j = 1,\ \ldots,\ m, \tag{1.6.4}$$

où $x_j \in D(U)$; par conséquent $a_j(x) \in D(U)$. Réciproquement, si $a_j(x) \in D(U)$, $j = 1, \ldots, m$, alors la formule (1.6.3) définit un champ vectoriel analytique sur U. On tire de (1.6.2) que la relation (1.6.3) est équivalente à l'égalité

$$(Xf)(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j(x)\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k=x_k(x)},\quad f\in D(U); \tag{1.6.5}$$

ceci nous permet d'écrire au besoin la relation (1.6.3) sous forme d'égalité formelle

$$X=\sum_{j=1}^{m} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.6.6}$$

Soient X et Y des champs vectoriels analytiques sur la variété M. Posons

$$Z = X\circ Y - Y\circ X. \tag{1.6.7}$$

L'application Z est un champ vectoriel analytique sur M. En effet, si $x \in M$, U est la carte au point x et $x_1, \ldots, x_m$ le système de coordonnées analytiques dans U, alors pour chaque fonction $f \in D(V)$, $V \subset U$, $x \in V$, on a

$$\begin{aligned}(Xf)(y)&=\sum_{j=1}^{m} a_j(x_1(y),\ \ldots,\ x_m(y))\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k=x_k(y)},\\ (Yf)(y)&=\sum_{j=1}^{m} b_j(x_1(y),\ \ldots,\ x_m(y))\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k=x_k(y)}\end{aligned} \tag{1.6.8}$$

pour tous les $y \in V$, où a_j, b_j sont des fonctions analytiques sur $\xi(V)$. Un calcul direct montre que

$$(Zf)(y) = \sum_{i,\,j=1}^{m} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_{x_k = x_k(y)}, \quad y \in V; \quad (1.6.9)$$

la relation (1.6.9) signifie en particulier que Z est un champ vectoriel analytique sur la variété M. Désignons le champ vectoriel Z par $[X, Y]$; on l'appelle souvent *commutateur* des champs vectoriels X et Y.

Puisque le champ vectoriel X prend en chaque point $x \in M$ des valeurs dans l'espace linéaire $T_x(M)$, l'ensemble des champs vectoriels sur la variété M se trouve muni des opérations d'addition et de multiplication par un nombre définies par les formules

$$(X + Y)(x) = X(x) + Y(x), \quad (\alpha X)(x) = \alpha X(x). \quad (1.6.10)$$

Le lecteur vérifiera sans peine qu'avec la définition (1.6.10) l'ensemble des champs vectoriels sur M devient un espace linéaire, tandis que l'ensemble des champs vectoriels analytiques est un sous-espace linéaire de l'espace de tous les champs vectoriels. On vérifie tout aussi facilement que pour des champs vectoriels analytiques quelconques X, Y, Z sur M et des nombres arbitraires λ, μ on a les égalités:

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z], \ [X, \lambda Y + \mu X] = \\ = \lambda [X, Y] + \mu [X, Z], \quad (1.6.11)$$

$$[X, X] = 0, \quad (1.6.12)$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \quad (1.6.13)$$

L'égalité (1.6.13) s'appelle *identité de Jacobi*. On tire de (1.6.11) et (1.6.12) que

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, Y] + [Y, X],$$

donc

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (1.6.14)$$

pour tous les champs vectoriels analytiques X, Y sur M.

Soient φ une application analytique de la variété M dans une variété N, et X un champ vectoriel sur M. Le champ vectoriel Y sur N s'appelle *image* du champ vectoriel X lorsque $d\varphi_x(X(x)) = Y(\varphi(x))$ pour tous les $x \in M$; désignons ce champ vectoriel Y par $d\varphi(X)$. Si l'application φ est régulière en chaque point $x \in M$ (ou, comme nous dirons par la suite, est *partout régulière*), alors il ne peut exister sur la variété M qu'un champ vectoriel unique X ayant pour image le champ vectoriel donné Y sur N; en effet, pour une application régulière, le vecteur $X(x)$ se détermine de façon unique par son image par l'application $d\varphi_x$. Démontrons le théorè-

me d'existence d'un champ vectoriel X tel que $Y(\varphi(x)) = d\varphi_x(X(x))$ pour tous les $x \in M$.

I. *Soient* φ *une application partout régulière de la variété* M *dans la variété* N, *et* x *un point de* M. *Soit* Y *un champ vectoriel analytique sur* N *tel que* $Y(\varphi(x)) \in d\varphi_x(T_x(M))$ *pour tous les* $x \in N$; *il existe sur* M *un seul champ vectoriel* X *ayant pour image le champ* Y.

Démonstration. Selon les hypothèses faites, pour chaque $x \in M$ il existe un seul élément $X(x) \in T_x(M)$ tel que $d\varphi_x(X(x)) = Y(\varphi(x))$. Il faut démontrer que l'application $X: x \to X(x)$ est un champ vectoriel analytique. Il découle de la proposition I de 1.5 que dans un certain voisinage W du point $\varphi(x)$ dans N il existe un système de coordonnées analytique $y_1, \ldots, y_n$ tel que $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi$ est un système de coordonnées analytique dans un certain voisinage $U \subset \varphi^{-1}(W)$ du point x dans M. Pour $y \in U$ la relation $(d\varphi_y)(X(y)) = Y(\varphi(y))$ signifie que $X(y)(y_i \circ \varphi) = d\varphi_y(X(y))(y_i) = Y(\varphi(y))(y_i) = (Yy_i)(\varphi(y))$, i.e. la fonction $X(y_i \circ \varphi)$ coïncide sur l'ensemble U avec la fonction $Y(y_i \circ \varphi$. Comme Y est un champ vectoriel analytique sur N, Yy_i est une fonction analytique sur W. Par conséquent, la fonction $X(y_i \circ \varphi)$ est analytique sur U, ce qui démontre que X est effectivement un champ vectoriel analytique.

Si l'application φ de la variété M sur N n'est pas *surjective*, alors l'image d'un champ vectoriel sur M n'est en général pas définie uniquement. Toutefois on a la proposition suivante.

II. *Soient* φ *une application analytique de la variété* M *dans la variété* N, X_1 *et* X_2 *des champs vectoriels analytiques sur* M, *et* Y_1, Y_2 *les images des champs* X_1 *et* X_2 *respectivement. Alors le champ vectoriel* $[Y_1, Y_2]$ *est l'image du champ vectoriel* $[X_1, X_2]$ *par* φ.

Démonstration. Soient $x_0 \in M$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Soit V un voisinage du point y_0 dans N et $f \in D(V)$. Désignons par U un voisinage (du point x_0 dans M) qui vérifie la condition $\varphi(U) \subset V$. Alors la relation $Y_i = d\varphi(X_i)$ signifie que $Y_i(\varphi(x)) f = d\varphi_x(X_i(x)) f$, i.e.

$$(Y_i f)(\varphi(x)) = (X_i(f \circ \varphi))(x) \tag{1.6.15}$$

pour tous les $x \in U$, $i = 1, 2$. Donc

$$(Y_i f \circ \varphi)(x) = (X_i(f \circ \varphi))(x) \tag{1.6.16}$$

pour tous les $x \in U$, $i = 1, 2$. On tire immédiatement de (1.6.15) et (1.6.16) que

$$(Y_1 Y_2 f)(\varphi(x)) = (X_1(Y_2 f \circ \varphi))(x) = (X_1 X_2(f \circ \varphi))(x)$$

pour tous les $x \in U$. Une formule analogue est valable pour $(Y_2 Y_1 f) \times (\varphi(x))$. En soustrayant, on obtient l'égalité

$$([Y_1, Y_2] f)(\varphi(x)) = ([X_1, X_2](f \circ \varphi))(x)$$

pour tous les $x \in U$; par conséquent $([Y_1, Y_2])(\varphi(x)) = d\varphi_x \times$ $\times ([X_1, X_2](x))$.

1.7. Sous-variétés. Une variété N s'appelle *sous-variété* d'une variété M si N est un sous-ensemble de M et l'application identique de N dans M est régulière en chaque point de N. En vertu de cette définition l'application identique de N dans M est évidemment continue. Remarquons qu'une sous-variété ouverte N de la variété M est aussi une sous-variété dans le sens de la définition que nous venons de donner.

Soit N une sous-variété de la variété M; soit φ l'application identique de N dans M. Soient enfin $x \in N$, U un sous-ensemble ouvert de M, $x \in U$, et f un élément de l'algèbre $D(U)$; alors la fonction $f \circ \varphi$ est analytique sur le sous-ensemble ouvert $U \cap N$ de N. Conformément à la proposition I de 1.5, il existe un ensemble ouvert $U \subset M$ et un système de coordonnées analytiques $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ dans le voisinage U tels que les fonctions $x_1 \circ \varphi, \ldots$ $\ldots, x_n \circ \varphi$ (où n est la dimension de la variété) forment un système de coordonnées dans l'ensemble ouvert $U \cap N$ de la variété N. Soit $g \in D(U \cap N)$; alors g peut être représenté sous forme d'une fonction analytique $G(x_1 \circ \varphi, \ldots, x_n \circ \varphi)$. Soit $F(y) =$ $= G(x_1(y), \ldots, x_n(y))$, $y \in M$; par conséquent, c'est une fonction analytique de U sur M, et $F \circ \varphi = g$ sur $U \cap N$. Donc toute fonction g, analytique dans un certain voisinage du point $x \in N$, peut être représentée dans un certain voisinage $U \subset M$ du point x sous la forme $g = f \circ \varphi$, où $f \in D(U)$ sur M.

La différentielle $d\varphi_x$ de l'application φ au point $x \in N$ est une application isomorphe de l'espace tangent $T_x(N)$ sur un certain sous-espace vectoriel $\widetilde{T_x(N)}$ de l'espace $T_x(M)$. Parfois l'espace $\widetilde{T_x(N)}$ est appelé *espace tangent à la variété N au point x*.

Soit X un champ vectoriel analytique sur M tel que $X(x) \in$ $\in \widetilde{T\ (N)}$ quel que soit $x \in N$. L'application φ étant partout régulière, il découle de la proposition I de 1.6 qu'il existe sur N un champ vectoriel analytique unique Y tel que $X(x) = d\varphi_x(Y(x))$ quel que soit $x \in N$. Nous dirons que le champ vectoriel Y est *induit* sur N par le champ vectoriel X. On vérifie facilement que si X_1, X_2 sont des champs vectoriels analytiques sur M, et Y_1, Y_2 sont les champs vectoriels induits sur N, alors le champ vectoriel $[Y_1, Y_2]$ est induit par le champ vectoriel $[X_1, X_2]$.

I. *Soient M une variété, N une sous-variété de M et $x \in N$. Il existe alors un voisinage U du point x dans N, un voisinage V du point x dans M contenant U, et une famille de fonctions $f_1, \ldots, f_k \in D(V)$ qui vérifient la condition suivante: le point $z \in V$ appartient à U si et seulement si $f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\dim M = m$, $\dim N = n$. D'après

la proposition I de 1.5, il existe un voisinage V' du point x dans M et un système de coordonnées analytiques $x_1, \ldots, x_m$ dans le voisinage V' tels que les restrictions des fonctions $x_1, \ldots, x_m$ à $N \cap V'$ forment un système de coordonnées analytiques dans un certain voisinage U du point x dans N. Soit $\eta(z) = (x_1(z), \ldots, x_n(z))$ pour tous les $z \in V'$. Désignons par V le sous-ensemble de V' constitué par les points $z \in V'$ pour lesquels $\eta(z) \in \eta(U)$. Il est évident que V est un voisinage du point x dans M, tandis que les restrictions des fonctions $x_1, \ldots, x_m$ à V forment un système de coordonnées analytiques dans V. Les restrictions des fonctions $x_{n+1}, \ldots, x_m$ à l'ensemble U sont des fonctions analytiques sur U. Par conséquent, il existe des fonctions analytiques $F_1, \ldots, F_{n-m}$ sur $\eta(U)$ telles que $x_{n+j}(z) = F_j(x_1(z), \ldots, x_n(z))$ pour tous les $z \in U$, $j = 1, \ldots, m-n$. Posons $f_j = x_{n+j} - F_j(x_1, \ldots, x_n)$ pour tous les $j = 1, \ldots, m-n$. D'après ce qui précède on a $f_j(z) = 0$ pour tous les $z \in U$, $j = 1, \ldots, m-n$. Réciproquement, supposons que le point $z \in V$ a été choisi de manière à avoir $f_j(z) = 0$ pour tous les $j = 1, \ldots, m-n$. Soit w un point de l'ensemble U déterminé par la condition $\eta(w) = \eta(z)$ (un tel point w existe car $\eta(U) = \eta(V)$). Alors $x_{n+j}(w) = F_j(x_1(w), \ldots, x_n(w)) = F_j(\eta(w)) = F_j(\eta(z))$. Mais $f_j(z) = 0$, i.e. $x_{n+j}(z) = F_j \times (x_1(z), \ldots, x_n(z)) = 0$. Par conséquent, $F_j(\eta(z)) = x_{n+j}(z)$ et les coordonnées des points w et z dans le voisinage V coïncident. Ainsi $w = z$; mais $w \in U$, donc $z \in U$, ce qui termine la démonstration de la proposition I (et l'on a $k = m - n$).

§ 2. Algèbres de Lie

Soit K le corps des nombres réels ou complexes. L'ensemble L s'appelle *algèbre de Lie sur le corps K si*:

a) L est un espace linéaire sur K (ce qui signifie, en particulier, que la multiplication des éléments $x \in L$ par les nombres de K est définie dans L);

b) à chaque couple $x, y \in L$ correspond un élément de L, désigné par $[x, y]$, pour lequel les conditions suivantes sont satisfaites:

(b_1) $[x, y]$ est linéaire relativement à x et relativement à y (cela signifie que $[\alpha x, y] = \alpha [x, y]$, $[x, \alpha y] = \alpha [x, y]$ pour $\alpha \in K$ et $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$, $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$ quels que soient $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$;

b_2) $$[x, x] = 0 \text{ pour tous les } x \in L; \qquad (2.1.1)$$

b_3) $$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \qquad (2.1.2)$$

pour tous les $x, y, z \in L$.

L'identité (2.1.2) s'appelle *identité de Jacobi*. L'élément $[x, y]$ est souvent appelé *commutateur* des éléments $x, y \in L$.

Si K est le corps de nombres réels (respectivement complexes),

l'algèbre de Lie L est appelée *réelle* (respectivement *complexe*). Par la suite, sauf mention du contraire, toutes les algèbres de Lie L seront supposées de dimension finie (en tant qu'espaces linéaires).

I. *Pour toute algèbre de Lie L on a l'égalité*

$$[x, y] = -[y, x] \tag{2.1.3}$$

quels que soient $x, y \in L$.

Démonstration. En vertu des conditions b_1) et b_2),

$$0 = [x+y, x+y] = [x, x] + [y, x] + [x, y] + [y, y] = \\ = [x, y] + [y, x].$$

Soient L une algèbre de Lie sur K, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de l'espace vectoriel L. En décomposant les éléments $[e_i, e_j]$ de l'algèbre de Lie L relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$ on obtient les relations

$$[e_i, e_j] = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_{ijk} e_k. \tag{2.1.4}$$

Les nombres c_{ijk} s'appellent *constantes de structure* de l'algèbre de Lie L relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$. On voit facilement que les relations (2.1.2) et (2.1.3) sont équivalentes aux relations

$$c_{ijk} = -c_{jik} \tag{2.1.5}$$

pour tous les $i, j, k = 1, \ldots, n$;

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ijk} c_{klm} + c_{jlk} c_{kim} + c_{lik} c_{kjm}) = 0 \tag{2.1.6}$$

pour tous les $i, j, l, m = 1, \ldots, n$.

Les définitions générales données dans 2.1 à 2.3 du chapitre II prennent dans le cas des algèbres de Lie la forme suivante.

Soit L une algèbre de Lie. Un sous-ensemble $M \subset L$ est dit *idéal* de L si M un espace linéaire dans L et $[x, y] \in M$ pour tous les $x \in M$, $y \in L$. Le sous-ensemble $L' \subset L$ s'appelle *sous-algèbre de Lie* de l'algèbre de Lie L si L' est un sous-espace linéaire de L et $[x, y] \in \in L'$ quels que soient $x, y \in L'$. Il est clair que tout idéal est également une sous-algèbre de Lie. Supposons que L, L_1 sont des algèbres de Lie sur le corps K, et π est une application linéaire de L dans L_1. L'application π est un *homomorphisme* si

$$[\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) \tag{2.1.7}$$

quels que soient $x, y \in L$. Si $\operatorname{Ker} \pi = 0$, alors π est dite *exacte*. Un homomorphisme bijectif de L sur L_1 est appelé *isomorphisme* de L et L_1; dans ce cas L et L_1 sont dits *isomorphes*.

II. *Soient L, L_1 des algèbres de Lie, et $\pi: L \to L_1$ un homomorphisme; alors $\pi(L)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L_1; le noyau de l'application π est un idéal dans L. Supposons que L est*

une algèbre de Lie, M un idéal dans L, $L' = L/M$ l'espace quotient de L par M et π l'application canonique de L sur L'. Posons

$$[x', y'] = \pi([x, y]) \tag{2.1.8}$$

pour x', $y' \in L$ et $x' = \pi(x)$, $y' = \pi(y)$, x, $y \in L$. Alors $[x', y']$ ne dépend pas du choix des représentants $x \in x'$, $y \in y'$, tandis que $[x', y']$ satisfait à la condition b). *Par conséquent, $[x', y']$ étant défini comme ci-dessus, l'ensemble L' est une algèbre de Lie sur K.*

La démonstration de cette assertion est analogue à celle des propositions correspondantes pour les algèbres associatives (voir 2.2, chapitre II).

L'algèbre de Lie L' est appelée *algèbre-quotient* de l'algèbre de Lie L par l'idéal M.

III. *Soient $L_1, \ldots, L_m$ des algèbres de Lie sur K. L'espace linéaire $L = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_m$ dans lequel*

$$[(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)] = ([x_1, y_1], \ldots, [x_m, y_m]), \tag{2.1.9}$$

x_i, $y_i \in L_i$, $i = 1, \ldots, m$, est une algèbre de Lie sur K.

La vérification de cette assertion est laissée au lecteur. L'algèbre de Lie L s'appelle *somme directe* des algèbres de Lie L_i, $i = 1, \ldots, m$.

EXEMPLES D'ALGÈBRES DE LIE. 1) Soit L un espace vectoriel de dimension finie sur K et supposons que $[x, y] = 0$ pour tous les x, $y \in L$. Il est évident que L est une algèbre de Lie sur K; on l'appelle algèbre de Lie commutative, ou *abélienne*.

2) Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur K, L l'espace linéaire des applications linéaires de V dans V. Pour x, $y \in L$ posons

$$[x, y] = xy - yx. \tag{2.1.10}$$

Alors L devient une algèbre de Lie sur K; cette algèbre de Lie est désignée par $gl(V)$; lorsque $V = K^n$ *), l'algèbre de Lie $gl(V)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices $n \times n$ à éléments de K, où $[\cdot, \cdot]$ est défini par la formule (2.1.7). Cette algèbre de Lie est désignée par $gl(n, K)$. Notons les plus importantes des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $gl(n, K)$; ce sont: la sous-algèbre $sl(n, K)$ constituée par les matrices à trace nulle; la sous-algèbre $so(n, K)$ de toutes les matrices antisymétriques (i.e. des matrices A telles que $A^t = -A$, où A^t est la transposée de A); la sous-algèbre $sp(n, K)$, $n = 2m$, constituée des matrices A telles que $A^tJ + JA = 0$, où $J = \begin{Vmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{Vmatrix}$ et I_m est la matrice unité de rang m. Le lecteur prou-

*) K^n est l'espace linéaire sur le corps K, constitué par les familles ordonnées de n éléments de K et muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un nombre.

vera facilement que les sous-ensembles indiqués sont effectivement des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $gl(n, K)$.

3) L'exemple 2) admet une généralisation. Soit A une algèbre associative sur le corps K; posons $[a, b] = ab - ba$ pour tous les $a, b \in A$. Cette opération munit A d'une structure d'algèbre de Lie;

4) Soit L un espace euclidien réel de dimension trois. Pour $x, y \in L$ définissons $[x, y]$ comme produit vectoriel des vecteurs x et y. Les propriétés bien connues du produit vectoriel permettent de conclure que L est une algèbre de Lie réelle.

5) Chaque algèbre de Lie complexe L peut également être envisagée comme une algèbre de Lie réelle, puisque dans un espace linéaire complexe on peut définir la multiplication par des nombres réels et transformer ainsi L en un espace linéaire réel. Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base dans l'espace linéaire complexe L, alors $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ est une base dans l'espace linéaire réel L; par conséquent, la dimension de l'algèbre de Lie L réelle est le double de celle de l'algèbre de Lie L complexe. Si les (c_{ijk}) sont des constantes de structure de l'algèbre de Lie L complexe relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$, on tire des égalités (2.1.4) que les constantes de structure de l'algèbre de Lie L réelle relativement à la base $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ sont égales à $\pm \operatorname{Re} c_{ijk}$, $\pm \operatorname{Im} c_{ijk}$:

$$\begin{aligned} [e_k, e_l] = -[ie_k, ie_l] &= \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \operatorname{Re}(c_{klm})\, e_m + \operatorname{Im}(c_{klm})\, ie_m; \\ [ie_k, e_l] = [e_k, ie_l] &= \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \operatorname{Re}(c_{klm})\, ie_m - \operatorname{Im}(c_{klm})\, e_m. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

En particulier, l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{C})$ est également une algèbre de Lie réelle.

Soient L une algèbre de Lie sur K, V un espace vectoriel complexe de dimension finie. L'homomorphisme π de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre $gl(V)$ (envisagée comme une algèbre de Lie sur le corps K) est appelé *représentation de dimension finie* de l'algèbre de Lie L dans l'espace V. La dimension de l'espace V s'appelle *dimension* de la représentation π.

EXEMPLES DE REPRÉSENTATIONS. 1) Soit π l'application de L dans $gl(V)$ définie par la formule $\pi(x) = 0$ pour tous les $x \in L$. Alors π est une représentation de L dans V; on l'appelle *représentation nulle* de dimension n.

2) Soit L une algèbre de Lie. Pour chaque $x \in L$ désignons par ad x la transformation linéaire de l'espace V déterminée par la formule

$$(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y] \tag{2.1.12}$$

pour tous les $y \in L$. La relation (2.1.2) peut s'écrire sous la forme

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]. \tag{2.1.13}$$

En substituant la relation (2.1.12) dans (2.1.13), on obtient

$$(\mathrm{ad}\,[x,\ y])\,z = \mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y\,(z) - \mathrm{ad}\,y\,\mathrm{ad}\,(x)\,(z) = \\ = [\mathrm{ad}\,x,\ \mathrm{ad}\,y]\,(z) \quad (2.1.14)$$

quels que soient x, y, $z \in L$, donc;

$$\mathrm{ad}\,[x,\ y] = [\mathrm{ad}\,x,\ \mathrm{ad}\,y], \quad (2.1.15)$$

et la formule (2.1.12) définit un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl\,(L)$. Le noyau de cet homomorphisme est l'idéal des éléments $x \in L$ tels que $[x,\ y] = 0$ pour tous les $y \in L$; cet idéal s'appelle *centre* de L. Si L est une algèbre de Lie complexe, alors l'homomorphisme $x \to \mathrm{ad}\,x$ détermine une représentation de L dans L. Cette représentation s'appelle *représentation adjointe* de l'algèbre de Lie L.

Pour les représentations d'algèbres de Lie on peut définir les notions de somme directe et de produit tensoriel, d'équivalence de représentations, de sous-représentation, de représentations dans un espace quotient et de représentations irréductibles tout comme on a défini les notions correspondantes pour les représentations des groupes et des algèbres associatives (voir chapitres I et II). Le détail est laissé au lecteur (voir également 1.2, chapitre X).

§ 3. Groupes de Lie

3.1. Définition du groupe de Lie. Un ensemble G s'appelle *groupe de Lie* si : 1) G est un groupe topologique ; 2) G est une variété analytique ; 3) l'application $(g, h) \to gh^{-1}$ du produit $G \times G$ dans G est une application analytique de variétés.

Si G est une variété analytique réelle (respectivement complexe), on dit que G est un groupe de Lie *réel* (respectivement complexe)

EXEMPLES

1. L'espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) considéré comme un groupe relativement à l'addition, muni de la topologie usuelle et considéré, conformément à l'exemple 1 de 1.2, comme une variété analytique réelle (respectivement complexe) est un groupe de Lie réel (respectivement complexe).

2. Considérons le groupe $GL\,(n, \mathbf{C})$. Soit $g = (x_{ij}\,(g))$ une matrice appartenant à ce groupe. Faisons correspondre à la matrice $g \in GL\,(n, \mathbf{C})$ le point $\varphi\,(g)$ de l'espace $\mathbf{C}^{n^2}$ aux coordonnées $x_{ij}\,(g)$ (disposées une fois pour toutes dans un ordre fixe). L'application φ ainsi définie est un homéomorphisme de l'espace $GL\,(n,\ \mathbf{C})$ sur le sous-ensemble M de tous les points de $\mathbf{C}^{n^2}$ pour lesquels on a $\det\,(x_{ij}) \neq 0$. L'ensemble M est un sous-ensemble ouvert dans $\mathbf{C}^{n^2}$, donc M peut être envisagé comme une sous-variété ouverte de $\mathbf{C}^{n^2}$.

Nous pouvons alors envisager le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ comme une variété analytique complexe de dimension n^2, en particulier, les fonctions $x_{ij}(g)$ constituent un système de coordonnées analytiques sur la variété $GL(n, \mathbf{C})$.

Les quantités $x_{ij}(gh^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)\, x_{kj}(h^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{ik}(g)\, A_{jk}(h)}{\det(x_{ij}(h))}$, où $A_{jk}(h)$ est le complément algébrique de l'élément $x_{jk}(h)$, sont évidemment des fonctions rationnelles de $x_{ij}(g)$, $x_{jk}(h)$ et le dénominateur $\det(x_{ij}(h))$ ne s'annule pas sur $GL(n, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application $(g, h) \to gh^{-1}$ est une application analytique $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$. Ainsi $GL(n, \mathbf{C})$ est un groupe de Lie complexe.

3. Considérons le groupe T^1. Nous savons de l'exemple 2 de 1.2 que T^1 est une variété réelle unidimensionnelle et les fonctions $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ et $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$ sont des fonctions analytiques sur T^1. D'autre part, chaque point de la variété T^1 possède un voisinage dans lequel au moins une des fonctions $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ forme un système de coordonnées analytiques. Par conséquent, les formules

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi,$$

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi$$

signifient que T^1 peut être envisagé comme un groupe de Lie réel.

4. Soit G un groupe de Lie complexe. En considérant la variété analytique complexe G comme une variété analytique réelle (voir l'exemple 4, 1.2), nous obtenons évidemment un groupe de Lie réel. Ainsi, *chaque groupe de Lie complexe peut en même temps être considéré comme un groupe de Lie réel.*

5. Soient G, H deux groupes de Lie. Le produit $G \times H$ est un groupe topologique et une variété analytique. Le lecteur vérifiera sans difficulté que l'application φ de la variété $(G \times H) \times (G \times H)$ dans $G \times H$ définie par la formule $\varphi((g, h), (g_1, h_1)) = (gg_1^{-1}, hh_1^{-1})$ est une application analytique. Par conséquent, $G \times H$ est un groupe de Lie, que l'on appelle *produit des groupes de Lie G et H.*

3.2. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie. L'application $g \to g^{-1}$ de la variété G sur G est analytique par définition; par conséquent, pour tout $h \in G$, l'application $\varphi_h : g \to hg = h(g^{-1})^{-1}$ de la variété G sur G est analytique. Soit $d\varphi_h$ la différentielle de l'application φ_h (voir 1.5). Le champ vectoriel X sur la variété G est dit *invariant à gauche* si

$$(d\varphi_{gh^{-1}})_h X(h) = X(g) \text{ pour tous les } g, h \in G. \qquad (3.2.1)$$

I. *Un champ vectoriel X sur G est invariant à gauche si et seulement si $(d\varphi_g)_e X(e) = X(g)$ pour tous les $g \in G$.*

Démonstration. Si X est invariant à gauche, alors on peut tirer de (3.2.1) pour $h = e$ que $(d\varphi_g)_e X(e) = X(g)$ pour tous les $g \in G$. Réciproquement, supposons que cette condition est vérifiée. Les applications $\varphi_{h^{-1}}$ et φ_h sont inverses l'une de l'autre, donc $d\varphi_{h^{-1}}$ et $d\varphi_h$ le sont également. Par conséquent, $X(e) = (d\varphi_{h^{-1}})_h X(h)$; donc

$$X(g) = (d\varphi_g)_e (d\varphi_{h^{-1}})_h X(h) =$$
$$= (d(\varphi_g \circ \varphi_{h^{-1}}))_h X(h) = (d\varphi_{gh^{-1}})_h X(h).$$

II. *Pour chaque élément $X(e) \in T_e(G)$* (voir 1.4) *il existe un seul champ vectoriel X invariant à gauche sur G dont la valeur au point e est $X(e)$.*

La proposition découle immédiatement de I.

III. *Chaque champ vectoriel invariant à gauche sur G est analytique.*

Démonstration. Soient g_0 un élément de G, U une carte de l'élément g_0, et $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans U. Il existe un ensemble ouvert $V \subset U$ contenant l'élément g_0 et tel que $gg_0^{-1}h \in U$ pour tous les $g, h \in V$. Soit g un élément de V; en vertu de la définition de la différentielle d'une application nous avons

$$X(g)\, x_i = ((d\varphi_{gg_0^{-1}})_{g_0} X(g_0))\, x_i = X(g_0)\, (x_i \circ \varphi_{gg_0^{-1}}).$$

Les fonctions $x_i(gg_0^{-1}h)$ sont définies et analytiques en g, h sur $V \times V$, donc

$$x_i(gg_0^{-1}h) = F_i(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)),$$

où les fonctions $F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ sont analytiques relativement à toutes les variables dans $\xi(V) \times \xi(V)$. Ainsi

$$X(g)\, x_i = \sum_{j=1}^{m} (X(g_0)\, x_j) \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)_{y_k = x_k(g),\ z_k = x_k(g_0)}. \qquad (3.2.2)$$

Les quantités $X(g_0)\, x_j$ figurant dans le deuxième membre de la formule (3.2.2) sont constantes, tandis que l'analyticité des fonctions $\partial F_i/\partial z$ implique celle des fonctions $X(g)\, x_i$ dans V, ce qui démontre l'analyticité de la transformation X.

IV. *Si X, Y sont des champs vectoriels invariants à gauche, alors les champs $X + Y$, λX, $[X, Y]$ sont invariants à gauche.*

La proposition est évidente pour $X + Y$ et λX. En outre, il découle de II de 1.6 que

$$(d\varphi_{gh^{-1}})_h ([X, Y] (h)) = [(d\varphi_{gh^{-1}})_h (X), (d\varphi_{gh^{-1}})_h (Y)] (g) = [X, Y] (g),$$

ce qui prouve que $[X, Y]$ est également invariant à gauche.

V. *L'ensemble des champs vectoriels invariants à gauche sur un groupe de Lie réel (respectivement complexe) est une algèbre de Lie réelle (respectivement complexe) relativement aux opérations d'addition, de multiplication par un nombre et de commutation des champs vectoriels. La dimension de cette algèbre de Lie est égale à celle de la variété G.*

La proposition découle immédiatement des propositions II à IV et de la proposition II de 1.4.

D'une manière analogue on peut définir une algèbre de Lie en se servant des champs vectoriels invariants à droite; le détail est laissé au lecteur.

EXEMPLES.

1. Soient **R** le groupe additif des nombres réels, et x la fonction coordonnée sur **R**, définie par l'identité de **R** sur **R**. Soit X le champ vectoriel sur **R** défini par la formule $X(a) = 1$ pour tous les $a \in \mathbf{R}$. Le champ vectoriel X est invariant à gauche. En effet, si φ_a est la translation de $a \in \mathbf{R}$, alors $\varphi_a(b) = b + a$, $((d\varphi_a)_0 X(0))\, x = X(0)(x \circ \varphi_a) = X(0)(x + a) = 1 = X(a)\, x$. Ainsi, X est l'élément de base dans l'algèbre de Lie du groupe **R**; quant à cette algèbre elle-même, elle est constituée par tous les multiples réels de l'élément X et représente une algèbre de Lie réelle unidimensionnelle (abélienne), isomorphe à **R**. D'une manière analogue, l'algèbre de Lie du groupe additif **C**, envisagée comme un groupe de Lie complexe, est isomorphe à **C**.

2. Puisque le groupe T^1 est unidimensionnel, son algèbre de Lie est également unidimensionnelle et donc isomorphe à l'algèbre de Lie abélienne **R**.

3. Soit $G = GL(n, \mathbf{C})$ le groupe de Lie complexe. Soit X un champ vectoriel analytique. Désignons par Xx_{ij} le résultat de l'action du champ X sur la fonction analytique x_{ij} sur le groupe G. Posons $a_{ij}(X) = X(e)\, x_{ij}$. L'application $X \to a_{ij}(X)$ est une application linéaire de l'algèbre de Lie L du groupe G dans l'espace vectoriel complexe $M_n(\mathbf{C})$ des matrices complexes carrées d'ordre n. Si $a_{ij}(X) = 0$ pour tous les i, j, on a $X(e) = 0$ (puisque les x_{ij} forment un système de coordonnées analytiques sur G), et la proposition I implique alors que $X = 0$. Par conséquent, l'application $X \to a_{ij}(X)$ est un isomorphisme linéaire de l'espace L sur un certain sous-espace de l'espace $M_n(\mathbf{C})$. Mais

$$\dim L = \dim G = n^2 = \dim M_n(\mathbf{C});$$

par conséquent, l'image de l'algèbre de Lie L par l'application $X \to a_{ij}(X)$ est l'espace $M_n(\mathbf{C})$ tout entier.

Soient X, Y des champs vectoriels invariants à gauche sur G; trouvons la matrice $a_{ij}([X, Y])$. La formule

$$X(g)\, x_{ij} = d\varphi_g X(e)\, x_{ij} = X(e)(x_{ij} \circ \varphi_g), \quad g \in G,$$

implique que

$$X(g)\, x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)(X(e)\, x_{kj}) = \sum_{k} x_{ik}(g)\, a_{kj}(X). \quad (3.2.3)$$

Envisageons $X(g)\, x_{ij}$ comme une fonction de g; on tire alors de la relation (3.2.3)

$$Y(e)(X(g)\, x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(Y)\, a_{kj}(X). \quad (3.2.4)$$

D'une manière analogue

$$X(e)(Y(g)\, x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(X)\, a_{kj}(Y). \quad (3.2.5)$$

Soient $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ les matrices $(a_{ij}(X))$, $(a_{ij}(Y))$ respectivement; d'après (3.2.4) et (3.2.5) la matrice $(a_{ij}([X, Y]))$ est égale à $\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}$. Ainsi nous avons démontré la proposition suivante.

VI. *L'algèbre de Lie du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{C})$ de toutes les matrices complexes d'ordre n dans laquelle l'opération de commutation est définie par la formule $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}$.*

Un raisonnement analogue montre que l'algèbre de Lie du groupe $GL(n, \mathbf{R})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{R})$.

4. Soient G, H des groupes de Lie, et L, M leurs algèbres de Lie. Nous savons que l'espace tangent $T_{(g,h)}(G \times H)$ est isomorphe au produit $T_g(G) \times T_h(H)$ pour tous les $g \in G$, $h \in H$. Soient X, Y des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et H respectivement. Posons $Z(g, h) = (X(g), Y(h)) \in T_{(g,h)}(G \times H)$; alors Z est un champ vectoriel sur $G \times H$. Le lecteur vérifiera sans peine que le champ vectoriel Z est invariant à gauche; en outre si X_1, Y_1 sont aussi des champs vectoriels invariants à gauche sur G et H, et que $Z_1(g, h) = (X_1(g), Y_1(h))$, alors $[Z, Z_1](g, h) = ([X, X_1](g), [Y, Y_1](h))$, i.e. *l'algèbre de Lie du groupe $G \times H$ est isomorphe à la somme directe des algèbres de Lie des groupes G et H.*

En particulier, l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{C}^n$ est isomorphe à $\mathbf{C}^n$, les algèbres de Lie des groupes $\mathbf{R}^n$ et T^n sont isomorphes à $\mathbf{R}^n$ (voir les exemples 1) et 2) dans 3.2).

3.3. Sous-groupes, homomorphismes et groupes quotients de groupes de Lie. Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe du groupe G (non nécessairement fermé en général) ; H s'appelle *sous-groupe de Lie* du groupe de Lie G si: 1) H est un groupe de Lie, 2) H est une sous-variété de la variété analytique G. Un sous-groupe de Lie connexe du groupe G s'appelle *sous-groupe analytique* dans G.

I. *Soient G un groupe de Lie, L l'algèbre de Lie du groupe G, H un sous-groupe de Lie de G, et M l'ensemble de tous les éléments $X \in L$ tels que $X(e) \in \widetilde{T_e(H)}$ (l'espace $\widetilde{T_e(H)}$ a été défini dans 1.7). Alors M est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L, et M est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe H.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $h \in H$. La translation à gauche φ_h est un isomorphisme de H sur H, donc $(d\varphi_h)(\widetilde{T_e(H)}) = \widetilde{T_h(H)}$, $(d\varphi_h)(T_e(H)) = T_h(H)$. Si $X \in M$, alors $X(h) \in \widetilde{T_h(H)}$ pour tous les $h \in H$; par conséquent, le champ X détermine un certain champ vectoriel analytique sur la sous-variété H ; ce champ vectoriel sur H est invariant à gauche. Si $X, Y \in M$, alors les champs X et Y déterminent des champs vectoriels analytiques sur H, donc le commutateur $[X, Y]$ détermine également un champ vectoriel analytique sur H. En particulier, $[X, Y] \in M$; il s'ensuit que M est une sous-algèbre de Lie de L. En faisant correspondre à chaque élément $X \in M$ le champ vectoriel qu'il définit sur H, nous obtenons un isomorphisme de l'algèbre de Lie M sur l'algèbre de Lie du groupe H.

II. *Soient G un groupe de Lie, L son algèbre de Lie, M une sous-algèbre de Lie du groupe G. Il existe un sous-groupe analytique unique H de G, qui vérifie la condition suivante: la sous-algèbre de Lie M est l'ensemble de tous les éléments $X \in L$ tels que $X(e) \in \widetilde{T_e(H)}$.*

On trouvera la d é m o n s t r a t i o n de ce théorème dans les livres de L. P o n t r i a g u i n e [1], J.-P. S e r r e [1], S. H e l g a s o n [1], C. C h e v a l l e y [1] par exemple.

Ainsi, la correspondance entre les sous-groupes analytiques de G et les sous-algèbres de Lie de L, établie dans la proposition I, est bijective. Par la suite nous dirons que le sous-groupe analytique H et la sous-algèbre de Lie M déterminée par le sous-groupe H dans la proposition I, se correspondent.

Par la suite (voir § 2, chapitre XI) nous montrerons que chaque sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie. En particulier, *les groupes classiques*

$$SL(n, \mathbf{C}),\ SL(n, \mathbf{R}),\ U(n),\ SU(n),\ Sp(2n),$$

$$O(n, \mathbf{C}),\ O(n, \mathbf{R}),\ SO(n, \mathbf{C}),\ SO(n, \mathbf{R}),\ Sp(2n, \mathbf{R}),$$

étant des sous-groupes fermés du groupe de Lie $GL(n, \mathbf{C})$, *sont des groupes de Lie.*

L'homomorphisme φ du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H s'appelle *homomorphisme analytique* si φ est une application analytique de la variété G dans la variété H.

Soient φ un homomorphisme analytique de G dans H, et X un champ vectoriel invariant à gauche sur G. Alors $d\varphi_{e_G} X(e_G)$ est le vecteur tangent à H au point e_H, où e_G, e_H sont les éléments neutres des groupes G et H respectivement. Soit Y un champ vectoriel invariant à gauche sur H pour lequel $Y_{e_H} = d\varphi_{e_H} X(e_G)$. Montrons que

$$Y(\varphi(g)) = d\varphi_g X(g) \tag{3.3.1}$$

pour tous les $g \in G$. Soient ψ_g la translation à gauche de l'élément g dans G, et $\chi_{\varphi(g)}$ la translation à gauche de l'élément $\varphi(g)$ dans H. Puisque φ est un homomorphisme, on a $\varphi \circ \psi_g = \chi_{\varphi(g)} \circ \varphi$, donc

$$d\varphi_g X(g) = d(\varphi \circ \psi_g) X(e_G) = d(\chi_{\varphi(g)} \circ \varphi) X(e_G) =$$
$$= d\chi_{\varphi(g)}(d\varphi_{e_G} X(e_G)) = d\chi_{\varphi(g)} Y(e_H) = Y(\varphi(g)),$$

ce qui démontre la formule (3.3.1). La formule (3.3.1) signifie à son tour que le champ vectoriel Y est l'image du champ vectoriel X. Désignons Y par $d\varphi(X)$. La linéarité de l'application $d\varphi$ est évidente. On tire de la proposition II de 1.6 que pour tous les X_1, X_2 de l'algèbre de Lie du groupe G on a

$$d\varphi([X_1, X_2]) = [d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)].$$

Par conséquent, la proposition suivante est valable.

III. *Soient G, H des groupes de Lie, L, M leurs algèbres de Lie, et φ un homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H. Soit $d\varphi$ une application de L dans M telle que pour chaque élément $X \in L$ l'élément $d\varphi(X) \in M$ est déterminé par l'égalité $d\varphi(X)(e_H) = d\varphi_{e_G} X(e_G)$. Alors $d\varphi$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie M.*

IV. *Dans les hypothèses de la proposition* III, *soient $N_1 \subset L$ le noyau de l'homomorphisme $d\varphi$, $N_2 = d\varphi(L)$, et K_1, K_2 les sous-groupes analytiques des groupes de Lie G, H correspondant aux sous-algèbres de Lie N_1, N_2 des algèbres de Lie L. Alors:*

1) *$\varphi(G)$ est un sous-groupe de Lie de H; φ est l'application analytique de G sur $\varphi(G)$.*

2) *le sous-groupe K_2 est l'image de la composante de l'élément neutre du groupe G; en outre, K_2 coïncide avec la composante de l'élément neutre du groupe $\varphi(G)$;*

3) *K_1 est un sous-groupe analytique fermé de G qui coïncide avec la composante de l'élément neutre du noyau de l'application φ.*

24—0883

La démonstration de cette assertion est exposée, par exemple, dans les livres de V. Varadarajan [1], L. Pontriaguine [1] et J.-P. Serre [1].

V. *Dans les hypothèses de la proposition* III, *l'application* $d\varphi$ *est une surjection de* L *sur* M *si et seulement si la composante de l'élément neutre du groupe* G *est appliquée par* φ *sur la composante de l'élément neutre du groupe* H. *L'application* $d\varphi$ *est un plongement (i.e. possède un noyau trivial) si et seulement si le noyau de l'homomorphisme* φ *est discret.*

La proposition s'obtient immédiatement de IV.

VI. *Soient* G, H *des groupes topologiques connexes et simplement localement connexes,* $\varphi: G \to H$ *un homomorphisme continu de* G *sur* H *à noyau discret. Si* G *(respectivement* H*) est un groupe de Lie, alors le groupe* H *(respectivement* G*) peut être transformé, et ceci de façon unique, en une variété analytique, de manière à ce que le groupe* H *(respectivement* G*) devienne un groupe de Lie, tandis que l'homomorphisme* φ *soit un homomorphisme analytique du groupe de Lie* G *dans le groupe de Lie* H.

La démonstration de ce théorème est exposée, par exemple, dans les livres de V. Varadarajan [1] et de L. Pontriaguine [1].

VII. *Si* G *est un groupe de Lie connexe, alors* G *possède un groupe de recouvrement simplement connexe* $\widetilde{G}$; $\widetilde{G}$ *est un groupe de Lie, et les algèbres de Lie des groupes de Lie* G *et* $\widetilde{G}$ *sont isomorphes.*

Démonstration. L'existence d'un groupe de recouvrement simplement connexe découle de IV de 3.1 et de I de 3.2, chapitre VIII, car chaque groupe de Lie est évidemment localement connexe et localement simplement connexe. Le noyau de l'homomorphisme π du groupe $\widetilde{G}$ dans G est discret puisque $\widetilde{G}$ et G sont localement isomorphes. En vertu de VI, le groupe $\widetilde{G}$ peut être envisagé comme un groupe de Lie. D'après *V*, $d\pi$ est une application de l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\widetilde{G}$ sur l'algèbre de Lie du groupe G à noyau nul, i.e. $d\pi$ est un isomorphisme des algèbres de Lie des groupes de Lie $\widetilde{G}$ et G.

VIII. *Soient* G *un groupe de Lie,* H *son sous-groupe de Lie fermé. Alors l'espace des classes d'équivalence* G/H *peut être transformé de façon unique en une variété analytique de manière à ce que l'application canonique* $\pi: G \to G/H$ *soit une application analytique de variétés. Si* H *est un sous-groupe distingué fermé de* G, *alors le groupe topologique* G/H, *muni d'une structure de variété analytique telle que l'application* $\pi: G \to G/H$ *est une application analytique de variétés, est*

un groupe de Lie. L'application π est un homomorphisme analytique du groupe de Lie G sur le groupe de Lie G/H.

La démonstration de cette assertion est exposée, par exemple, dans les livres de V. Varadarajan [1], de L. Pontriaguine [1] et de J.-P. Serre [1]. Le groupe de Lie G/H, défini dans VII, s'appelle *groupe de Lie quotient* du groupe de Lie G par le sous-groupe distingué fermé H.

Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), et V un espace linéaire complexe de dimension finie. Si $\dim V=n$, le groupe G_V (voir l'exemple 4 de 1.1, chapitre I) est isomorphe à $GL(n, C)$ et peut être envisagé aussi bien comme un groupe de Lie réel qu'un groupe de Lie complexe. Conformément à VI de 3.2, l'algèbre de Lie du groupe de Lie G_V s'identifie à l'algèbre de Lie $gl(V)$ (voir l'exemple 3 de 3.2). Appelons *représentation analytique réelle* (respectivement *complexe*) du groupe de Lie G dans l'espace V *tout homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie G_V*, envisagé comme un groupe de Lie réel (respectivement complexe). On tire immédiatement de III

IX. *Si π est une représentation analytique réelle (respectivement complexe) du groupe de Lie G dans l'espace V, alors $d\pi$ est la représentation de l'algèbre de Lie L réelle (respectivement complexe) du groupe G dans l'espace V.*

Par la suite (voir § 2, chapitre XI) nous montrerons que toute représentation continue de dimension finie d'un groupe de Lie est analytique; en outre, nous obtiendrons un résultat qui est, dans un certain sens, la réciproque de la proposition III et qui permet de construire la représentation d'un groupe de Lie d'après la représentation de son algèbre de Lie (voir 1.4, chapitre XI).

3.4. Sous-groupes à un paramètre. Soient G un groupe de Lie, U une carte au point e, et $x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées analytiques dans U. En remplaçant les fonctions $x_1, \ldots, x_m$ par les fonctions $x_1 - x_1(e), \ldots, x_m - x_m(e)$ et en choisissant éventuellement un voisinage U plus petit, nous pouvons considérer $\xi(U)$ comme l'ensemble de tous les $(y_1, \ldots, y_m)$ tels que $|y_i| < a$ quel que soit $i = 1, \ldots, m$ et un certain a, et l'on a $(x_1(e), \ldots, x_m(e)) = (0, \ldots, 0)$. Puisque l'application de $G \times G$ dans G, définie par la formule $(g, h) \to g(h^{-1})^{-1} = gh$ est analytique; on a dans un voisinage V du point e (on peut supposer que $\xi(V)$ est l'ensemble de tous les $(y_1, \ldots, y_m)$ tels que $|y_i| < b$ pour un certain $b < a$)

$$x_k(gh) = F_k(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)), \qquad (3.4.1)$$

$$k = 1, \ldots, m,$$

où $F_k(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ est une fonction analytique dans $\xi(V) \times \xi(V)$. Posons

$$u_{ij}(y_1, \ldots, y_m) = \frac{\partial}{\partial z_j} F_i(y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots, 0) \qquad (3.4.2)$$

pour tous les $i, j = 1, \ldots, m$.

I. *Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe) et* $a \in T_e(G)$. *Il existe un homomorphisme analytique unique* $\tilde{a}: t \to \tilde{a}(t)$ *du groupe additif* **R** *(respectivement* **C***) dans le groupe G pour lequel, dans un certain voisinage du point* $t = 0$, *on a*

$$(d/dt)\, x_i(\tilde{a}(t)) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(x_1(a(t)), \ldots, x_m(\tilde{a}(t)))\, a_j, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (3.4.3)$$

où $a_j = a(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, *et* $x_1, \ldots, x_m$ *est le système de coordonnées analytiques (dans un certain voisinage V du point e) tel que* $(x_1(e), \ldots, x_m(e)) = (0, \ldots, 0)$ *et* $\xi(V) = \{(y_1, \ldots, y_m): |y_i| < b\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$(dy_i(t)/dt) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j \qquad (3.4.4)$$

à condition initiale

$$y_i(0) = 0 \qquad (3.4.5)$$

dans le domaine $\xi(V) = \{(y_1, \ldots, y_m): |y_i| < b\}$. D'après le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires, il existe, pour un certain $\delta > 0$, dans le domaine $|t| < \delta$, une solution unique du problème (3.4.4)-(3.4.5), i.e. une famille de fonctions $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, qui vérifient les deux relations indiquées et $(y_1(t), \ldots, y_m(t)) \in \xi(V)$ pour $|t| < \delta$. Puisque les fonctions u_{ij} sont analytiques sur $\xi(V)$, les $y_i(t)$ le sont dans le domaine $|t| < \delta$.

Posons $\tilde{a}(t) = \xi^{-1}(y_1(t), \ldots, y_m(t))$, $|t| < \delta$. Il est évident que $\tilde{a}(0) = e$ et $\tilde{a}(t)$ vérifie la relation (3.4.4). Montrons que pour $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t + s| < \delta$ on a $\tilde{a}(t)\,\tilde{a}(s) = \tilde{a}(t + s)$. Posons $b(t, s) = \tilde{a}(t)\,\tilde{a}(s)$ et $\xi(b(t, s)) = (z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))$. Alors $z_i(t, s) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), y_1(s), \ldots, y_m(s))$. Avec la relation (3.4.2), nous obtenons de la formule de Taylor pour la variable s que

$$z_i(t, s) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j s + o(s). \qquad (3.4.6)$$

D'autre part, l'égalité (3.4.3) implique que

$$y_i(t+s) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j s + o(s). \quad (3.4.7)$$

De (3.4.6) et (3.4.7) on obtient

$$z_i(t, s) - y_i(t+s) = o(s) \quad (3.4.8)$$

pour $s \to 0$. Montrons maintenant que les fonctions $z_i(t, s)$ vérifient le système d'équations différentielles

$$\frac{\partial z_i(t, s)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))\, a_j \quad (3.4.9)$$

à condition initiale

$$z_i(t, 0) = y_i(t). \quad (3.4.10)$$

Les relations (3.4.10) découlent immédiatement de la définition des fonctions $z_i(t, s)$. Trouvons $\frac{\partial z_i(t, s)}{\partial s}$. Puisque $z_i(t, s+u) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), y_1(s+u), \ldots, y_m(s+u))$, on déduit de la relation (3.4.8) pour $u \to 0$ l'égalité

$$z_i(t, s+u) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), z_1(s, u), \ldots \\ \ldots, z_m(s, u)) + o(u). \quad (3.4.11)$$

Mais l'associativité de la multiplication dans le groupe G permet d'écrire

$$F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), z_1(s, u), \ldots, z_m(s, u)) = \\ = x_i(\tilde{a}(t)(\tilde{a}(s)\tilde{a}(u))) = x_i((\tilde{a}(t)\tilde{a}(s))\tilde{a}(u)) = \\ = F_i(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s), y_1(u), \ldots, y_m(u)) + o(u). \quad (3.4.12)$$

En substituant la relation (3.4.12) dans le deuxième membre de (3.4.11) et en appliquant l'égalité (3.4.2), on obtient

$$z_i(t, s+u) = \\ = z_i(t, s) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))\, a_j u + o(u). \quad (3.4.13)$$

L'égalité (3.4.13) s'obtient immédiatement de la relation (3.4.9).

Ainsi les fonctions $z_i(t, s)$ vérifient le système d'équations différentielles (3.4.9) à conditions initiales (3.4.10). D'autre part, les fonctions $\tilde{z}_i(t, s) = y_i(s+t)$ vérifient également le système d'équations $\frac{\partial \tilde{z}_i(t, s)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\tilde{z}_1(t, s), \ldots, \tilde{z}_m(t, s))\, a_j$, qui se déduit

du système (3.4.4), avec les conditions initiales évidentes $\tilde{z}_i\ (t, 0) = y_i\ (t + 0) = y_i\ (t)$. Les fonctions $z_i\ (t + s)$ et $y_i\ (t + s)$ de la variable t (pour un s donné) satisfont donc au même système d'équations (3.4.9) avec les mêmes conditions initiales (3.4.10). D'après le théorème d'unicité des solutions de tels systèmes, on a $z_i\ (t, s) = y_i\ (t + s)$; par conséquent

$$\tilde{a}(t)\,\tilde{a}(s) = \tilde{a}(t+s) \tag{3.4.14}$$

pour $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t + s| < \delta$. En particulier,

$$\tilde{a}(t)\,\tilde{a}(s) = \tilde{a}(s)\,\tilde{a}(t) \tag{3.4.15}$$

pour $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t + s| < \delta$.

Supposons maintenant que t est arbitraire. Il existe un nombre naturel n tel que $|t/n| < \delta$. Posons

$$\tilde{a}(t) = (\tilde{a}(t/n))^n. \tag{3.4.16}$$

Montrons que la formule (3.4.16) définit l'application analytique cherchée du groupe **R** (respectivement **C**) dans le groupe G. Assurons-nous d'abord que la formule (3.4.16) est correcte. Si l'on a également $|t/m| < \delta$ pour un certain m naturel, alors $|t/(mn)| < \delta$. D'autre part, on déduit de la relation (3.4.14) que

$$(\tilde{a}(t/(mn)))^m = \tilde{a}(t/n), \quad (\tilde{a}(t/(mn)))^n = \tilde{a}(t/m);$$

par conséquent

$$(\tilde{a}(t/m))^m = (\tilde{a}(t/(mn)))^{mn} = (\tilde{a}(t/n))^n,$$

de sorte que l'application $t \to \tilde{a}(t)$ est correctement définie par la formule (3.4.16). En particulier, pour $|t| < \delta$ la fonction $\tilde{a}(t)$ donnée par (3.4.16) coïncide avec la fonction $\tilde{a}$ définie précédemment. Montrons que

$$\tilde{a}(t+s) = \tilde{a}(t)\,\tilde{a}(s) \tag{3.4.17}$$

pour tous les t, s. Il existe un entier naturel n tel que $|t/n| < \delta$, $|s/n| < \delta$, $|(t + s)/n| < \delta$. Alors $\tilde{a}((t + s)/n) = \tilde{a}(t/n)\,\tilde{a}(s/n)$; en élevant cette égalité à la puissance n et en se servant des relations (3.4.15) et (3.4.16), on obtient l'égalité (3.4.17). Enfin, de la formule (3.4.16) et de l'analyticité de $\tilde{a}(t)$ pour $|t| < \delta$ on déduit que $\tilde{a}(t)$ est analytique pour tous les t.

II. *Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), et Y l'élément de l'algèbre de Lie du groupe* **R** *(respectivement* **C***) qui fait correspondre à la fonction $f(z) = z$ sur* **R** *(respectivement* **C***) la fonction identiquement égale à 1. Pour tout élément X de l'algèbre de Lie L du groupe de Lie G, il existe un homomorphisme analytique unique*

$\theta_X: t \to \theta_X(t)$ *du groupe de Lie* **R** (*respectivement* **C**) *dans le groupe de Lie* G *dont la différentielle* $d\theta_X$ *applique* Y *dans* X.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $a = X(e)$ un vecteur tangent à la variété G au point e, $t \to \tilde{a}(t)$ un homomorphisme analytique du groupe **R** (respectivement **C**) dans le groupe de Lie G qui vérifie les hypothèses de la proposition I. De la relation (3.4.3) et de la définition de l'élément Y on tire

$$X(e)\,x_i = ax_i = a_i = (d/dt)\,x_i(\tilde{a}(t))\,|_{t=0} =$$
$$= Y(0)\,(x_i \circ \tilde{a}) = (d\tilde{a}_0)\,Y(0)\,x_i \qquad (3.4.18)$$

pour tous les $i = 1, \ldots, m$. Par conséquent, $d\tilde{a}(X) = Y$. En posant $\tilde{a} = \theta_X$, on prouve que l'homomorphisme θ_X existe. D'autre part, si $\tilde{\theta}_X$ est un autre homomorphisme analytique du groupe **R** (respectivement **C**) dans le groupe G tel que $(d\tilde{\theta}_X).Y = X$, alors $\tilde{\theta}_X(t + s) = \tilde{\theta}_X(t)\,\tilde{\theta}_X(s)$ pour tous les t, s, et les deux membres de cette égalité sont des fonctions analytiques de s pour un t donné. En posant $x_i(\tilde{\theta}_X(t)) = y_i(t)$, on a pour des t, s suffisamment petits

$$y_i(t + s) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), y_1(s), \ldots, y_m(s)); \qquad (3.4.19)$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

En calculant les dérivées de (3.4.19) relativement à s et en substituant ensuite $s = 0$, on prouve à l'aide des formules (3.4.2) que les fonctions $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ vérifient le système (3.4.4), où $a_j = (dy_j(s)/ds)|_{s=0} = X(e)x_j$. Par conséquent, en appliquant I, on obtient $\tilde{\theta}_X = \tilde{a}$, où $a = X(e)$, i.e. le vecteur tangent $X(e)$ détermine de façon unique l'homomorphisme analytique correspondant θ_X.

L'élément $\theta_X(1) \in G$ est désigné par $\exp(X)$. L'application $\exp: L \to G$ définie par la formule $X \to \exp(X)$ s'appelle *application exponentielle* de l'algèbre de Lie L dans le groupe de Lie G.

III. *On a* $\exp(\lambda x) = \theta_X(\lambda)$ *pour tous les* $X \in L$ *et tous les* $\lambda \in$ **R** (*respectivement* $\lambda \in$ **C**).

D é m o n s t r a t i o n. Considérons l'application $\pi: t \to \theta_X(\lambda t)$ du groupe **R** (respectivement **C**) dans G. L'analyticité de l'application θ_X entraîne celle de π. En outre, $\pi(t)\,\pi(s) = \theta_X(\lambda t)\,\theta_X(\lambda s) = \theta_X(\lambda t + \lambda s) = \pi(t + s)$ pour tous les t, s, donc π est un homomorphisme analytique du groupe **R** (respectivement **C**) dans le groupe G. On a évidemment $(d\pi_0)\,Y(0)\,x_i = (d/dt)\,x_i(\theta_X(\lambda t))\,|_{t=0} = \lambda X(e)\,x_i$. En vertu de la proposition II, nous avons $\pi = \theta_{\lambda X}$. Par conséquent $\theta_{\lambda X}(1) = \theta_X(\lambda)$.

Il découle immédiatement de la proposition III que

$$\exp((t_1 + t_2)\,X) = \exp(t_1 X)\exp(t_2 X), \qquad (3.4.20a)$$
$$\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1} \qquad (3.4.20b)$$

pour tous les t_1, t_2 et chaque $X \in L$.

L'espace L est isomorphe à l'espace $\mathbf{R}^m$ (respectivement $\mathbf{C}^m$) et peut donc être envisagé comme une variété analytique. Soit $X_1, \ldots, X_m$ une base de l'algèbre de Lie L telle que $X_i(e)\, x_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Si $X \in L$ et $X(e)\, x_j = a_j$, alors $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. Les fonctions $a_j(X) = a_j$ pour $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$ forment un système de coordonnées analytiques sur L.

IV. *L'application* $\exp: L \to G$ *est une application analytique de variétés, régulière au point* $0 \in L$.

Démonstration. Désignons la solution (y_i) du système (3.4.4) à conditions initiales (3.4.5) par $(\Phi_i(t, a_1, \ldots, a_m))$. Les deuxièmes membres des équations (3.4.4) étant analytiques relativement à toutes les variables $y_1, \ldots, y_m, a_1, \ldots, a_m$, les fonctions $\Phi_i(t, a_1, \ldots, a_m)$ sont analytiques dans un certain domaine de la forme $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$. On peut supposer que $|\Phi_i| \leqslant c$ pour $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, où c est un nombre.

En vertu de la définition de l'application θ_X, on a

$$\theta_X(t) = \xi^{-1}(\Phi_1(t, a_1, \ldots, a_m), \ldots, \Phi_m(t, a_1, \ldots, a_m))$$

pour $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$, où $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. En utilisant III, on a pour $|t| < 2$, $|a_j| < (\varepsilon\delta)/2$ l'égalité

$$\theta_X(t) = \xi^{-1}(\Phi_1((\delta t)/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta), \ldots \\ \ldots, \Phi_m((\delta t)/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta)),$$

d'où

$$\exp(X) = \xi^{-1}(\Phi_1(\delta/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta), \ldots \\ \ldots, \Phi_m(\delta/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta)). \quad (3.4.21)$$

Les fonctions Φ_i étant analytiques, la formule (3.4.21) permet d'établir l'analyticité de l'application exp dans un certain voisinage V de l'élément 0 de la variété L. En outre, pour chaque élément $X \in L$ il existe un nombre naturel n tel que $X/n \in V$. On tire de (3.4.20) que $(\exp(X)) = (\exp(X/n))^n$; par conséquent, l'application exponentielle est partout analytique.

Montrons maintenant que l'application exponentielle est régulière au point $0 \in L$. Vérifions pour cela que la différentielle de l'application exponentielle applique la base de l'espace tangent $T_0(L)$ dans la base de l'espace tangent $T_e(G)$. Soit $\widetilde{X}_i$ le vecteur tangent à L en le point 0, défini par l'égalité

$$\widetilde{X}_i a_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Soit $\eta(X) = (a_1, \ldots, a_m)$ pour $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. Montrons que $d(\exp)_0\, \widetilde{X}_i = X_i(e)$. Le vecteur $\widetilde{X}_i$ applique la fonction

f (définie et analytique dans un certain voisinage W de l'élément nul de la variété L) dans un nombre $\widetilde{X}_i f$, tel que

$$\widetilde{X}_i(f) = \sum_{j=1}^{m} (\partial F/\partial a_j)_{0,\ldots,0}\, \widetilde{X}_i a_j = (\partial F/\partial a_i)_{0,\ldots,0}, \qquad (3.4.22)$$

où F est une fonction analytique de $(a_1, \ldots, a_m)$ telle que $f = F \circ \eta$. Soit $v_i = d\,(\exp)_0\, \widetilde{X}_i$ un vecteur tangent à la variété G en le point e. Alors pour chaque fonction $\varphi \in D(V)$, où V est un voisinage de l'élément neutre e de G, on a

$$v_i(\varphi) = \widetilde{X}_i(\varphi \circ \exp);$$

si $\varphi = \Phi \circ \xi$, alors (3.4.21), (3.4.22) et (3.4.18) impliquent que

$$\begin{aligned} v_i(\varphi) = (\partial/\partial a_i)\, \Phi\,(\Phi_1(\delta/2,\ (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta), \ldots \\ \ldots, \Phi_m(\delta/2,\ (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m/\delta)))\,|_{0,\ldots,0} = \\ = (\partial/\partial a_i)\, \Phi\,(\Phi_1(\delta/2,\ 0, \ldots, (2a_i)/\delta, \ldots, 0), \ldots \\ \ldots, \Phi_m(\delta/2,\ 0, \ldots, (2a_i)/\delta, \ldots, 0))\,|_{a_i=0} = \\ = (d/da_i)\,(\varphi \circ \exp(a_i X_i))\,|_{a_i=0} = (d\theta_{X_i})_0\, Y(0)\, \varphi = X_i(e)\, \varphi. \qquad (3.4.23) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $v_i = X_i(e)$, i.e. $d\,(\exp)_0$ applique la base Y_i de l'espace $T_0(L)$ dans la base $X_i(e)$ de $T_e(G)$, ce qui démontre la régularité de l'application exp au point $0 \in L$.

V. *Soit $X_1, \ldots, X_m$ une base de l'algèbre de Lie L du groupe de Lie G. Il existe un voisinage U de l'élément neutre e de G, un système de coordonnées analytiques $x_1, \ldots, x_m$ dans le voisinage U et un nombre $\delta > 0$ qui vérifient les conditions suivantes:*

$$x_i\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{m} u_k X_k\right)\right) = u_i \text{ quel que soit } i = 1, \ldots, m \qquad (3.4.24)$$

pour tous les $(u_1, \ldots, u_m) \in V$, où V est l'ensemble de tous les $(u_1, \ldots, u_m)$ tels que $|u_k| < \delta$, $k = 1, \ldots, m$.

La proposition découle immédiatement de la proposition IV et des propositions I de 1.1 et V de 1.5.

Un système de coordonnées analytiques qui vérifie la condition (3.4.24) s'appelle *système de coordonnées canoniques* sur le groupe (ou *système de coordonnées canoniques de première espèce*), tandis que l'ensemble $W = \xi^{-1}(V)$ s'appelle *voisinage canonique de l'élément $e \in G$.*

VI. *Soit π un homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H. Alors pour chaque élément X de l'algèbre de Lie L du groupe G on a*

$$\pi(\exp(X)) = \exp(d\pi(X)). \qquad (3.4.25)$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit Y un champ de vecteurs sur le groupe **R** (ou **C**, si G et H sont des groupes de Lie complexes) défini par la formule $Y\psi = 1$, où ψ est l'application identique de **R** dans **R** (respectivement de **C** dans **C**). Soit X un élément de l'algèbre de Lie L du groupe G, et soit θ_X l'homomorphisme analytique de **R** (respectivement **C**) dans G défini dans la proposition II. Alors $d\theta_X(Y) = X$, donc $d(\pi \circ \theta_X)(Y) = d\pi(X)$. Mais $d(\theta_{d\pi(X)})(Y)$ est aussi égal à $d\pi(X)$; ainsi, d'après II, les homomorphismes $\pi \circ \theta_X$ et $\theta_{d\pi(X)}$ doivent coïncider. En particulier, $(\pi \circ \theta_X)(1) = \theta_{d\pi(X)}(1)$, ce qui démontre la formule (3.4.25).

VII. *Soit π un homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H. Si l'application π est injective, alors elle est aussi partout régulière.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit L l'algèbre de Lie du groupe G. Si $d\pi(X)=0$ pour un certain $X \in L$, alors $\pi(\theta_X(t)) = \pi(\exp(tX)) = \exp(d\pi(tX)) = \exp(td\pi(X)) = e$ pour tous les t. Puisque π est injective, on a $\exp(tX) = e$, donc $X = 0$. Par conséquent, $d\pi$ est injective.

VIII. *Soient H un sous-groupe de Lie du groupe de Lie G, et M l'algèbre de Lie du groupe H. Si U est un voisinage de l'élément nul de M, alors l'ensemble des éléments* $\exp(X)$, $X \in U$, *contient un voisinage de l'élément e de H.*

La proposition s'obtient immédiatement de la proposition VI lorsqu'on l'applique au monomorphisme identique de H dans G.

Exemple. Soit G le groupe de Lie $GL(n, \mathbf{R})$. Comme nous le savons d'après l'exemple 3 de 3.2, l'algèbre de Lie L du groupe de Lie G peut être identifiée à l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{R})$, l'isomorphisme étant donné par la formule

$$X \to (X(e)\, x_{ij}). \tag{3.4.26}$$

Cet isomorphisme sera appelé par la suite *isomorphisme canonique*. Désignons la matrice $(X(e)\, x_{ij})$ par $a(X)$. D'après I de 3.2 et la règle de multiplication des matrices on a

$$X(g_0)(x_{ij})(g) = (d\varphi_{g_0})_e X(e)(x_{ij})(g) = X(e)(x_{ij})(g_0 g) = \\ = g_0 X(e)(x_{ij})(g) = (g_0 a(X))_{ij} \tag{3.4.27}$$

pour tous les $i, j = 1, \ldots, n$ et tous les $g_0 \in G$, $X \in L$. Dans les hypothèses de la proposition II, soit θ_X un homomorphisme analytique du groupe de Lie **R** dans le groupe de Lie G. On doit alors avoir la relation $d\theta_X(Y) = X$. Mais la relation $d\theta_X(Y) = X$ est équivalente à

$$Y(t)(x_{ij} \circ \theta_X) = X(\theta_X(t))\, x_{ij} \tag{3.4.28}$$

pour tous les $i, j = 1, \ldots, n$. Réunissons (3.4.27) et (3.4.28), il vient

$$(d/dt)\, x_{ij}\, (\theta_X\, (t)) = (\theta_X\, (t)\, a\, (X))_{ij}. \tag{3.4.29}$$

On tire de (3.4.29) que la matrice $\theta_X\,(t)$ vérifie la relation

$$(d/dt)\, \theta_X\, (t) = \theta_X\, (t)\, a\, (X), \tag{3.4.30}$$

où la dérivée de la matrice est une matrice constituée par les dérivées des éléments matriciaux. La fonction matricielle $\theta_X\,(t)$ vérifie non seulement l'équation (3.4.30) mais aussi la condition initiale

$$\theta_X\, (0) = 1_n, \tag{3.4.31}$$

où 1_n est la matrice unité d'ordre n. Or, la solution de l'équation différentielle (3.4.30) avec la condition initiale (3.4.31) est l'exponentielle matricielle usuelle:

$$\theta_X\, (t) = e^{ta(X)} = \\ = 1_n + ta\,(X) + \frac{t^2}{2!}\, a\,(X)^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}\, a\,(X)^n + \ldots,\; t \in \mathbf{R}; \tag{3.4.32}$$

notons que la série dans le deuxième membre de l'égalité (3.4.32) converge absolument pour chaque $t \in \mathbf{R}$ relativement à chaque coordonnée. Ainsi, *dans le groupe GL* (n, **R**) *l'application exponentielle coïncide avec l'exponentielle matricielle*

$$\exp\, (X) = e^{a(X)} \textit{ pour tous les } X \in L. \tag{3.4.33}$$

Un raisonnement analogue montre que l'application exponentielle dans le groupe GL (n, **C**) coïncide également avec l'exponentielle matricielle usuelle.

Soient G un sous-groupe analytique du groupe de Lie GL (n, **R**), et π l'application identique du groupe G dans le groupe GL (n, **R**). Il découle de la proposition VI que si l'on identifie l'algèbre de Lie du groupe de Lie G à la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie gl (n, **R**) conformément à I de 3.3, alors l'application exponentielle pour le groupe G coïncide avec la fonction exponentielle matricielle usuelle (voir (3.4.25)).

L'exemple d'application exponentielle dans les groupes GL (n, **C**) et GL (n, **R**) que nous venons d'examiner permet de démontrer un théorème important sur la correspondance entre la représentation d'un groupe de Lie et la représentation associée (voir IX, 3.3) de son algèbre de Lie.

THÉORÈME. *Soient G un groupe de Lie connexe, L son algèbre de Lie, T une représentation analytique de dimension finie du groupe de Lie G dans l'espace vectoriel E, et dT la représentation correspondante de l'algèbre de Lie L dans l'espace. E. Alors*

a) *le sous-espace vectoriel* $V \in E$ *est invariant relativement à la représentation* T *si et seulement s'il est invariant relativement à la représentation* dT ;

b) *la représentation* T *est irréductible (respectivement réductible, complètement réductible) si et seulement si la représentation* dT *est irréductible (respectivement réductible, complètement réductible).*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que b) découle de a). Démontrons a). Considérons la représentation T comme un homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie G_E (ce dernier étant envisagé comme un groupe de Lie réel). En vertu de (3.4.25), nous avons

$$T(\exp(X)) = \exp(dT(X)) \tag{3.4.34}$$

pour tous les $X \in L$. Mais

$$\exp(a) = e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \ldots + \frac{1}{n!}a^n + \ldots \tag{3.4.35}$$

pour tous les $a \in gl(E)$. On tire de (3.4.34) et (3.4.35) que

$$T(\exp(X)) = \\ = 1 + dT(X) + \frac{1}{2!}(dT(X))^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(dT(X))^n + \ldots \tag{3.4.36}$$

pour tous les $X \in L$. On obtient de la relation (3.4.36) que tout sous-espace vectoriel $V \subset E$ invariant relativement à l'opérateur $dT(X)$, $X \in L$, est invariant également relativement à l'opérateur $T(\exp(X))$, i.e. en vertu de VIII et de la connexité du groupe G, chaque sous-espace $V \subset E$ invariant relativement à la représentation dT de l'algèbre de Lie L est aussi invariant relativement à la représentation T du groupe de Lie G. D'autre part, il découle de (3.4.34) et (3.4.35) que

$$T(\exp(tX)) = e^{t\,dT(X)} \tag{3.4.37}$$

pour tous les t; en prenant les dérivées des deux membres de l'égalité (3.4.37) pour $t = 0$, nous voyons que

$$dT(X) = (d/dt)(T(\exp(tX)))\,|_{t=0}. \tag{3.4.38}$$

La relation (3.4.38) nous montre que chaque sous-espace vectoriel $V \subset E$, invariant relativement aux opérateurs $T(\exp(tX))$ pour tous les t, est invariant également relativement à l'opérateur $dT(X)$. Ainsi tout sous-espace invariant relativement à la représentation T est invariant aussi relativement à la représentation dT, ce qui termine la démonstration du théorème.

3.5. Représentation adjointe. Soient G un groupe de Lie, et L son algèbre de Lie. Si α est un isomorphisme analytique du groupe de Lie G sur lui-même, alors $d\alpha$ est un homomorphisme de Lie de l'algèbre de Lie L du groupe G dans lui-même. On tire de la relation

$\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_G$ (1_G étant l'application identique de G sur G) que l'application $d(\alpha^{-1})$ est inverse de $d\alpha$. Par conséquent, $d\alpha$ est un *automorphisme* de l'algèbre de Lie L, i.e. $d\alpha$ est une application linéaire de L sur L telle que $d\alpha([X, Y]) = [d\alpha(X), d\alpha(Y)]$ pour tous les $X, Y \in L$. L'application $\alpha \to d\alpha$ est une représentation linéaire du groupe A de tous les isomorphismes analytiques du groupe G sur lui-même. Montrons que si le groupe G est connexe, alors cette représentation est exacte. En effet, si $d\alpha$ est l'automorphisme unité de L, i.e. $d\alpha(X) = X$ pour tous les $X \in L$, alors en vertu de (3.4.25) on a

$$\alpha(\exp(X)) = \exp(X)$$

pour tous les $X \in L$. Par conséquent, en vertu de VIII de 3.4, l'application α laisse invariants tous les éléments d'un certain voisinage de l'élément neutre de G. Puisque G est connexe, on a $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$, donc $\alpha(x) = x$ pour tous les $x \in G$. Soient $g \in G$, et α_g un isomorphisme analytique du groupe G sur lui-même défini par la formule $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$ pour tous les $h \in G$; alors l'application Ad: $g \to \to d\alpha_g$ s'appelle *représentation adjointe* du groupe de Lie G. La représentation adjointe est un homomorphisme du groupe G dans G_L. Puisque L est isomorphe à $\mathbf{R}^m$ ou à $\mathbf{C}^m$, G_L est isomorphe à $GL(m, \mathbf{R})$ ou à $GL(m, \mathbf{C})$; c'est donc un groupe de Lie.

I. *La représentation adjointe du groupe G est un homomorphisme analytique du groupe G dans le groupe G_L.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $X_1, \ldots, X_m$ une base de L, et $(x_1, \ldots, x_m)$ le système de coordonnées canonique correspondant à cette base dans le groupe G, i.e.

$$x_i\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{m} u_j X_j\right)\right) = u_j, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.5.1}$$

Soit

$$d\alpha_g(X_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}(g) X_j, \tag{3.5.2}$$

i.e. la matrice de la représentation linéaire $d\alpha_g$ sera $(a_{ij}(g))$. Si $h = \exp(tX_i)$, on tire de (3.4.25) que

$$ghg^{-1} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} ta_{ji}(g) X_j\right). \tag{3.5.3}$$

Par conséquent, pour un t suffisamment petit, les quantités $ta_{ji}(g)$ sont les coordonnées canoniques de l'élément ghg^{-1}. Cherchons une formule qui exprime les coordonnées canoniques $x_i(gh)$, $x_i(ghg^{-1})$ et $x_i(h^{-1}g^{-1}hg)$.

Soit U un voisinage de l'élément e tel que $\xi(U)$ est l'ensemble de tous les $(y_1, \ldots, y_m)$ pour lesquels $|y_i| < a$ pour un certain $a > 0$ et tous les $i = 1, \ldots, m$. Soit $\xi(W)$ l'ensemble de tous les $(y_1, \ldots, y_m)$ tels que $|y_i| < b$ pour un certain $b > 0$ et tous les $i = 1, \ldots, m$, b étant choisi de manière à avoir $WW \subset U$. Pour $g, h \in W$

$$x_i(gh) = F_i(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)),\quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.5.4}$$

où les fonctions F_i sont analytiques dans le domaine $\xi(W) \times \xi(W)$. Décomposons la fonction $F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ en une série de puissances relativement aux variables $z_1, \ldots, z_m$; alors F_i peut être représentée sous la forme

$$F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{il}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m), \tag{3.5.5}$$

où P_{il} est un polynôme homogène de degré l (relativement aux variables $z_1, \ldots, z_m$) dont les coefficients sont des fonctions analytiques de $y_1, \ldots, y_m$.

Rappelons que

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} x_i(g) X_i\right) \tag{3.5.6}$$

pour tous les $g \in W$. Soit

$$g(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} t x_i(g) X_i\right), \quad |t| \leqslant 1; \tag{3.5.7}$$

alors on tire de (3.5.5) que

$$x_i(gh(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{il}(x_1(g), \ldots, x_m(g); x_1(h), \ldots, x_m(h))\, t^l \tag{3.5.8}$$

pour tous les $g, h \in W$, $|t| \leqslant 1$. D'autre part, toute fonction $f \in D(U)$ vérifie la relation $(df(g\theta_X(t))/dt) = (Xf)_{g\theta_X(t)}$ pour tout sous-groupe à un paramètre θ_X, $X \in L$, si $\theta_X(t) \in U$ (voir (3.4.3)). Il découle de (3.5.7) et de la proposition I de 3.4 que $h(t) = \theta_Y(t)$, où $Y = \sum_{i=1}^{m} x_i(h) X_i$. Par conséquent,

$$(df(gh(t))/dt) = \left(\left(\sum_{i=1}^{m} x_i(h) X_i\right) f\right)_{gh(t)} \tag{3.5.9}$$

pour tous les $|t| \leqslant 1$. Soit $Y = \sum_{i=1}^{m} x_i(h) X_i$. En appliquant la formule (3.5.9) aux fonctions $Y^n f$, nous obtenons par récurrence

$$(d^n f(gh(t))/dt^n) = (Y^n f)_{gh(t)} \tag{3.5.10}$$

pour tous les n naturels. La fonction analytique $f(gh(t))$ se développe alors en série de Taylor relativement à la variable t dans un voisinage du point $t = 0$, les coefficients du développement étant définis par les formules (3.5.10); donc

$$f(gh(t)) = f(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} (Y^n f)_g \tag{3.5.11}$$

pour des t suffisamment petits. Mais si $f = x_i$, la formule (3.5.8) implique que la série (3.5.11) converge pour $|t| \leqslant 1$ et

$$P_{in}(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)) = \frac{1}{n!} (Y^n x_i)_g. \tag{3.5.12}$$

D'une manière analogue, en posant $X = \sum_{i=1}^{m} x_i(g) X_i$ et $g(t) = \theta_X(t) = \exp(tX)$, nous obtenons que pour chaque fonction $f \in D(U)$ on a

$$f(g(t)) = f(e) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (X^k f)_e; \tag{3.5.13}$$

appliquons la formule (3.5.13) aux fonctions $(Y^n x_i)_g$ et substituons le résultat dans (3.5.11), il vient

$$x_i(gh) = \sum_{k,\, n=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} (X^k Y^n x_i)_e \tag{3.5.14}$$

pour tous les $g, h \in V$. L'expression $(X^k Y^n x_i)_e$ est un polynôme homogène de degré $k+n$ en les variables $x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots \ldots, x_m(h)$, et les formules (3.5.14) donnent ainsi les séries de Taylor pour les fonctions $x_i(gh)$.

De la relation (3.5.13) et d'une relation analogue pour $f(h(t))$ on tire $x_i(g(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^k x_i)_e$, $x_i(h(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (Y^n x_i)_e$ (rappelons que $x_i(e) = 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, m$). Alors les formules (3.5.14) impliquent

$$x_i(gh) = x_i(g) + x_i(h) + (XYx_i)_e + \rho(g, h), \tag{3.5.15}$$

où ρ est une série qui ne contient pas de monômes en $x_1(g), \ldots$ $\ldots, x_m(h)$ d'ordre inférieur à trois. D'autre part, la différence $y_i(g, h) = x_i(gh) - x_i(g) - x_i(h)$ se développe en une série qui ne contient pas de termes d'ordre inférieur à deux, et $y_i(g, h) = 0$ lorsque g ou h est égal à e. Par conséquent,

$$x_i(gh) - x_i(g) - x_i(h) = \sum_{j,\,k=1}^{m} x_j(g)\, x_k(h)\, f_{ijk}(g, h),$$

où les $f_{ijk}(g, h)$ sont analytiques dans un voisinage du point (e, e). Remplaçons g par gh, et h par $h^{-1}g^{-1}hg$, il vient

$$x_i(hg) - x_i(gh) - x_i(h^{-1}g^{-1}hg) =$$
$$= \sum_{j,\,k=1}^{m} x_j(gh)\, x_k(h^{-1}g^{-1}hg)\, f_{ijk}(gh, g^{-1}h^{-1}gh). \quad (3.5.16)$$

Puisque la fonction $x_k(h^{-1}g^{-1}hg)$ s'annule pour $h = e$ ou $g = e$, son développement en série relativement à $x_1(g), \ldots, x_m(h)$ ne contient pas de termes d'ordre inférieur à deux, donc la décomposition de la fonction $x_i(hg) - x_i(gh) - x_i(h^{-1}g^{-1}hg)$ ne contient aucun terme d'ordre inférieur à 3. D'autre part, on tire de (3.5.15) que

$$x_i(hg) - x_i(gh) = ([Y, X]\, x)_e + \rho(g, h) - \rho(h, g),$$

donc

$$x_i(h^{-1}g^{-1}hg) = ([Y, X]\, x_i)_e + \rho_1(g, h), \quad (3.5.17)$$

où ρ_1 ne contient pas de termes d'ordre inférieur à trois. En remplaçant dans la formule (3.5.16) h par $g^{-1}h$ et en se servant de l'égalité (3.5.17), on obtient

$$x_i(g^{-1}hg) = x_i(h) + ([Y, X]\, x_i)_e + \rho_2(g, h), \quad (3.5.18)$$

où $\rho_2(g, h)$ ne contient pas de termes de degré inférieur à trois.

Revenons à la démonstration de la proposition I. Nous savons déjà que pour un t suffisamment petit les grandeurs $ta_{ji}(g)$ sont des coordonnées canoniques de l'élément ghg^{-1}. Conformément à (3.5.18), ces coordonnées sont des fonctions analytiques de g dans un voisinage de l'élément e. Par conséquent, la représentation adjointe est analytique dans un voisinage du point e. Puisque les translations à gauche dans le groupe de Lie G sont des transformations analytiques et $d\alpha_{gg_0} = d\alpha_g\, d\alpha_{g_0}$, on tire de l'analyticité de la représentation Ad: $g \to d\alpha_g$ dans un voisinage du point e que l'application Ad est analytique.

Désignons l'opérateur $d\alpha_g$ par ad (g).

II. *La différentielle de la représentation adjointe d'un groupe de Lie G est l'homomorphisme adjoint $X \to$ ad X de l'algèbre de Lie L du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. L'application d (Ad) est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(L)$. Le lecteur vérifiera facilement que la formule (3.5.18) implique l'égalité

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))\, X_i = X_i + t\,[X, X_i] + \rho(t) \qquad (3.5.19)$$

pour tous les $i = 1, \ldots, m$ et tous les $X \in L$, où $\rho(t)$ est une fonction analytique (dans un voisinage du point $t = 0$) qui ne contient aucun terme de degré inférieur à deux dans son développement de Taylor. Nous voyons donc que

$$(d\,(\mathrm{Ad}))(X)\, X_i = [X, X_i] \qquad (3.5.20)$$

pour tous les $X \in L$, $i = 1, \ldots, m$, donc

$$((d\,(\mathrm{Ad}))(X))(Y) = [X, Y] = (\mathrm{ad}\, X)(Y) \qquad (3.5.21)$$

pour tous les X, $Y \in L$.

III. *Pour chaque élément* $X \in L$

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = e^{\mathrm{ad}\, X}. \qquad (3.5.22)$$

La proposition s'obtient immédiatement de VI de 3.4, de II et de (3.4.33).

IV. *Soient G un groupe de Lie, L son algèbre de Lie, N une sous-algèbre de Lie de L, et H le sous-groupe analytique de G qui correspond à la sous-algèbre de Lie N. La condition* $[a, N] \subset N$ *pour un certain* $a \in L$ *est équivalente à la condition* $(\exp ta)\, H\, (\exp ta)^{-1} \subset H$, $t \in \mathbf{R}$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $b = \exp(ta)$. Il est évident que $\mathrm{Ad}(b)\, H = bHb^{-1}$ est un sous-groupe analytique du groupe de Lie G, tandis que (3.5.18) implique que l'algèbre de Lie du sous-groupe bHb^{-1} est l'image de l'algèbre de Lie N du sous-groupe de Lie H par l'application $d\alpha_b = \mathrm{Ad}(b)$. Ainsi $bHb^{-1} \subset H$ si et seulement si $\mathrm{Ad}(b)\, N \subset N$. Il est évident que la relation $\mathrm{Ad}(\exp(ta))\, N \subset N$ est équivalente à la condition suivante: le sous-espace $N \subset L$ est invariant relativement à la restriction au sous-groupe $\{\exp(ta)\}$ de la représentation adjointe du groupe de Lie G. En vertu du théorème de 3.4, cette condition est vérifiée si et seulement si N est invariant relativement à la représentation $d\,(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ de la sous-algèbre de Lie $\{ta\} \subset L$ ce qui termine la démonstration.

V. *Soient G un groupe de Lie connexe, L son algèbre de Lie, H un sous-groupe de Lie analytique de G, et N la sous-algèbre de Lie qui correspond au sous-groupe H. Le sous-groupe H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si N est un idéal de l'algèbre de Lie L.*

D é m o n s t r a t i o n. Le sous-groupe H est un sous-groupe distingué si et seulement si $gHg^{-1} \subset H$ pour tous les g d'un certain voisinage U de l'élément neutre du groupe G. En effet, lorsque $gHg^{-1} \subset H$ pour tous les $g \in H$, on a $gHg^{-1} \subset H$ pour tous les

$g \in U^n$, tandis qu'en vertu de la connexité du groupe G on a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. D'autre part, l'image de l'algèbre de Lie L par l'application exponentielle contient un voisinage de l'élément neutre, donc H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si $\exp(ta) H \times \exp(ta)^{-1} \subset H$ pour tous les $a \in L$, $t \in \mathbf{R}$. Alors V découle immédiatement de IV.

L'image du groupe G par l'application Ad s'appelle *groupe adjoint* du groupe G. Il est évident que le groupe Ad (G) est isomorphe au groupe quotient du groupe G par le noyau de l'application Ad.

VI. *Le noyau de la représentation adjointe d'un groupe de Lie connexe G coïncide avec le centre du groupe G.*

Démonstration. Lorsque Ad (g), $g \in G$, est l'identité sur L, alors α_g est l'identité sur G. En effet, puisque le groupe G est connexe, la représentation π du groupe de Lie G est identique sur tout le groupe G si et seulement si π est l'identité sur un certain voisinage de l'élément neutre du groupe G, tandis que (3.4.25) implique que π est l'identité dans un voisinage canonique de l'élément e si et seulement si $d\pi$ est l'application identique de l'algèbre de Lie L sur elle-même. Par conséquent, le noyau de la représentation $g \to d\alpha_g = \mathrm{Ad}(g)$ coïncide avec le noyau de l'application $g \to \alpha_g$, i.e. avec le centre du groupe G.

3.6. Différentielle de l'application exponentielle. Soient G un groupe de Lie, et L son algèbre de Lie. Puisque l'application exponentielle exp est une application analytique de la variété L dans G, dans chaque point $x \in L$ la différentielle $(d \exp)_x$ est une application de l'espace tangent $T_x(L)$ dans l'espace tangent $T_{\exp(x)}(G)$.

Remarquons que l'espace tangent $T_x(L)$ peut être canoniquement identifié à l'algèbre de Lie L de la manière suivante. Soit $y \in L$; faisons correspondre à l'élément y le vecteur tangent $v_y \in T_x(L)$ en posant

$$v_y(f) = f(y) \tag{3.6.1}$$

pour chaque fonction linéaire f sur l'algèbre de Lie L. En vertu de I et II de 3.2, la formule (3.6.1) définit le vecteur tangent $v_y \in T_x(L)$ de façon unique, l'application $y \to v_y$ étant un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur $T_x(L)$.

Identifions maintenant l'espace tangent $T_g(G)$, $g \in G$, à l'algèbre de Lie L de la manière suivante. Faisons correspondre à chaque élément z de l'algèbre de Lie L le vecteur tangent $w_z(g) \in T_g(G)$ en posant

$$w_z(g) = z(g). \tag{3.6.2}$$

On tire des propositions I et II de 3.2 que la formule (3.6.2) définit effectivement une application isomorphe de l'algèbre de Lie L sur $T_g(G)$.

Par la suite nous écrirons y à la place de v_y et z à la place de w_z. Trouvons une formule explicite pour $(d \exp)_x (y)$.

Considérons l'application

$$\psi : t \to \exp(-x) \exp(x + ty), \tag{3.6.3}$$

où $t \in \mathbf{R}$ ou $t \in \mathbf{C}$, selon que G est un groupe de Lie réel ou complexe. On tire de la formule (3.6.3) qu'en particulier $\psi(0) = e$. Puisque l'élément $z \in L$ est un champ de vecteurs invariant à gauche sur G, on a $(d\varphi_g)_e z(e) = z(g)$ d'après (3.2.1) et en particulier la relation $\varphi_{\exp(x)}\psi(t) = \exp(x + ty)$ et la formule (1.5.1) impliquent

$$(d\varphi)_{\exp x} \circ (d\psi/dt)|_{t=0} = ((d \exp)_x y)(\exp x) = (d\varphi_{\exp x} \circ ((d \exp)_x y))(e),$$

de sorte que

$$(d \exp)_x (y) = ((d/dt)(\exp(-x) \exp(x + ty)))_{t=0}. \tag{3.6.4}$$

Remarquons en outre que l'application

$$(t, x, y) \to \exp(-x) \exp(x + ty)$$

est une application analytique de la variété $\mathbf{R} \times L \times L$ (respectivement $\mathbf{C} \times L \times L$) dans G. Ainsi on déduit de (3.6.4) que l'application Φ qui fait correspondre à chaque couple $(x, y) \in L \times L$ l'élément $(d \exp)_x (y) \in L$ est une application analytique de $L \times L$ dans L.

I. *Soient A une algèbre associative, a un élément de A, et δ_a l'application de A dans A définie par la formule $\delta_a(x) = ax - xa$, $a \in A$. Pour chaque n entier nous avons*

$$(\delta_a)^n (x) = (-1)^n \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k a^k x a^{n-k} \tag{3.6.5}$$

quel que soit $x \in A$.

La proposition se démontre tout comme la formule usuelle du binôme, par récurrence sur n, les détails sont laissés au lecteur.

II. *Soient G un groupe de Lie, L l'algèbre de Lie du groupe G, et $(d \exp)_x$ la différentielle de l'application exponentielle au point $x \in L$. Alors*

$$(d \exp)_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n. \tag{3.6.6}$$

En particulier, l'application $(d \exp)_x$ est un isomorphisme si et seulement si les valeurs propres de l'opérateur linéaire ad x *diffèrent de $2k\pi i$, où $k \neq 0$ est entier.*

Démonstration. Soient $x, y \in L$. Soit U un voisinage de l'élément neutre du groupe G et supposons que le nombre $a > 0$ a été

choisi de manière à avoir

$$\exp(ux)\exp(vx+wy)\in U$$

pour tous les u, v, w qui vérifient $|u|<a$, $|v|<a$, $|w|<a$. Si $f\in D(U)$, alors la fonction F définie par la formule

$$F(u, v, w) = f(\exp(ux)\exp(vx+wy)) \tag{3.6.7}$$

est analytique dans le domaine I_a déterminé par les inégalités $|u|<a$, $|v|<a$, $|w|<a$. On peut supposer que le nombre a a été choisi si petit que la série de Taylor pour F dans un voisinage du point (0, 0, 0) converge absolument et uniformément sur I_a. Soient p, q, r des entiers non négatifs et

$$F_{p,q,r}=\left(\frac{\partial^{p+q+r}F}{\partial u^p\partial v^q\partial w^r}\right)(0, 0, 0);$$

alors

$$F(u, v, w)=\sum_{p,q,r\geqslant 0}\frac{F_{p,q,r}}{p!\,q!\,r!}u^pv^qw^r \quad ((u, v, w)\in I_a). \tag{3.6.8}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial w}(u, v, 0)=\sum_{p,q\geqslant 0}\frac{F_{p,q,1}}{p!\,q!}u^pv^q \tag{3.6.9}$$

pour tous les $|u|<a$, $|v|<a$. En particulier, pour $u=-t$, $v=t$ on obtient de (3.6.9)

$$\frac{\partial F}{\partial w}(-t, t, 0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n \tag{3.6.10}$$

pour $|t|<a$, où les coefficients c_n sont définis par la formule

$$c_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^kC_n^kF_{k,n-k,1}. \tag{3.6.11}$$

Remarquons maintenant que les relations (3.6.4) et (3.6.7) impliquent

$$\frac{\partial F}{\partial w}(-t, t, 0)=((d\exp)_{tx}(y)f)(e) \tag{3.6.12}$$

pour $|t|<a$. D'autre part, on obtient de (3.6.7) et (3.6.8) que pour $(u, v, w)\in I_a$ on a l'égalité suivante

$$((vx+wy)^kf)(\exp(ux))=\left(\frac{d^k}{dt^k}F(u, tv, tw)\right)_{t=0}=$$

$$=k!\sum_{p\geqslant 0,\ 0\leqslant q\leqslant k}\frac{F_{p,q,k-q}}{p!\,q!\,(k-q)!}u^pv^qw^{k-q}. \tag{3.6.13}$$

Soit $k = q + 1$. En identifiant les coefficients correspondants auprès de $v^q w$ dans les deux membres de (3.6.13), nous obtenons

$$\Big(\Big(\sum_{0 \leq s \leq q} x^s y x^{q-s}\Big) f\Big)(\exp ux) = (q+1)! \sum_{p \geq 0} \frac{F_{p,q,1}}{p!q!} u^p =$$

$$= (q+1) \sum_{p \geq 0} \frac{F_{p,q,1}}{p!} u^p = (q+1)\Big(\frac{\partial^{q+1} F}{\partial v^q \partial w}\Big)(u, 0, 0) \qquad (3.6.14)$$

pour tous les $|u| < a$. En calculant la dérivée de (3.6.14) p fois relativement à u pour $u = 0$, nous obtenons (d'après I de 3.4) que pour tous les entiers $p \geq 0$, $q \geq 0$ on a l'égalité

$$F_{p,q,1} = \frac{1}{q+1}\Big(\Big(\sum_{0 \leq s \leq q} x^{p+s} y x^{q-s}\Big) f\Big)(e). \qquad (3.6.15)$$

Substituons la formule (3.6.15) dans la relation (3.6.11), il vient

$$c_n = \Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{n-k+1} \sum_{s=0}^{n-k} x^{k+s} y x^{n-k-s}\Big) f\Big)(e) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+1}^k \sum_{k \leq m \leq n} x^m y x^{n-m}\Big) f\Big)(e) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} (x^m y x^{n-m})(e) \Big(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n+1}^k\Big). \qquad (3.6.16)$$

On vérifie facilement par récurrence sur m que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n+1}^k = (-1)^m C_n^m. \qquad (3.6.17)$$

En substituant (3.6.17) dans (3.6.16), on obtient

$$c_n = \frac{1}{n+1}\Big(\Big(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m x^m y x^{n-m}\Big) f\Big)(e). \qquad (3.6.18)$$

D'autre part, on tire de (3.6.5) que dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie L on a l'égalité

$$(\operatorname{ad} x)^n(y) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m x^m y x^{n-m}. \qquad (3.6.19)$$

Des relations (3.6.19) et (3.6.18) on obtient

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n+1} (((\operatorname{ad} x)^n y) f)(e). \qquad (3.6.20)$$

En vertu de (3.6.20), (3.6.10) et (3.6.12) on a

$$((d\exp)_{tx}(y)f)(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n ((\mathrm{ad}\, x)^n (y) f)(e) \qquad (3.6.21)$$

pour tous les $|t| < a$. En particulier, la relation (3.6.21) est valable lorsque U est une carte de l'élément e, tandis que f est une des fonctions qui constituent le système de coordonnées analytiques dans le voisinage U. Alors on obtient de (3.6.21) que

$$(d\exp)_{tx}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n (\mathrm{ad}\, x)^n (y) \qquad (3.6.22)$$

pour $|t| < a$. Mais les deux membres de l'égalité (3.6.22) sont des fonctions analytiques entières, elles doivent donc coïncider partout. En particulier, pour $t = 1$, nous obtenons l'égalité

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\mathrm{ad}\, x)^n (y). \qquad (3.6.23)$$

Comme $y \in L$ est arbitraire, on obtient (3.6.6) de (3.6.23).

Introduisons la fonction $F(z)$ d'une variable complexe z en posant

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$$

pour tous les $z \in \mathbf{C}$. Alors $zF(z) = 1 - e^{-z}$, et $F(z) = 0$ si et seulement si $z = 2k\pi i$ pour un entier non nul donné k. Soit $x \in L$; l'application $(d\exp)_x$ est un isomorphisme si et seulement si toutes les valeurs propres de la transformation $(d\exp)_x$ sont non nulles. Mais la formule (3.6.6) donne

$$(d\exp)_x = F(\mathrm{ad}\, x), \qquad (3.6.24)$$

de sorte que les valeurs propres de l'opérateur $(d\exp)_x$ sont égales à $F(\lambda_1), \ldots, F(\lambda_m)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de l'opérateur ad x. D'où l'on déduit que $(d\exp)_x$ est un isomorphisme si et seulement si $\lambda_j \neq 2k\pi i$ pour tous les $j = 1, \ldots, m$, où $k \neq 0$ est entier.

CHAPITRE X

ALGÈBRES DE LIE

Les principales définitions concernant les algèbres de Lie et leurs représentations ont été données au § 2 du chapitre IX, où l'on trouve également les exemples les plus importants. Le présent chapitre expose la théorie générale des algèbres de Lie.

§ 1. Quelques définitions

1.1. Dérivation dans les algèbres de Lie. Soit A une algèbre sur le corps K (A peut être aussi bien une algèbre de Lie qu'une algèbre associative). On appelle *dérivation* de l'algèbre de Lie A un opérateur linéaire d de l'algèbre A dans elle-même qui vérifie la condition

$$d(xy) = x(dy) + (dx)y. \tag{1.1.1}$$

I. *L'ensemble* Der (A) *de toutes les dérivations de l'algèbre A est une algèbre de Lie relativement aux opérations linéaires usuelles et à l'opération de commutation, définie par la formule*

$$[d, d_1] = dd_1 - d_1d$$

pour tous les $d, d_1 \in$ Der (A). *Si L est une algèbre de Lie, alors pour chaque $x \in L$ l'opérateur* ad $x: L \to L$ *défini par la formule* ad $x(y) = [x, y]$ *est une dérivation de l'algèbre de Lie L. L'application $x \to$ ad x est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie* Der (L), *et l'image de cet homomorphisme dans* Der (L) *est un idéal de* Der (L).

Démonstration. Soient d, d_1 des dérivations dans l'algèbre de Lie A. Le fait que $[d, d_1]$ est une dérivation se vérifie par un calcul direct. En effet,

$$\begin{aligned}[d, d_1](xy) &= dd_1(xy) - d_1d(xy) = \\ &= d((d_1x)y + x(d_1y)) - d_1((dx)y + x(dy)) = \\ &= ((dd_1)x)y + (d_1x)(dy) + (dx)(d_1y) + x((dd_1)y) - \\ &- ((d_1d)x)y - (dx)(d_1y) - (d_1x)(dy) - x((d_1d)y) = \\ &= (dd_1x)y + x(dd_1y) - (d_1dx)y - x(dd_1y) = \\ &= ([d, d_1]x)y + x([d, d_1]y).\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

On tire de (1.1.2) et (1.1.1) que $[d, d_1]$ est une dérivation de l'algèbre A. Si L est une algèbre de Lie, alors en vertu de l'identité de Jacobi on a pour des $x, y, z \in L$ quelconques

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} x([y, z]) = [x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - \\ -[z, [x, y]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = \\ = [(\operatorname{ad} x)(y), z] + [y, (\operatorname{ad} x)(z)]. \quad (1.1.3)\end{aligned}$$

En comparant (1.1.3) avec (1.1.1), nous voyons que l'application $\operatorname{ad} x: L \to L$ est une dérivation de l'algèbre de Lie L. L'application $x \to \operatorname{ad} x$ est un homomorphisme de L dans $\operatorname{Der}(L)$ en vertu de la formule (2.1.15) du chapitre IX. Enfin, lorsque $x \in L$ et $d \in \operatorname{Der}(L)$, on a pour tout $y \in L$

$$\begin{aligned}[d, \operatorname{ad} x](y) = d(\operatorname{ad} x(y)) - (\operatorname{ad} x)(dy) = \\ = d([x, y]) - [x, dy] = [dx, y] + [x, dy] - \\ - [x, dy] = [dx, y]. \quad (1.1.4)\end{aligned}$$

La relation (1.1.4) signifie que l'on a l'égalité

$$[d, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(dx) \quad (1.1.5)$$

pour tous les $x \in L$, $d \in \operatorname{Der}(L)$. Par conséquent l'espace linéaire des dérivations de la forme $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, est un idéal de $\operatorname{Der}(L)$.

L'idéal des dérivations de la forme $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, dans l'algèbre de Lie $\operatorname{Der}(L)$ s'appelle *idéal des dérivations internes* de l'algèbre de Lie L.

1.2. Représentation contragrédiente et produit tensoriel de représentation d'algèbres de Lie. Soit π une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace V et supposons que les espaces V et V^* sont en dualité relativement à la forme bilinéaire (v, v^*), $v \in V$, $v^* \in V^*$. La représentation π^* de l'algèbre de Lie L dans l'espace V^*, définie par la formule

$$(v, \pi^*(x) v^*) = -(\pi(x) v, v^*) \quad (1.2.1)$$

pour tous les $x \in L$, $v \in V$, $v^* \in V^*$, s'appelle représentation *contragrédiente* à la représentation π.

Soient $\pi_1, \ldots, \pi_n$ des représentations de l'algèbre de Lie L dans les espaces $V_1, \ldots, V_n$ respectivement. La représentation π de l'algèbre de Lie L dans l'espace $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, définie par la formule

$$\pi(x)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \ldots \otimes \pi_i(x) v_i \otimes \ldots \otimes v_n \quad (1.2.2)$$

pour tous les $x \in L$, $v_i \in V_i$ ($i = 1, \ldots, n$), s'appelle *produit tensoriel* des représentations $\pi_1, \ldots, \pi_n$; on la désigne par $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$.

Le lecteur vérifiera sans peine que π^* et $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$ sont effectivement des représentations de l'algèbre de Lie L.

1.3. Application canonique de $V_1^* \otimes V_2$ sur $L(V_1, V_2)$. Soient V_1, V_2 des espaces vectoriels de dimension finie, V_1^* l'espace adjoint à V_1. Considérons l'application τ de l'espace $V_1^* \otimes V_2$ dans l'espace $L(V_1, V_2)$ des applications linéaires de V_1 dans V_2, définie par la formule

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y_i\right)(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z)\, y_i, \quad z \in V_1, \quad y_i \in V_2, \quad f_i \in V_1^*. \tag{1.3.1}$$

L'application τ est évidemment linéaire. Chaque opérateur linéaire T de V_1 dans V_2 appartient à l'image de l'application τ puisque

$$Tz = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, e_j, \qquad z \in V_1, \tag{1.3.2}$$

où (e_j) est une base fixe dans V_2 tandis que les φ_j sont des fonctionnelles linéaires sur V_1. Puisque les dimensions des espaces $V_1^* \otimes V_2$ et $L(V_1, V_2)$ sont égales et l'image de l'application τ est l'espace $L(V_1, V_2)$ tout entier, τ est un isomorphisme de $V_1^* \otimes V_2$ sur $L(V_1, V_2)$. Cet isomorphisme s'appelle *isomorphisme canonique de $V_1^* \otimes V_2$ sur $L(V_1, V_2)$*.

Soit L une algèbre de Lie ; supposons que π est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Définissons l'homomorphisme π^* de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V^*)$ en posant

$$\pi^*(x) = -(\pi(x))^* \tag{1.3.3}$$

pour tous les $x \in L$, où $(\pi(x))^*$ est l'opérateur adjoint à $\pi(x)$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que l'application π^* est effectivement un homomorphisme ; on l'appelle homomorphisme *adjoint* à π.

Considérons l'homomorphisme $\pi^* \otimes \pi$ de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V^* \otimes V)$ défini par la formule

$$\begin{aligned}(\pi^* \otimes \pi)(x)(v^* \otimes v) &= \pi^*(x)(v^* \otimes v) + v^* \otimes \pi(x) v = \\ &= -(\pi(x))^* v^* \otimes v + v^* \otimes \pi(x) v\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

pour tous les $x \in L$, $v \in V$, $v^* \in V^*$. Soit θ l'homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(L(V, V))$ qui correspond à $\pi^* \otimes \pi$ par l'isomorphisme τ. Pour un opérateur T de la forme

1.3.2) nous avons

$$(\theta(x) T) z = \theta(x) \tau\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes e_j\right) z =$$

$$= \tau\left((\pi^* \otimes \pi)(x)\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes e_j\right)\right)(z) =$$

$$= \tau\left(\sum_{j=1}^{m} \left((-\pi(x)^*) \varphi_j \otimes e_j + \varphi_j \otimes \pi(x) e_j\right)\right)(z) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} (\pi(x)^* \varphi_j)(z) e_j + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z) \pi(x) e_j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\pi(x) z) e_j + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z) \pi(x) e_j =$$

$$= -T\pi(x) z + \pi(x) T z = [\pi(x), T] z. \quad (1.3.5)$$

On tire de (1.3.5) que

$$\theta(x) T = [\pi(x), T] \quad (1.3.6)$$

pour tous les $x \in L$, $T \in L(V, V)$.

1.4. Enveloppe complexe d'une algèbre de Lie réelle. Soit L une algèbre de Lie réelle. Désignons par $L_{\mathbf{C}}$ l'espace linéaire réel $L + L$. Soit J l'opérateur linéaire dans $L + L$ qui agit suivant la formule $J\{x, y\} = \{-y, x\}$; posons

$$(\alpha + i\beta)\{x, y\} = \alpha\{x, y\} + \beta J\{x, y\} = \{\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x\} \quad (1.4.1)$$

pour tous les $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $x, y \in L$, et

$$[\{x, y\}, \{x_1, y_1\}] = \{[x, x_1] - [y, y_1], [y, x_1] + [x, y_1]\} \quad (1.4.2)$$

pour tous les $x, y, x_1, y_1 \in L$. L'ensemble $L_{\mathbf{C}}$, muni de l'opération d'addition usuelle, de l'opération de multiplication par les nombres complexes définie par la formule (1.4.1) et de l'opération de commutation définie par la formule (1.4.2) est une algèbre de Lie complexe; désignons encore cette algèbre de Lie par $L_{\mathbf{C}}$. L'algèbre de Lie complexe $L_{\mathbf{C}}$ s'appelle *complexification*, ou *enveloppe complexe*, de l'algèbre de Lie L. Il est évident que L peut être identifiée à l'ensemble $\widetilde{L}$ des éléments de l'algèbre de Lie $L_{\mathbf{C}}$ de la forme $\widetilde{x} = \{x, 0\}$, où $x \in L$.

Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de L, alors les $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ forment une base de l'espace linéaire complexe $L_{\mathbf{C}}$. Les constantes de structure de l'algèbre de Lie complexe $L_{\mathbf{C}}$ relativement à la base $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ sont réelles puisqu'elles coïncident avec les constantes de structure de l'algèbre de Lie réelle L relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$.

Soit V un espace linéaire réel. Désignons par $V_{\mathbf{C}}$ l'espace linéaire complexe $V + V$ muni de l'opération d'addition usuelle et de l'opération de multiplication par les nombres complexes définie par la formule

$$(\alpha + \beta i) \{x, y\} = \{\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x\}.$$

Si π est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, alors la formule

$$(\pi_{\mathbf{C}}(x, y))(\xi, \eta) = \\ = (\pi(x)\xi - \pi(y)\eta, \pi(x)\eta + \pi(y)\xi), \quad x, y \in L, \\ \xi, \eta \in V,$$

détermine une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace $V_{\mathbf{C}}$. Il est évident que l'on peut supposer V plongé dans $V_{\mathbf{C}}$. La représentation $\pi_{\mathbf{C}}$ s'appelle *complexification* de la représentation π.

On vérifie facilement que l'application $\pi \to \pi_{\mathbf{C}}$ est une bijection entre les homomorphismes de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$ et les représentations $\pi_{\mathbf{C}}$ de l'algèbre de Lie $L_{\mathbf{C}}$ dans l'espace $V_{\mathbf{C}}$ telles que $\pi_{\mathbf{C}}(L) V \subset V$. Cette remarque permet souvent de ramener l'étude des homomorphismes $\pi: L \to gl(V)$ à celle des représentations de l'algèbre de Lie complexe $L_{\mathbf{C}}$.

1.5. Série de Jordan-Hölder. Par la suite, nous nous servirons souvent de la proposition suivante.

I. *Soit π un homomorphisme de l'lagèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Il existe une suite de sous-espaces $V_0 = (0) \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ de l'espace V telle que $V_{k-1} \subset V_k$ pour $k = 1, \ldots, n$, chacun des sous-espaces V_k étant invariant relativement à $\pi(L)$ et la famille d'opérateurs induite par la famille $\pi(L)$ dans V_k/V_{k-1} est irréductible.*

Démonstration. Si la famille $\pi(L)$ est irréductible, alors l'assertion est évidente. Supposons que $\pi(L)$ est réductible. Alors V contient un sous-espace non nul V^1, invariant relativement à $\pi(L)$ et de dimensoin inférieure à celle de V. Si la restriction de la famille $\pi(L)$ à V^1 est réductible, alors V^1 contient un sous-espace invariant non trivial, etc. Puisque la dimension de V est finie, il contient un sous-espace non nul V_1 sur lequel la restriction de la famille $\pi(L)$ est irréductible. L'homomorphisme π définit alors un homomorphisme π_1 de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V/V_1)$. Soit $\widetilde{V}_2$ un sous-espace de V/V_1 sur lequel $\pi_1(L)$ est irréductible; ce sous-espace existe en vertu du raisonnement précédent. Désignons par V_2 l'image inverse de $\widetilde{V}_2$ dans l'espace V. Alors V_2 est invariant relativement à $\pi(L)$. En continuant cette construction, nous obtenons une famille finie de sous-espaces de l'espace V:

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V \tag{1.5.1}$$

tels que chaque V_k est invariant relativement à $\pi(L)$, et la famille des opérateurs induits par la famille des opérateurs $\pi(L)$ dans V_{k+1}/V_k, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ est irréductible.

La suite de sous-espaces (1.5.1) s'appelle *série de Jordan-Hölder* pour l'homomorphisme π.

1.6. Algèbres de Lie nilpotente et résoluble. Définition. Soient A, B des sous-ensembles de l'algèbre de Lie L. Désignons par $[A, B]$ le sous-espace linéaire de L engendré par tous les éléments de la forme $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$.

I. *Si M et N sont des idéaux de L, alors $[M, N]$ est un idéal de L.*

Démonstration. Soient $a \in M$, $b \in N$. Alors pour chaque $x \in L$ on a

$$[[a, b], x] = [[a, x], b] - [[b, x], a] \qquad (1.6.1)$$

en vertu de l'identité de Jacobi. Mais $[a, x] \in M$ et $[b, x] \in N$ puisque M et N sont des idéaux. Par conséquent, le deuxième membre de la formule (1.6.1) appartient à $[M, N]$. Comme chaque élément $y \in [M, N]$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme $[a, b]$, $a \in M$, $b \in N$, on a $[y, x] \in [M, N]$ pour tous les $y \in [M, N]$, i.e. le sous-espace linéaire $[M, N]$ est un idéal.

Soit L une algèbre de Lie. Posons

$$L = L^{(0)} = L_0; \quad L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]; \quad L_n = [L, L_{n-1}]. \qquad (1.6.2)$$

On déduit de la proposition I que $L^{(n)}$ (respectivement L_n) est un idéal de $L^{(r)}$ (respectivement de L_r) pour $0 \leqslant r \leqslant n$. La suite d'idéaux L_n s'appelle *série centrale décroissante* de l'algèbre de Lie L, et la suite $L^{(n)}$, *série dérivée* de l'algèbre de Lie L. L'idéal $L^{(1)}$ s'appelle *idéal dérivé* de l'algèbre de Lie L. L'algèbre de Lie L est dite *résoluble* (respectivement *nilpotente*) s'il existe un entier positif n tel que $L^{(n)} = (0)$ (respectivement $L_n = (0)$). Le plus petit de ces n s'appelle *hauteur*, ou *rang*, de l'algèbre de Lie L résoluble (respectivement nilpotente).

II. *Chaque algèbre de Lie nilpotente est résoluble.*

Cette assertion découle immédiatement de la relation $L^{(n)} \subset L_n$.

III. *Chaque sous-algèbre M d'une algèbre de Lie L résoluble (nilpotente) est résoluble (respectivement nilpotente).*

Cette assertion découle des relations $M^{(n)} \subset L^{(n)}$, $M_n \subset L_n$.

IV. *Toute image par un homomorphisme (en particulier, toute algèbre quotient) d'une algèbre de Lie L résoluble (nilpotente) est une algèbre résoluble (respectivement nilpotente).*

Démonstration. Soit π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie L'. Alors $L'^{(n)} = \pi(L^{(n)})$, $L'_n = \pi(L_n)$, d'où l'on obtient l'assertion de la proposition IV.

V. *Chaque algèbre quotient* $L^{(n-1)}/L^{(n)}$ *est commutative.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit π l'homomorphisme canonique de l'algèbre $L^{(n-1)}$ sur $L^{(n-1)}/L^{(n)}$. Il est évident que $[x, y] \in L^{(n)}$ pour $x, y \in L^{(n-1)}$ et donc $[\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) = 0$.

VI. *Soit* M *un idéal de* $L^{(n-1)}$ *tel que l'algèbre quotient* $L^{(n-1)}/M$ *est commutative. Alors* $M \supset L^{(n)}$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit π l'homomorphisme canonique de l'algèbre $L^{(n-1)}$ sur $L^{(n-1)}/M$. Alors, pour $x, y \in L^{(n-1)}$, $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)] = 0$, et donc $\pi(L^{(n)}) = (0)$; par conséquent $L^{(n)} \subset M$.

§ 2. Représentations des algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

2.1. Algèbres de Lie nilpotentes et théorème d'Engel. Ce sous-paragraphe est consacré à la démonstration des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *L'algèbre de Lie* L *est nilpotente si et seulement si pour chaque* $x \in L$ *la transformation linéaire* ad x *est nilpotente (i.e. il existe un entier positif* p *tel que* $(\text{ad}\, x)^p = 0$).

THÉORÈME 2. *Soient* L *une algèbre de Lie sur un corps* K, $V \neq (0)$ *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, *et* π *un homomorphisme de l'algèbre de Lie* L *dans l'algèbre de Lie* $gl(V)$. *Si toute transformation linéaire* $\pi(x)$, $x \in L$, *est nilpotente, il existe un vecteur non nul* $v \in V$ *tel que* $\pi(x)v = 0$ *quel que soit* $x \in L$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. a) Soit N le noyau de la représentation π. Posons $L' = L/N$ et définissons la représentation π de l'algèbre de Lie L' par la formule $\pi(\tilde{x}) = \pi(x)$ pour $\tilde{x} \in L'$, $x \in \tilde{x}$. Il est évident qu'il suffit de démontrer l'assertion du théorème 2 pour la représentation $\tilde{\pi}: \tilde{x} \to \pi(\tilde{x})$ de l'algèbre de Lie L'. De la construction même il découle clairement que $\tilde{\pi}: \tilde{x} \to \pi(\tilde{x})$ est une représentation exacte de l'algèbre de Lie L' et que cette représentation vérifie les hypothèses du théorème et nous allons supposer par la suite que $N = (0)$. Si la dimension de l'algèbre de Lie L est égale à un, l'assertion du théorème est évidente. En effet, si $\pi(x)$ est un élément non nul de $\pi(L)$, alors tout élément de $\pi(L)$ est le multiple scalaire de l'élément $\pi(x)$ et il suffit donc de démontrer que le noyau de l'opérateur $\pi(x)$ est non nul. Par hypothèse, $(\pi(x))^p = 0$ pour un certain entier positif p, i.e. le noyau de l'opérateur $(\pi(x))^p$ est égal à V et donc n'est pas nul; alors le noyau de l'opérateur $\pi(x)$ est également différent de zéro. Ainsi, nous pouvons procéder par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie L en partant de l'hypothèse que l'assertion du théorème 2

est vraie pour chaque algèbre de Lie M dont la dimension est inférieure à celle de L.

b) Démontrons que l'algèbre de Lie L contient un idéal de codimension 1. Soit M une sous-algèbre propre de L (par exemple, un sous-espace de dimension 1 est toujours une sous-algèbre de Lie abélienne, ce qui découle de la relation $[x, x] = 0$). Considérons l'homomorphisme $x \rightarrow \text{ad}\, x$ de l'algèbre de Lie L dans $gl\,(L)$. La famille des opérateurs $\text{ad}\, x$, $x \in M$, laisse invariant le sous-espace $M \subset L$; en passant aux opérateurs induits par les opérateurs $\text{ad}\, x$, $x \in M$, dans l'espace quotient L/M, nous obtenons un homomorphisme ρ de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie $gl\,(L/M)$. Puisque chaque opérateur $\pi\,(x)$, $x \in L$, est nilpotent, et la représentation π est exacte, chaque opérateur $\text{ad}\, x$, $x \in L$, est nilpotent. En effet, en identifiant l'algèbre de Lie L à la sous-algèbre $\pi\,(L) \subset gl\,(V)$ à l'aide de la représentation exacte π, nous obtenons $(\text{ad}\, x)\, y = xy - yx$ pour tous les $x, y \in \pi\,(L)$. Ceci nous permet de conclure, à l'aide de la formule suivante, facilement démontrable par récurrence,

$$(\text{ad}\, x)^n(y) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C_n^p x^p y x^{n-p}$$

que si $x^q = 0$, alors $(\text{ad}\, x)^{2q} = 0$. Ainsi les opérateurs $\text{ad}\,(x)$, $x \in L$, sont également nilpotents. Alors les opérateurs $\rho\,(x)$, $x \in M$, sont aussi nilpotents en tant qu'opérateurs quotients d'opérateurs nilpotents. Puisque $\dim M < \dim L$, on peut procéder par récurrence. Soit S un sous-espace unidimensionnel dans L/M, annulé par les opérateurs $\rho\,(x)$, $x \in M$. Soit T l'image inverse du sous-espace S par l'application canonique de L sur L/M. Il est évident que $\dim T = \dim M + 1$, avec par ailleurs $[M, T] \subset M$. Ainsi, T est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L telle que M forme dans T un idéal de codimension 1. Jusqu'ici la sous-algèbre M était une sous-algèbre propre quelconque de L. Supposons maintenant que M est une sous-algèbre maximale de L différente de L (l'existence d'une telle sous-algèbre se déduit facilement du fait que L est de dimension finie). La sous-algèbre T définie par le raisonnement précédent contient M en tant que sous-algèbre propre. Le fait que M est maximale entraîne $T = L$. Par conséquent, M est un idéal de L de codimension 1 dans L.

c) Soit y un élément de $L \setminus M$, où M est un idéal de codimension 1 dans L. Alors l'algèbre L est engendrée par l'idéal M et l'élément y. Soit $W \subset V$ le sous-espace des vecteurs V annulés par tous les opérateurs $\pi\,(x)$, $x \in M$. Par hypothèse de récurrence, $W \neq (0)$. Montrons que le sous-espace W est invariant relativement à tous les opérateurs $\pi\,(x)$, $x \in L$. En effet, soient $x \in L$, $h \in M$, $v \in W$. Alors

$$\pi\,(h)\, \pi\,(x)\, v = \pi\,(x)\, \pi\,(h)\, v + \pi\,([h, x])\, v = 0, \qquad (2.1.1)$$

puisque M est un idéal. $h \in M$ étant arbitraire, la relation (2.1.1) implique que $\pi(x)v$ est contenu dans W. En particulier, W est invariant relativement à $\pi(y)$. D'autre part, $\pi(y)$ est nilpotent, ce qui veut dire qu'il existe un vecteur non nul $v_0 \in W$ annulé par l'opérateur $\pi(y)$. Alors ce vecteur v_0 sera annulé par tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, ce qui démontre le théorème 2.

COROLLAIRE 1. *Soit L une algèbre de Lie telle que tous les opérateurs* ad x, $x \in L$, *sont nilpotents. Alors le centre Z de l'algèbre de Lie L est non nul.*

Démonstration. Appliquons le théorème 2 à l'homomorphisme $x \to \text{ad}\, x$ de l'algèbre de Lie L dans $gl(L)$. L'élément non nul $x \in L$ annulé par tous les opérateurs ad x est contenu dans Z. Par conséquent, $Z \neq (0)$.

COROLLAIRE 2. *Soit L une algèbre de Lie telle que tous les opérateurs* ad x, $x \in L$, *sont nilpotents. Il existe alors une chaîne d'idéaux*

$$L = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n = (0), \qquad (2.1.2)$$

telle que A_i/A_{i+1} est contenu dans le centre de l'algèbre L/A_{i+1}.

On démontre cette assertion en appliquant successivement le corollaire 1 aux algèbres de Lie L, L/Z (les opérateurs ad y, $y \in L/Z$, sont les opérateurs quotients d'opérateurs nilpotents et sont donc nilpotents), etc. En particulier, on peut prendre $A_{n-1} = Z$.

COROLLAIRE 3. *Soit π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2. Il existe un entier positif q tel que le produit de q opérateurs quelconques $\pi(x)$, $x \in L$, est nul.*

Démonstration. Considérons le sous-espace $W_0 \subset W$ constitué par les vecteurs annulés par tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$. Nous savons que $W_0 \neq (0)$. Si $W_0 \neq V$, posons $V_1 = V/W_0$. Les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, induisent un homomorphisme π_1 de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V_1)$ et π_1 vérifie les hypothèses du théorème 2. Soit $W_1' \subset V_1$ le sous-espace constitué par les vecteurs annulés par tous les opérateurs $\pi_1(x)$, $x \in L$. Soit W_1 l'image inverse de W_1' par l'application canonique de V sur V_1. Il est évident que W_1 est un sous-espace invariant relativement à tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$. Puisque $W_1' \neq (0)$, on a $W_1 \neq W_0$. Si $W_1 \neq V$, nous posons $V_2 = V/W_1$, etc. Ainsi on peut définir par récurrence les sous-espaces W_i, $i = 1, 2, \ldots$, l'espace W_{i+1} étant constitué par tous les vecteurs $v \in V$ pour lesquels $\pi(x)v \in W_i$ quel que soit $x \in L$. En vertu du théorème 2, $W_i \neq V$ implique $W_i \neq W_{i+1}$. Puisque le sous-espace V est de dimension finie, on a pour un certain entier positif p l'égalité $W_p = V$. Alors pour tous

les $x_0, x_1, \ldots, x_p \in L$ on a

$$\pi(x_0)\ldots\pi(x_p)W_p \subset \pi(x_0)\ldots\pi(x_{p-1})W_{p-1} \subset \ldots \subset \pi(x_0)W_0 \subset (0),$$

ce qui démontre le corollaire 3.

Démonstration du théorème 1. Supposons que tous les opérateurs ad (x), $x \in L$, sont nilpotents. Alors, en vertu du corollaire 3, il existe un entier positif q tel que le produit de q opérateurs quelconques ad x, $x \in L$, est nul. Considérons la série centrale décroissante de l'algèbre de Lie L. Puisque $[L, L_n] = L_{n+1}$, on a $L_{q+1} = (0)$. Réciproquement, si $L_{q+1} = (0)$, alors il découle immédiatement de la définition de ad (x) et des idéaux L_i que $(\text{ad}(x))^q = 0$ pour chaque $x \in L$.

Le théorème 1 est un critère de nilpotence d'une algèbre de Lie L. Le théorème 2 s'appelle *théorème d'Engel*.

2.2. Quelques propriétés des algèbres de Lie résolubles.

I. *Une algèbre de Lie L est résoluble si et seulement s'il existe une suite décroissante de sous-algèbres de Lie*

$$L = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_m \supset M_{m+1} = (0),$$

où M_{k+1} est un idéal de M_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$ et l'algèbre quotient M_k/M_{k+1} est commutative.

Démonstration. L'algèbre quotient $L^{(k)}/L^{(k+1)}$ est commutative (voir V de 1.6), et $L^{(k+1)}$ est un idéal de $L^{(k)}$ (voir I de 1.6). Par conséquent, si L est résoluble, on peut prendre $M_k = L^{(k)}$. Réciproquement, supposons que L est une algèbre de Lie, et qu'il existe une famille de sous-algèbres de Lie vérifiant l'hypothèse de la proposition I; alors on déduit de la commutativité des algèbres quotients M_k/M_{k+1} que $[M_k, M_k] \subset M_{k+1}$; d'où l'on obtient par récurrence que $L^{(k)} \subset M_k$ pour tous les $k = 1, \ldots, m+1$. Puisque $M_{m+1} = (0)$, on a $L^{(m+1)} = (0)$, i.e. l'algèbre de Lie L est résoluble.

II. *Si L est une algèbre de Lie, M un idéal de L et les algèbres de Lie M et L/M sont résolubles, alors L est résoluble.*

Démonstration. Soient $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p \supset M_{p+1} = (0)$ et $L/M = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_q \supset N_{q+1} = (0)$ des suites de sous-algèbres qui vérifient les hypothèses de la proposition I. Soit $\widetilde{M}_k$ l'image inverse de N_k dans L $(k = 0, \ldots, q+1)$; alors $\widetilde{M}_{q+1} = M = M_0$, $\widetilde{M}_{k+1}$ est un idéal de $\widetilde{M}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant q)$, tandis que l'algèbre quotient $\widetilde{M}_k/\widetilde{M}_{k+1}$ est un isomorphe à N_k/N_{k+1} et donc commutative. Par conséquent, la suite de sous-algèbres

$$L = \widetilde{M}_0 \supset \widetilde{M}_1 \supset \ldots \supset \widetilde{M}_{q+1} \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p \supset M_{p+1} = (0)$$

satisfait aux hypothèses de la proposition I et donc L est une algèbre de Lie résoluble.

2.3. Théorème de Lie.

THÉORÈME. *Soit* π *une représentation linéaire irréductible de l'algèbre de Lie résoluble* L *dans l'espace vectoriel complexe* $V \neq (0)$. *Alors* $\dim V = 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'espace V contient un vecteur propre relativement à tous les opérateurs de la représentation π. Si $\dim L = 1$, alors l'assertion se déduit du théorème d'existence de vecteurs propres pour les opérateurs linéaires des espaces linéaires complexes. Démontrons le théorème par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie L.

Soit $\dim L > 1$. Considérons un sous-espace linéaire $M \subset L$ de codimension 1 tel que $M \supset L^{(1)}$. (Puisque L est résoluble, on a $L^{(1)} \neq L$; par conséquent, un tel sous-espace M existe). Alors $[L, M] \subset [L, L] = L^{(1)} \subset M$; par conséquent, M est un idéal de L de codimension 1. Soit $y_0 \notin M$; alors y_0 et M engendrent l'espace vectoriel L. Par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur non nul $v_0 \in V$ tel que $\pi(x) v_0 = \lambda(x) v_0$ pour tous les $x \in M$, où les $\lambda(x)$ sont des nombres. Il est évident que λ est une fonctionnelle linéaire sur M. Soit $(\pi(y_0))^n v_0 = v_n$. Puisque V est de dimension finie, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que les vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants tandis que les vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}$ sont linéairement dépendants. Considérons le sous-espace $W \subset V$ engendré par les vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_p$. Par construction du nombre p, le sous-espace W est invariant relativement à l'opérateur $\pi(y_0)$. Démontrons que W est invariant aussi relativement aux opérateurs de la forme $\pi(h)$, $h \in M$. Montrons pour cela, par récurrence sur q, que le vecteur $\pi(h) v_q$ diffère de $\lambda(h) v_q$ d'une combinaison linéaire des vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ pour tous les $h \in M$. Si $q = 0$, cette dernière assertion est satisfaite par hypothèse. Mais si elle est satisfaite pour un certain entier $q \geqslant 0$, alors

$$\pi(h) v_{q+1} = \pi(h)\pi(y_0) v_q = [\pi(h), \pi(y_0)] v_q + \\ + \pi(y_0)\pi(h) v_q = \pi([h, y_0]) v_q + \pi(y_0)\pi(h) v_q.$$

Or M est un idéal, donc $[h, y_0] \in M$ et, par hypothèse de récurrence, $\pi([h, y_0]) v_q$ est une combinaison linéaire de $v_0, \ldots, v_q$. En outre, $\pi(h) v_q$ diffère de $\lambda(h) v_q$ d'une combinaison linéaire de $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ (par hypothèse de récurrence) donc $\pi(y_0)\pi(h) v_q$ diffère de $\pi(y_0)(\lambda(h) v_q) = \lambda(h)\pi(y_0) v_q = \lambda(h) v_{q+1}$ par une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_q$ ce qui termine la démonstration de l'invariance du sous-espace W relativement aux $\pi(h)$, $h \in M$. Comme W est invariant aussi relativement à $\pi(y_0)$, on en déduit que W est invariant relativement à $\pi(L)$.

Soit $\mathrm{tr}_W(x)$ la trace de la restriction de l'opérateur $\pi(x)$, $x \in L$, au sous-espace W. Si $h \in M$, alors on peut tirer du fait que $\pi(h) v_q$ est représentable sous forme de somme des $\lambda(h) v_q$ et d'une combi-

naison linéaire des vecteurs $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ que $\mathrm{tr}_W(h) = \lambda(h) \dim W$. D'autre part, la trace de tout commutateur étant nulle, on a $\mathrm{tr}_W(h) = 0$ pour tous les $h \in L^{(1)}$, i.e. $\lambda(h) = 0$ pour $h \in L^{(1)}$. Montrons que $\pi(h) v_q = \lambda(h) v_q$ quel que soit $h \in M$. En effet, pour $q = 0$ cette formule est vraie par hypothèse, tandis que si elle est vérifiée pour un certain q, alors

$$\pi(h) v_{q+1} = \pi(h) \pi(y_0) v_q = \pi([h, y_0]) v_q + \pi(y_0) \pi(h) v_q = \\ = \lambda([h, y_0]) v_q + \pi(y_0) \lambda(h) v_q = \lambda(h) v_{q+1},$$

vu que $\lambda([h, y_0]) = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi chaque vecteur de l'espace W est un vecteur propre relativement à tous les opérateurs $\pi(h)$, $h \in M$. Supposons que $w \in W$ est un vecteur propre pour l'opérateur $\pi(y_0)$; alors w est un vecteur propre commun à tous les opérateurs de $\pi(L)$.

COROLLAIRE 1. *Une algèbre de Lie L est résoluble si et seulement si son algèbre de Lie dérivée $L^{(1)}$ est nilpotente.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit L une algèbre de Lie complexe. On vérifie facilement (voir (1.6.2)) que $L^{(k)} \subset (L^{(1)})_{k-1}$ pour tous les $k = 1, 2, \ldots$, donc de la nilpotence de l'algèbre $L^{(1)}$ on tire la résolubilité de l'algèbre L.

Réciproquement, supposons que l'algèbre de Lie L est résoluble. Il découle de la démonstration du théorème de Lie que les éléments $h \in L^{(1)}$ de toute représentation linéaire sont transformés en les opérateurs nilpotents. En particulier, ceci se rapporte également à la représentation adjointe. D'où l'on tire, à l'aide du théorème 1 de 2.2, que l'algèbre de Lie $L^{(1)}$ est nilpotente.

Si L est une algèbre de Lie réelle, alors l'assertion du corollaire 1 reste valable, comme on le voit facilement en passant aux enveloppes complexes des algèbres de Lie considérées. Les détails sont laissés au lecteur.

COROLLAIRE 2. *Soient L une algèbre de Lie, et π une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace linéaire complexe V. On peut alors choisir dans l'espace V une base telle que tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, aient des matrices trigonales supérieures relativement à cette base.*

La démonstration est fondée sur celle du théorème 1: les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, sur le sous-espace invariant W s'écrivent relativement à la base $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ à l'aide de matrices triangulaires (a_{ij}); $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. L'assertion du corollaire 2 s'en obtient en passant à l'espace quotient V/W, etc.

2.4. Structure des représentations linéaires des algèbres de Lie nilpotentes. Soient L une algèbre de Lie, et π une représentation linéaire de l'algèbre de Lie L dans l'espace V. La fonction λ sur l'algèbre de Lie L s'appelle *poids* de la représentation π s'il existe

un vecteur non nul $v \in V$ tel que $\pi(x) v = \lambda(x) v$ quel que soit $x \in L$. Il est évident qu'un poids est toujours une fonctionnelle linéaire sur L.

I. *Si L est une algèbre de Lie résoluble, alors chaque représentation de l'algèbre de Lie L dans un espace vectoriel non nul possède au moins un poids.*

La démonstration se réduit à une application du théorème de Lie.

Soient L une algèbre de Lie, et π sa représentation linéaire dans l'espace V. Soit λ une fonctionnelle linéaire sur V. Désignons par $V(L, \lambda)$ ou par V^{λ} le sous-espace (de l'espace V) constitué par tous les vecteurs $v \in V$ tels que

$$(\pi(x) - \lambda(x) 1)^n v = 0 \tag{2.4.1}$$

pour un entier $n \geqslant 0$ (qui dépend de v) et pour tous les $x \in L$.

II. *Soit π une représentation linéaire d'une algèbre de Lie nilpotente L dans l'espace V. Alors*

1) *le sous-espace $V(L, \lambda)$ est invariant relativement à $\pi(L)$;*

2) *si $V(L, \lambda) \neq (0)$, alors λ est le poids de la représentation π, et la restriction de π au sous-espace $V(L, \lambda)$ ne possède pas d'autres poids;*

3) *l'espace V est la somme directe des sous-espaces V^{λ}.*

Démonstration. Soient A un opérateur linéaire dans V et μ un nombre. Désignons par $V(A, \mu)$ le sous-espace de l'espace V constitué par les vecteurs $v \in V$ tels que $(A - \mu 1)^n v = 0$ pour un certain $n \geqslant 0$ (qui dépend de v). On déduit de (2.4.1) que $V(L, \lambda) = \bigcap_{x \in L} V(\pi(x), \lambda(x))$, donc pour la démonstration de l'invariance de V^{λ} il suffit de montrer que $V(\pi(x), \lambda(x))$ est invariant relativement à $\pi(L)$ pour tous les $x \in L$. Soient $y \in L$, $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$. Par hypothèse, l'algèbre de Lie L est nilpotente, i.e. il existe un $k \geqslant 0$ tel que $(\operatorname{ad} x)^k y = 0$. Démontrons par récurrence sur k que $\pi(y) v \in V(\pi(x), \lambda(x))$. Pour $k = 0$ cette assertion est évidente. D'autre part,

$$(\pi(x) - \lambda(x)) \pi(y) = \pi(y) (\pi(x) - \lambda(x)) + \pi([x, y]),$$

on a donc l'égalité

$$(\pi(x) - \lambda(x))^n \pi(y) = \pi(y) \pi(x) - \lambda(x))^n + \\ + \sum_{m=0}^{n-1} (\pi(x) - \lambda(x))^{n-m-1} \pi([x, y]) (\pi(x) - \lambda(x))^m \tag{2.4.2}$$

(que l'on vérifie aisément par récurrence sur n). Remarquons maintenant que pour chaque $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$ on a $(\pi(x) - \lambda(x) 1)^{\dim V(\pi(x), \lambda(x))} v = 0$. En effet, l'opérateur $A = \pi(x) - \lambda(x) 1$ est nilpotent par hypothèse dans $V(\pi(x), \lambda(x))$ et si $p = \dim V(\pi(x), \lambda(x))$, le polynôme caractéristique de l'opérateur A dans $V(\pi(x), \lambda(x))$ est égal à λ^p, donc $A^p = 0$ d'après le théorème de Hamilton-Cayley. Posons maintenant $n > 2p$. Appliquons les deux membres de l'égalité (2.4.2) au vecteur $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$, il vient évidemment que $(\pi(x) - \lambda(x) 1)^m v = 0$ pour $m \geqslant p$. D'autre part, $\pi([x, y]) v \in V(\pi(x, \lambda(x))$ car $(\mathrm{ad}\, x)^{k-1} [x, y] = (\mathrm{ad}\, x)^k y = 0$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Si $m < p$, alors $n - m - 1 \geqslant p$, donc en appliquant (2.4.2) au vecteur $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$ on annulera tous les termes du deuxième membre. Par conséquent, $(\pi(x) - \lambda(x) 1)^n \pi(y) v = 0$ pour $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$, $n > 2p$, i.e. $\pi(y) v \in V(\pi(x), \lambda(x))$, ce qui démontre l'invariance de $V(\pi(x), \lambda(x))$ et en même temps celle de $V(L, \lambda)$.

L'assertion 2) découle immédiatement du théorème de Lie. En effet, la restriction de π à $V(L, \lambda)$ possède un poids conformément à I. Si ce poids est μ, alors l'opérateur $\pi(x) - \lambda(x) 1$ est nilpotent dans $V(L, \lambda)$, tandis que $\pi(x) - \mu(x) 1$ possède dans $V(L, \lambda)$ une valeur propre nulle. Donc $\lambda(x) = \mu(x)$ pour tous les $x \in L$.

Montrons maintenant que les sous-espaces V^λ sont linéairement indépendants. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les différents poids de la représentation π. La relation $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$ est valable pour $i \neq j$ sur un certain sous-espace de L de codimension 1 ; il est évident que la réunion finie de tels hyperplans ne peut coïncider avec L, et il existe donc un $x \in L$ tel que $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$ pour $i \neq j$. Lorsque $v_i \in V^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, r$, on a $(\pi(x) - \lambda_i(x))^n v_i = 0$ pour un certain n. En ramenant l'opérateur $\pi(x)$ à sa forme normale de Jordan, nous remarquons que les vecteurs v_i sont situés dans des sous-espaces distincts de racines de l'opérateur $\pi(x)$ et sont donc linéairement indépendants. Ainsi, la somme de tous les sous-espaces $V(L, \lambda)$ est directe.

Démontrons maintenant par récurrence sur la dimension de l'espace V que $V = \Sigma V^\lambda$. Pour $V = (0)$ c'est évident. Supposons que $\dim V > 0$. Si chaque opérateur $\pi(x)$, $x \in L$, possède une seule valeur propre $\lambda(x)$, alors en vertu du théorème de Lie la fonction λ est le poids de la représentation π et $V = V^\lambda$. Mais s'il existe un $x \in L$ tel que l'opérateur $\pi(x)$ possède au moins deux valeurs propres distinctes, alors l'espace V est la somme directe des sous-espaces $V(\pi(x), \lambda_i(x))$, invariants relativement à $\pi(L)$, et dont la dimension est strictement inférieure à $\dim V$ ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi $V = \Sigma V^\lambda$.

§ 3. Radicaux d'une algèbre de Lie

I. *Toute algèbre de Lie L contient un idéal résoluble maximal.*

Démonstration. Soient A et B deux idéaux résolubles de L. Alors la somme de ces idéaux $A + B$ est un idéal de L. Montrons que l'idéal $A + B$ est résoluble. Il est évident que B est un idéal dans $A + B$. En outre, l'algèbre quotient $(A + B)/B$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $A/(A \cap B)$, donc l'algèbre de Lie $A + B$ contient un idéal résoluble B; l'algèbre quotient par cet idéal est isomorphe à l'algèbre quotient d'une algèbre de Lie résoluble; elle est donc résoluble. Ainsi $A + B$ est un idéal résoluble dans L. Puisque l'algèbre de Lie L est de dimension finie, la somme de tous les idéaux résolubles de l'algèbre de Lie coïncide avec la somme d'un nombre fini de ces idéaux; c'est donc un idéal résoluble. Cet idéal est justement l'idéal résoluble maximal de L.

II. *Soient M un idéal de l'algèbre de Lie L, et π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl\,(V)$ dans un espace V de dimension finie. Soit E l'algèbre des opérateurs linéaires dans V engendrée par l'opérateur unité et les opérateurs $\pi\,(x)$, $x \in L$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *pour chaque $x \in M$ l'opérateur $\pi\,(x)$ est nilpotent;*

2) *il existe un idéal bilatère I dans l'algèbre associative E tel que*

   a) *$\pi\,(h) \in I$ pour $h \in M$,*

   b) *l'idéal I est constitué par des opérateurs nilpotents;*

3) *si $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ est la série de Jordan-Hölder pour l'homomorphisme π, alors $\pi\,(M)\,V_k \subset V_{k-1}$ pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Démonstration. Il est évident que 2) implique 1). Si l'on a la condition 3), alors pour chaque $x \in M$

$$(\pi\,(x))^n V = (\pi\,(x))^n V_n = \\ = (\pi\,(x))^{n-1}\pi\,(x)\,V_n \subset (\pi\,(x))^{n-1} V_{n-1} \subset \ldots \\ \ldots \subset \pi\,(x)\,V_1 \subset V_0 = (0),$$

et la condition 1) est donc satisfaite. Réciproquement, supposons satisfaite la condition 1); montrons qu'on a alors les conditions 2) et 3). Soit $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ la série de Jordan-Hölder pour l'homomorphisme π (voir I,1.5). Soit $W_k = V_k/V_{k-1}$. Si $x \in M$ alors l'opérateur $\pi\,(x)$ est nilpotent dans V, donc $\pi\,(x)$ est nilpotent dans V_k. Puisque le sous-espace V_{k-1} est invariant relativement à $\pi\,(x)$ pour tous les $x \in L$, l'opérateur $\pi\,(x)$, $x \in L$, induit un certain opérateur $\rho\,(x)$ dans $W_k = V_k/V_{k-1}$. Pour $x \in M$ l'opérateur $\pi\,(x)\,|_{V_k}$ est nilpotent, donc l'opérateur $\rho\,(x)$, $x \in M$, dans l'espace W_k est également nilpotent. Introduisons le sous-espace

$H \subset W_k$ constitué par les vecteurs $w \in W_k$ tels que $\rho(x) w = 0$ pour tous les $x \in M$. D'après le théorème d'Engel (théorème 2 de 2.1) on a $H \neq (0)$. Montrons que le sous-espace H est invariant relativement à la famille des opérateurs induite par les opérateurs de $\pi(L)$ dans l'espace W_k. En effet, pour tous les $x \in M$, $w \in H$ on a $\rho(x) w = 0$; d'autre part, puisque M est un idéal de l'algèbre de Lie L, on a $[x, y] \in M$ pour $x \in M$, $y \in L$; par conséquent, $\rho(x)\rho(y) w = \rho([x, y]) w + \rho(y)\rho(x) w = 0$ pour tous les $y \in L$. Ainsi pour $w \in H$, $y \in L$ on a $\rho(y) w \in H$. Mais la famille des opérateurs induits par les opérateurs de $\pi(L)$ dans l'espace W_k est irréductible en vertu de la définition de la série de Jordan-Hölder; par conséquent $H = W_k$. Ainsi $\pi(M) V_k \subset V_{k-1}$, i.e. on a la condition 3).

Soit I l'ensemble des éléments T (de l'algèbre associative E) tels que $TV_k \subset V_{k-1}$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$. Il est évident que I est un sous-espace linéaire de E. Remarquons que pour chaque opérateur $S \in E$ on a la relation $SV_k \subset V_k$ (puisque l'algèbre E est engendrée par les opérateurs de $\pi(L)$, tandis que pour chaque $S \in \pi(L)$ la condition $SV_k \subset V_k$ est satisfaite en vertu de définition de la série de Jordan-Hölder). Par conséquent, pour $S \in E$, $T \in I$ on a $STV_k \subset SV_{k-1} \subset V_{k-1}$ et $TSV_k \subset TV_k \subset V_{k-1}$, i.e. $ST \in I$, $TS \in I$. Ainsi I est un idéal bilatère dans l'algèbre associative E. Nous avons déjà démontré que $\pi(M) V_k \subset V_{k-1}$, i.e. $\pi(M) \subset I$. En outre, $T^n V = T^n V_n \subset T^{n-1}(TV_n) \subset T^{n-1} V_{n-1} \subset \ldots$ $\ldots \subset TV_1 \subset V_0 = (0)$ pour tous les $T \in I$, i.e. chaque élément de l'idéal I est un opérateur nilpotent dans l'espace V.

III. *Soit E l'algèbre des opérateurs linéaires sur l'algèbre de Lie L engendrée par les opérateurs* ad x, $x \in L$, *et par l'opérateur unité. Soit* $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = L$ *la série de Jordan-Hölder pour l'homomorphisme* $x \to$ ad x, $x \in L$. *L'ensemble N des éléments $x \in L$ tels que* (ad x) $V_k \subset V_{k-1}$ *pour tous les $k = 1, \ldots, n$ est l'idéal nilpotent maximal de l'algèbre de Lie L.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque (ad y) $V_k \subset V_k$ pour tous les $y \in L$ et que (ad x) $V_k \subset V_{k-1}$ pour tous les $x \in N$, on a (ad x ad y) $V_k \subset V_{k-1}$ et (ad y ad x) $V_k \subset V_{k-1}$, donc ad $([x, y]) V_k \subset$ $\subset V_{k-1}$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$, i.e. $[x, y] \in N$ pour tous les $x \in N$, $y \in L$. Par conséquent, N est un idéal de l'algèbre de Lie L. Il est en outre évident que ad x est nilpotent quel que soit $x \in N$. En vertu du théorème 1 de 2.1 on en tire que N est une algèbre de Lie nilpotente. Si N' est un idéal nilpotent quelconque de l'algèbre de Lie L, alors il existe, pour chaque $n \in N'$, un k tel que $(\text{ad}\, n)^k (N') =$ $= 0$; d'autre part, (ad n) $(L) \subset N'$, de sorte que N' est un idéal de L. D'où l'on obtient que l'opérateur ad n dans l'espace L est nilpotent. D'après la proposition II on a (ad n) $V_k \subset V_{k-1}$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$, i.e. $N' \subset N$.

Le plus grand idéal résoluble de l'algèbre de Lie L s'appelle *radical*. Le plus grand idéal nilpotent s'appelle *nilradical*. Une intersection des noyaux de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie L s'appelle *radical nilpotent*.

Désignons ces trois radicaux par R, N, S respectivement. Notons que l'existence de R et N a été démontrée dans les propositions I et III.

Une algèbre de Lie est dite *semi-simple* si elle ne contient aucun idéal résoluble non nul. Une algèbre de Lie est dite *simple* si elle n'est pas unidimensionnelle et ne contient aucun idéal non trivial.

IV. *Toute algèbre de Lie simple est semi-simple.*

Démonstration. Si l'algèbre de Lie simple L n'est pas semi-simple, elle contient un idéal résoluble non nul qui coïncide avec L puisque L est simple. Par conséquent, L est résoluble. Mais d'après la démonstration du théorème de Lie dans 2.3, chaque algèbre résoluble contient un idéal de codimension 1 ; ceci est contraire à la simplicité de l'algèbre de Lie L vu que $\dim L > 1$.

V. *Le radical R d'une algèbre de Lie L est le plus petit parmi les idéaux A pour lesquels l'algèbre quotient L/A est semi-simple.*

Démonstration. Soit A un idéal de L et supposons que L/A est semi-simple. Alors l'image de R par l'homomorphisme canonique de L sur L/A est un idéal résoluble dans L/A ; cet idéal doit être égal à zéro puisque L/A est semi-simple, et $R \subset A$. D'autre part, l'algèbre de Lie L/R ne contient aucun idéal résoluble non nul. En effet, si R'/R est un idéal résoluble non nul dans L/R, alors l'idéal R' dans l'algèbre de Lie R est une algèbre résoluble (puisque R et R'/R sont résolubles) ; ainsi $R' \subset R$, i.e. $R' = R$. Par conséquent, L/R est une algèbre de Lie semi-simple.

Notons une très importante propriété des dérivations d'une algèbre de Lie.

VI. *Chaque dérivation d'une algèbre de Lie L applique R dans N.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que chaque dérivation d de l'algèbre de Lie L applique R dans R. En effet, d est un opérateur linéaire dans l'espace L ; envisageons la transformation linéaire $A_t = e^{td} = 1 + td + \frac{t^2}{2!} d^2 + \ldots$, $t \in \mathbf{R}$. Comme chaque transformation linéaire d'un espace de dimension finie est continue, la fonction $\varphi(t) = [A_t x, A_t y] - A_t [x, y]$ est analytique relativement à t, $t \in \mathbf{R}$. Mais $(d/dt) A_t = dA_t$, d'où

$$\varphi'(t) = [dA_t x, A_t y] + [A_t x, dA_t y] - dA_t [x, y] = d\varphi(t),$$

donc $\varphi^{(n)}(t) = d^{(n)}\varphi(t)$. Mais $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi^{(n)}(0) = 0$ pour tous les $n \geqslant 1$, i.e. $\varphi(t) \equiv 0$. Ainsi $[A_t x, A_t y] = A_t [x, y]$ pour tous les $t \in \mathbf{R}$. Puisque $e^{td} e^{-td} = 1_L$, la transformation A est bijec-

tive. Par conséquent, A_t est un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur elle-même, A_t applique un idéal dans un idéal et un idéal résoluble dans un idéal résoluble. Mais R est le plus petit idéal résoluble, donc $A_tR \subset R$, i.e. $A_tx \in R$ pour $x \in R$. Alors $dx = (d/dt)\,(A_tx)_{t=0} \in R$ pour $x \in R$, i.e. $dR \subset R$.

Soit maintenant D l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie L. Soit Q le produit direct des espaces vectoriels D et L. Définissons dans Q l'opération $[(d, x), (d', x') = ([d, d'], dx' - d'x + [x, x'])$ pour $d, d' \in D$, $x, x' \in L$. Alors Q est une algèbre de Lie, L est isomorphe à l'idéal $\widetilde{L} = \{(0, x), x \in L\}$ dans l'algèbre de Lie Q, D est isomorphe à la sous-algèbre de Lie $\widetilde{D} = \{(d, 0), d \in D\}$ dans Q. Si $d \in D$, $x \in L$, alors $[(d, 0), (0, x)] = [0, dx]$ dans Q. Comme $dx \in R$ pour tous les $x \in R$, $\widetilde{R} = \{(0, x), x \in R\}$ est un idéal de l'algèbre de Lie Q, et $\widetilde{R}$ est résoluble. Considérons l'idéal $I = [Q, \widetilde{R}]$ dans l'algèbre de Lie Q. Montrons que l'idéal I est nilpotent.

En passant éventuellement aux complexifications des algèbres considérées L, R, N, D, Q, nous pouvons supposer que ces algèbres de Lie sont complexes. Soit $\widetilde{R}_1$ une sous-algèbre résoluble de l'algèbre de Lie Q. Soit π la restriction à $\widetilde{R}_1$ de l'homomorphisme $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in Q$, et soit $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = Q$ la série de Jordan-Hölder pour l'homomorphisme π de la sous-algèbre de Lie $\widetilde{R}_1$ dans l'algèbre de Lie $gl\,(Q)$. Conformément au théorème de Lie (voir 2.3), chacun des sous-espaces V_k/V_{k-1}, $k = 1, \ldots, n$, est unidimensionnel. Soit $h_k\,(x)$ la fonctionnelle linéaire sur $\widetilde{R}_1$ déterminée par l'homomorphisme π dans l'espace quotient V_k/V_{k-1}. L'ensemble $M = \{x \in \widetilde{R}_1, h_k\,(x) = 0$ pour tous les $k = 1, \ldots, n\}$ est un idéal de $\widetilde{R}_1$, puisque l'espace linéaire $M \subset \widetilde{R}_1$ contient évidemment $[\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_1]$. De la définition de l'idéal M il découle immédiatement que l'opérateur $\pi\,(x)$ est nilpotent quel que soit $x \in M$.

Choisissons maintenant de manière spéciale l'algèbre de Lie résoluble $\widetilde{R}_1$. A savoir, soit y un élément de l'algèbre de Lie Q et soit $\widetilde{R}_1$ la sous-algèbre de Lie dans Q engendrée par $\widetilde{R}$ et par l'élément y. Comme $\widetilde{R}$ est un idéal de Q, il sera un idéal de $\widetilde{R}_1$. Ensuite $\widetilde{R}$ étant un idéal résoluble et l'algèbre quotient $\widetilde{R}_1/\widetilde{R}$ commutative, $\widetilde{R}_1$ est une algèbre de Lie résoluble en vertu de II de 2.2. Appliquons à $\widetilde{R}_1$ la construction précédente; soit M l'idéal correspondant dans l'algèbre de Lie $\widetilde{R}_1$. Il est évident que $[y, \widetilde{R}] \subset [\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_1] \subset M$; ainsi l'ensemble $[y, \widetilde{R}]$ est contenu dans l'ensemble de tous les éléments $z \in Q$ tels que l'opérateur $\pi\,(z)$ est nilpotent. La proposition II implique alors que l'idéal $I = [Q, \widetilde{R}]$ est un idéal nilpotent de l'algèbre de Lie Q.

Soit $\widetilde{N} = \{(0, n), n \in N\}$. Puisque $[Q, \widetilde{R}] \subset [Q, \widetilde{L}] \subset \widetilde{L}$, l'idéal $I = [Q, \widetilde{R}]$ est un idéal nilpotent de $\widetilde{L}$. Par conséquent, $[Q, \widetilde{R}] \subset \widetilde{N}$. En particulier, chaque dérivation d de l'algèbre de Lie L applique R dans N.

§ 4. Théorie des répliques

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie, et V^* l'adjoint de V. Désignons par $V_{r,s}$ le produit tensoriel de r copies de l'espace V et de s copies de l'espace V^*. La représentation linéaire $x \to x$ de l'algèbre de Lie $gl(V)$ dans l'espace V détermine une représentation de l'algèbre de Lie $gl(V)$ dans l'espace $V_{r,s}$, à savoir le produit tensoriel de r copies de la représentation $x \to x$ dans l'espace V et de s copies de la représentation $x \to -x^*$ dans l'espace V^*. L'image de l'opérateur $x \in gl(V)$ par cette représentation sera désignée par $x_{r,s}$. En outre, posons $V_{0,0} = C$ et $x_{0,0} = 0$. Comme nous l'avons vu dans 1.3 (voir (1.3.6)), la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $gl(V)$ est équivalente à la représentation $x \to x_{1,1}$ pour l'application canonique τ de l'espace $V \otimes V^*$ sur $L(V)$.

L'élément $x' \in gl(V)$ s'appelle *réplique* de l'opérateur $x \in gl(V)$ si le noyau de l'opérateur $x_{r,s}$ est contenu dans le noyau de l'opérateur $x'_{r,s}$ quels que soient les entiers r, s non négatifs.

I. *Si x' est une réplique de x, et x'' une réplique de x', alors x'' est une réplique de x.*

Cette assertion est évidente.

II. *Si x' est une réplique de x, alors $x'_{r,s}$ est une réplique de $x_{r,s}$.*

Démonstration. On voit facilement que l'espace $(V_{r,s})_{r',s'}$ est canoniquement isomorphe à l'espace $V_{rr'+ss',rs'+sr'}$. En outre, cet isomorphisme canonique, désignons-le par ζ, possède cette propriété que pour chaque opérateur linéaire x dans V on a l'égalité

$$\zeta \circ (x_{r,s})_{r',s'} \circ \zeta^{-1} = x_{rr'+ss',\, rs'+r's},$$

d'où l'on tire l'assertion II.

Rappelons maintenant une proposition qu'on formule dans la théorie des matrices.

III. *Soit x une transformation linéaire de l'espace V. Chaque transformation linéaire y, permutable à toutes les transformations permutables avec x, se met sous la forme $y = p(x)$, où p est un certain polynôme à coefficients complexes.*

On démontre cette assertion en amenant la transformation x à sa forme normale de Jordan. Une démonstration détaillée est exposée dans le livre de F. Gantmacher [1].

IV. *L'opérateur x' est une réplique de l'opérateur x si et seulement si pour chaque couple (r, s) l'opérateur $x'_{r,s}$ se met sous forme de polynôme en $x_{r,s}$ sans terme constant.*

D é m o n s t r a t i o n. *Si* $x'_{r,s}$ est un polynôme en $x_{r,s}$ sans terme constant, le noyau de $x_{r,s}$ est contenu dans le noyau de $x'_{r,s}$ pour tous les (r, s), i.e. x' est une réplique de x. Réciproquement, soit x' une réplique de x. Supposons que y est permutable avec x, i.e. $(\mathrm{ad}\, x)\, y = [x, y] = 0$. En remarquant qu'il y a isomorphisme entre la représentation adjointe et la représentation $x \to x_{1,1}$, nous concluons que $x_{1,1}(y) = 0$. Puisque x' est une réplique de x, on a $x'_{1,1}(y) = 0$, i.e. $(\mathrm{ad}\, x')\, y = 0$ et x' permute avec y. D'après la proposition III, nous avons $x' = p(x)$, où p est un certain polynôme. Montrons que l'on peut choisir le polynôme p de manière à avoir $p(0) = 0$. Cela est évident si l'opérateur x est inversible. En effet, si x est inversible, alors $\det x \neq 0$ et le terme constant $q(0)$ du polynôme caractéristique q n'est pas nul. D'après le théorème de Hamilton-Cayley $q(x) = 0$, i.e. $q(0)\, 1_V = -q(x) + q(0)\, 1_V = q_1(x)$, où $q(0) \neq 0$ et le terme constant du polynôme q_1 est nul. Alors le terme constant du polynôme $p(x)$ peut être remplacé par un polynôme multiple de q_1. Supposons maintenant que x n'est pas inversible. Alors $xv = 0$ pour un vecteur non nul $v \in V$. Puisque $x'v = p(x)\, v = 0$ et $p(x)\, v = p(0)\, v$, on a $p(0)\, v = 0$, par conséquent, $p(0) = 0$. Ainsi, si x' est une réplique de x, alors $x' = p(x)$, où p n'a pas de termes constants. Mais $x'_{r,s}$ est la réplique de $x_{r,s}$ d'après la proposition II, donc $x'_{r,s} = p_{r,s}(x_{r,s})$, où $p_{r,s}(0) = 0$. La proposition IV est démontrée.

Rappelons encore une assertion de la théorie des matrices.

V. *Chaque opérateur linéaire x dans l'espace V peut être représenté uniquement sous la forme $x = y + z$, où y et z sont permutables, z est nilpotent, tandis que y se ramène à la forme diagonale dans une certaine base. Les opérateurs y et z sont des polynômes en x, et les noyaux des opérateurs y et z contiennent le noyau de l'opérateur x.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de l'espace V telle que la matrice (a_{ij}) de l'opérateur x dans cette base est de forme normale de Jordan. Soit y un opérateur dans V, donné dans la base $e_1, \ldots, e_n$ par la matrice (b_{ij}) telle que $a_{ii} = b_{ii}$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$; $b_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Soit $z = x - y$. Il est évident que z est nilpotent et que y et z sont permutables. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ la famille complète des valeurs propres, deux à deux distinctes, de l'opérateur x. Soit V_i $(i = 1, \ldots, k)$ le sous-espace des racines de l'opérateur x qui correspond à la valeur propre λ_i, i.e. le sous-espace engendré par les vecteurs propres et les vecteurs adjoints de l'opérateur x associés à la valeur propre λ_i. Alors V_i est le noyau de l'opérateur $(x - \lambda_i 1)^n$. Soit $x_1 = (x - \lambda_2 1)^n \ldots (x - \lambda_k 1)^n$. Le sous-espace $V_2 \dot{+} \ldots \dot{+} V_k$ est le noyau de l'opérateur x_1, tandis que le sous-espace V_1 est invariant relativement à x_1, la restriction de x_1 à V_1 étant non dégénérée. En appliquant à cette restriction le théorème de Hamilton-Cayley, nous voyons que l'opé-

rateur E_1 qui projette V sur V_1 parallèlement à $V_2 \dot{+} \ldots \dot{+} V_k$ est un polynôme en x_1, i.e. un polynôme en x. En définissant d'une manière analogue $E_2, \ldots, E_k$ et en remarquant que

$$y = \lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_k E_k,$$

nous voyons que y est un polynôme en x et donc z est aussi un polynôme en x. L'assertion concernant les noyaux de x, y et z découle immédiatement de la définition de y et z. Démontrons l'unicité de la décomposition $x = y + z$ aux propriétés indiquées. En effet, soit $x = y_1 + z_1$, où y_1 et z_1 sont permutables, z_1 est nilpotent tandis que y_1 se ramène à la forme diagonale. Alors y_1 et z_1 sont permutables avec x, donc y_1 et z_1 sont permutables avec les polynômes en x. En particulier, y commute avec y_1, z commute avec z_1. D'autre part, la relation $y + z = y_1 + z_1$ implique que $y - y_1 = z_1 - z$. Du fait que y_1 et y sont diagonalisables et permutables il vient que $y - y_1$ est diagonalisable. Puisque z_1 et z sont nilpotents et permutables, $z_1 - z$ est nilpotent. Mais une matrice nilpotente diagonale est nécessairement nulle, donc $y - y_1 = z_1 - z = 0$.

Soit $x = y + z$ la décomposition de l'opérateur x définie dans la proposition V. Les opérateurs y et z s'appellent respectivement partie *semi-simple* et partie *nilpotente* de l'opérateur x.

VI. *Soit x un opérateur dans V, et soient y et z les parties semi-simple et nilpotente respectivement de l'opérateur x. Alors $y_{r,s}$ et $z_{r,s}$ sont respectivement les parties semi-simple et nilpotente de l'opérateur $x_{r,s}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque y est diagonalisable, $y_{r,s}$ l'est aussi. En outre, $z_{r,s}$ est évidemment nilpotent. Comme $x \to x_{r,s}$ est une représentation de l'algèbre de Lie $gl(V)$, on a $[y_{r,s}, z_{r,s}] = [y, z]_{r,s} = 0$. Enfin, $x_{r,s} = y_{r,s} + z_{r,s}$ et l'assertion de la proposition VI découle de l'unicité de la décomposition en parties semi-simple et nilpotente.

VII. *Les parties semi-simple et nilpotente d'un opérateur sont ses répliques.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x = y + z$ la décomposition de x en parties semi-simple et nilpotente. Conformément à la proposition VI, l'égalité $x_{r,s} = y_{r,s} + z_{r,s}$ est la décomposition de $x_{r,s}$ en parties semi-simple et nilpotente, tandis que selon la dernière assertion de la proposition V les noyaux des composantes $y_{r,s}$ et $z_{r,s}$ contiennent le noyau de $x_{r,s}$, i.e. y et z sont des répliques de x.

THÉORÈME. *L'opérateur x dans V est nilpotent si et seulement si* $\mathrm{tr}\,(xx') = 0$ *pour toute réplique x' de x.*

D é m o n s t r a t i o n. Si l'opérateur x est nilpotent et x' est une réplique de x, alors x' commute avec x (voir proposition IV).

Par conséquent, l'opérateur xx' est également nilpotent, donc xx' possède une trace nulle.

Réciproquement, supposons que l'hypothèse du théorème est vérifiée, et soit $x = y + z$ la décomposition de l'opérateur x en parties semi-simple et nilpotente. Nous devons démontrer que $y = 0$. En vertu de la proposition VII, l'opérateur y est une réplique de l'opérateur x. Par conséquent, (voir I) chaque réplique y' de l'opérateur y est aussi une réplique de l'opérateur x, d'où l'on tire que y' commute avec z, de sorte que l'opérateur $y'z$ est nilpotent et $\operatorname{tr}(y'z) = 0$. D'autre part, d'après l'hypothèse du théorème, on a $\operatorname{tr}(y'x) = 0$, de sorte que $\operatorname{tr}(y'y) = 0$. Ainsi, il ne reste qu'à démontrer l'assertion suivante : si y est un opérateur diagonalisable et $\operatorname{tr}(y'y) = 0$ pour toute réplique y' de y, alors $y = 0$. Supposons que cette assertion est fausse. Soit y un opérateur non nul diagonalisable, et soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de V telle que $ye_i = \lambda_i e_i$. Si y' est une réplique de y, alors y' est aussi diagonal dans la base $e_1, \ldots, e_n$ (ce qui découle, par exemple, de la proposition IV). L'opérateur $y_{r,s}$ est diagonal dans la base de l'espace $V_{r,s}$ constituée par les vecteurs de la forme $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}$, où $\{e^*_j\}$ est la base de l'espace V^*, biorthogonale à la base $\{e_i\}$ de l'espace V. La valeur propre de l'opérateur $y_{r,s}$ associée au vecteur $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}$ est évidemment égale à $\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_r} - \lambda_{j_1} - \ldots - \lambda_{j_s}$. Le noyau de l'opérateur $y_{r,s}$ est le sous-espace engendré par tous les vecteurs de la base pour lesquels

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} - \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j_s} = 0. \qquad (4.1.1)$$

Si $y'e_i = \mu_i e_i$ et chaque relation de la forme (4.1.1) implique la relation correspondante pour les nombres $\mu_1, \ldots, \mu_n$, alors le noyau de $y'_{r,s}$ contient le noyau de $y_{r,s}$, i.e. y' est une réplique de l'opérateur y.

Supposons que $\operatorname{tr}(yy') = 0$ et $y \neq 0$. Les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ engendrent alors un sous-espace non nul $P \subset \mathbf{C}$ sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Soit h une application $\mathbf{Q}$-linéaire non nulle de l'espace linéaire P sur le corps $\mathbf{Q}$ dans le corps $\mathbf{Q}$. Soit $\mu_i = h(\lambda_i)$. Alors chaque relation linéaire à coefficients entiers entre les nombres λ_i, en particulier, une relation de la forme (4.1.1), implique la relation correspondante entre les nombres μ_i, donc tout opérateur y' qui vérifie $y'e_i = h(\lambda_i)\, e_i$ est une réplique de l'opérateur y. Par conséquent, $0 = \operatorname{tr}(yy') = \sum \lambda_i h(\lambda_i)$. Puisque l'application h est $\mathbf{Q}$-linéaire et $h(\lambda_i) \in \mathbf{Q}$, on a $\sum h(\lambda_i h(\lambda_i)) = \sum h(\lambda_i)^2 = 0$, i.e. $h(\lambda_i) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse que h est une application non nulle. La contradiction obtenue démontre le théorème.

VIII. *Soit A une algèbre de dimension finie (en général, non associative). Si D est une dérivation de l'algèbre A et D' une réplique de l'opérateur D, alors D' est une dérivation de l'algèbre A.*

Démonstration. La multiplication dans l'algèbre A définit une application bilinéaire de l'espace $A \times A$ dans A. Mais l'espace des applications bilinéaires de $A \times A$ dans A s'identifie canoniquement avec l'espace $A_{1,2}$. Soit μ un élément de l'espace $A_{1,2}$ défini par l'opération de multiplication dans A pour cet isomorphisme canonique. Soit x un opérateur linéaire dans A. Alors

$$x_{1,2}\mu = x\mu - \mu(1 \otimes x + x \otimes 1),$$

i.e.

$$x_{1,2}\mu(a \otimes b) = x\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes xb + xa \otimes b) = x(ab) - a(xb) - (xa)b$$

pour tous les a, $b \in A$. Par conséquent, l'opérateur x est une dérivation de A si et seulement si $x_{1,2}\mu = 0$, i.e. μ appartient au noyau de l'opérateur $x_{1,2}$. Si x' est une réplique de l'opérateur x, alors l'égalité $x_{1,2}\mu = 0$ implique $x'_{1,2}\mu = 0$, donc x' est également une dérivation de A.

§ 5. Forme de Killing. Critère de résolubilité et de semi-simplicité d'une algèbre de Lie

5.1. Définition de la forme de Killing. Soient L une algèbre de Lie et π_1, π_2 des homomorphismes de l'algèbre de Lie L dans les algèbres de Lie $gl(V_1)$ et $gl(V_2)$ respectivement. La forme bilinéaire B sur $V_1 \times V_2$ est dite *invariante* (relativement à π_1 et π_2) si

$$B(\pi_1(x)v_1, v_2) + B(v_1, \pi_2(x)v_2) = 0 \qquad (5.1.1)$$

pour tous les $x \in L$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

I. *Soit π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$. Posons $B_\pi(x, y) = \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y))$ pour tous les x, $y \in L$. La forme bilinéaire B_π sur $L \times L$ est symétrique et invariante relativement à l'homomorphisme adjoint $x \to \mathrm{ad}\, x$.*

Démonstration. La forme B_π est symétrique en vertu de la relation $\mathrm{tr}(\alpha\beta) = \mathrm{tr}(\beta\alpha)$. Démontrons son invariance, i.e. montrons que l'expression

$$\mathrm{tr}(\pi([x_1, x_2])\pi(x_3)) + \mathrm{tr}(\pi(x_2)\pi([x_1, x_3])) = \mathrm{tr}(\pi(x_1)\pi(x_2)\pi(x_3) - \pi(x_2)\pi(x_3)\pi(x_1))$$

est nulle. Mais ceci découle immédiatement de la relation $\mathrm{tr}(\alpha\beta) = \mathrm{tr}(\beta\alpha)$ appliquée à $\alpha = \pi(x_1)$ et $\beta = \pi(x_2)\pi(x_3)$.

La forme symétrique bilinéaire invariante $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y)$ sur l'algèbre de Lie L correspondant à l'homomor-

phisme adjoint de L dans $gl(L)$, s'appelle *forme de Killing* sur L. Désignons-la par $B(x, y) = (x, y)$.

5.2. Critère de Cartan de résolubilité d'une algèbre de Lie.

THÉORÈME 1 (critère de Cartan). *Soit L une algèbre de Lie; L est résoluble si et seulement si*

$$(x, [y, z]) = 0 \text{ pour tous les } x, y, z \in L. \tag{5.2.1}$$

En particulier, lorsque $(x, y) = 0$ pour tous les $x, y \in L$, l'algèbre de Lie L est résoluble.

Démonstration. a) Supposons que L est résoluble. Soit $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = L$ la série de Jordan-Hölder pour l'homomorphisme $x \to \text{ad } x$. En vertu du corollaire 1 de 2.3, l'algèbre dérivée $L^{(1)}$ de l'algèbre de Lie L étant nilpotente, $L^{(1)}$ est un idéal nilpotent dans L. En vertu de III, § 3, $L^{(1)}$ est contenue dans l'idéal nilpotent N constitué par les éléments $x \in L$ tels que $(\text{ad } x) V_k \subset V_{k-1}$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$. En particulier, $\text{ad}([y, z]) V_k \subset V_{k-1}$, donc

$$\text{ad } x \text{ ad}([y, z]) V_k \subset V_{k-1} \text{ pour } k = 1, \ldots, n.$$

D'où l'on tire que $\text{tr}(\text{ad } x \text{ ad}([y, z])) = 0$ pour tous les $x, y, z \in L$, ce qui est équivalent à la relation (5.2.1).

b) Supposons que la relation (5.2.1) est vérifiée pour tous les $x, y, z \in L$. Pour démontrer la résolubilité de L il suffit de montrer que l'algèbre de Lie $L^{(1)}$ est résoluble. D'autre part, la relation (5.2.1) implique $(x, y) = 0$ pour $x, y \in L^{(1)}$ car $y \in L^{(1)}$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $[u, v]$. Ainsi nous pouvons supposer dans la suite que la forme (x, y) est identiquement nulle sur l'algèbre de Lie donnée L. *Montrons que dans cette hypothèse l'algèbre de Lie $L^{(1)}$ est nilpotente*, i.e. (voir le théorème 1 de 2.1) l'image de l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie $L^{(1)}$ dans l'algèbre de Lie $gl(L^{(1)})$ est constituée par des opérateurs nilpotents. Il est évident qu'il suffit de démontrer que la restriction de l'homomorphisme adjoint $x \to \text{ad } x$ de l'algèbre de Lie L à l'idéal $L^{(1)}$ applique les éléments de l'algèbre de Lie $L^{(1)}$ dans des opérateurs nilpotents (cf. II, § 3). Soit $x \in L^{(1)}$. Alors $x = \sum_{i=1}^{r} [y_i, z_i]$ pour certains $y_i, z_i \in L$. Nous devons montrer que l'opérateur $\text{ad } x$ est nilpotent. En vertu du théorème du § 4, il suffit de montrer que $\text{tr}(\text{ad } xZ) = 0$ pour chaque réplique Z de l'opérateur $\text{ad } x$. Mais en vertu de 1 de 1.1, l'opérateur $\text{ad } x$ est une dérivation de l'algèbre de Lie, tandis qu'en vertu de VIII, § 4, chaque réplique de l'opérateur de dérivation est elle-même une dérivation de l'algèbre de Lie L. Il est donc suffisant de montrer que $\text{tr}(\text{ad } x \cdot d) = 0$ pour chaque dérivation d de l'algèbre de Lie L.

Or,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\cdot d)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}([\operatorname{ad} y_i,\ \operatorname{ad} z_i]\, d)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y_i \operatorname{ad} z_i d-\operatorname{ad} z_i \operatorname{ad} y_i d)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i d \operatorname{ad} y_i-\operatorname{ad} z_i \operatorname{ad} y_i d),\qquad (5.2.2)$$

car tr $(\alpha\beta)$ = tr $(\beta\alpha)$ pour tous opérateurs linéaires α, β dans L. Le deuxième membre de la formule (5.2.2) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i\,[d,\ \operatorname{ad} y_i]).\qquad (5.2.3)$$

Puisque d est une dérivation de l'algèbre de Lie L, on a l'égalité (1.1.5), donc (5.2.2) et (5.2.3) impliquent

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x\cdot d)=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i\,[d,\ \operatorname{ad} y_i])=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i \operatorname{ad}(dy_i))=\sum_{i=1}^{r}(z_i,\ dy_i).\qquad (5.2.4)$$

Par hypothèse, la forme de Killing est identiquement nulle sur l'algèbre de Lie L. Par conséquent, le deuxième membre de la formule (5.2.4) est nul, i.e. tr (ad $x\cdot d$) = 0 pour tous les $d \in$ Der (L), et ad x est nilpotent dans L quel que soit $x \in L^{(1)}$.

Le raisonnement que nous avons utilisé pour démontrer le théorème 1 peut être appliqué dans une situation plus générale.

I. *Soient L une algèbre de Lie sur un corps K, et π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie* gl (V). *Soit P l'ensemble de tous les $x \in L$ tels que $B_\pi(x, y) = 0$ pour tout $y \in L$. Alors P est un idéal de L, et l'opérateur $\pi(x)$ est nilpotent pour tous les $x \in [P, L]$.*

D é m o n s t r a t i o n. L'invariance de la forme B_π signifie que

$$B_\pi([x,\ y],\ z)+B_\pi(y,\ [x,\ z])=0\qquad (5.2.5)$$

pour tous les x, y, $z \in L$. En particulier, si $y \in P$, alors $B_\pi(y, [x, z]) =$ $= 0$ quels que soient x, $z \in L$, d'où l'on tire, en se servant de (5.2.5), que $[x, y] \in P$ quel que soit $x \in L$, i.e. P est un idéal. Soit $x \in$ $\in [P, L]$; alors $x = \sum_{i=1}^{r} [y_i, z_i]$, où $y_i \in P$, $z_i \in L$. Pour démontrer que l'opérateur $\pi(x)$ est nilpotent, il suffit d'établir que tr $(\pi(x)\, R) =$

$= 0$ pour chaque réplique R de l'opérateur $\pi(x)$. Si R est une réplique de l'opérateur $\pi(x)$, alors ad R est une réplique de l'opérateur ad $\pi(x)$ (voir II, § 4). Par conséquent (voir IV, § 4) l'opérateur ad R est un polynôme en ad $\pi(x)$, donc $\pi(L)$ est invariant relativement à ad R. Ainsi il existe un $u_i \in L$ tel que $[\pi(z_i), R] = \pi(u_i)$ ($i = 1, \ldots, r$).

Alors

$$\operatorname{tr}(\pi(x) R) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}([\pi(y_i), \pi(z_i)] R) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\pi(z_i) R - \pi(z_i)\pi(y_i) R) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\pi(z_i) R - \pi(y_i) R\pi(z_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)[\pi(z_i), R]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\pi(u_i)) = \sum_{i=1}^{r} B_\pi(y_i, u_i) = 0,$$

car $y_i \in P$. Ainsi, $\pi(x)$ est **nilpotent**.

II. *Dans les hypothèses de la proposition* I, *soit* π *un homomorphisme exact* (*i.e.* $x = 0$ *lorsque* $\pi(x) = 0$); *alors* $[P, L]$ *est un idéal nilpotent dans* L.

Démonstration. D'après I, l'opérateur $\pi(x)$ est nilpotent pour tous les $x \in [P, L]$, et $[P, L]$ est un idéal dans L. Puisque π applique topologiquement l'algèbre de Lie L sur $\pi(L)$, $\pi([P, L]) = [\pi(P), \pi(L)]$ est un idéal de $\pi(L)$ dont tous les éléments sont des opérateurs nilpotents. Alors on tire de II, § 3, que $\pi([P, L])$ est un idéal nilpotent dans $\pi(L)$, donc $[P, L]$ est un idéal nilpotent dans L.

III. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* II. *Alors* P *est un idéal résoluble dans* L.

Démonstration. L'algèbre de Lie $[P, L]$ est nilpotente en vertu de II. Par conséquent, l'algèbre de Lie $[P, P] \subset [P, L]$ est nilpotente, et il ne reste qu'à appliquer le corollaire 1 de 2.3.

5.3. Critère de semi-simplicité.

THÉORÈME 2. *Soit* L *une algèbre de Lie*; L *est semi-simple si et seulement si la forme de Killing sur* L *est non dégénérée.*

Démonstration. a) Supposons que la forme de Killing sur L est non dégénérée. Soit R un radical de l'algèbre de Lie L. Supposons que $R \neq (0)$; soit h la hauteur de R considéré comme

algèbre résoluble. Alors $A = R^{(h-1)}$ est un idéal commutatif non nul de L. Si x, $y \in L$, $a \in A$, alors $[a, y] \in A$, $[x, [a, y]] \in A$, $[a, [x, [a, y]]] = 0$, i.e. $\operatorname{ad} a \operatorname{ad} x \operatorname{ad} a = 0$. Alors *a fortiori* $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} a)^2 = 0$, d'où $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} a) = 0$, i.e. $(x, a) = 0$ pour tous les $x \in L$, $a \in A$. Puisque $A \neq (0)$, on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle la forme de Killing est non dégénérée. Ainsi, si la forme de Killing sur L est non dégénérée, alors L est semi-simple.

b) Soit L une algèbre de Lie semi-simple. Les éléments $n \in L$ tels que $(x, n) = 0$ pour tous les $x \in L$ forment un sous-espace linéaire $N \subset L$. La forme de Killing étant invariante relativement à l'homomorphisme adjoint, on a

$$(x, [y, n]) = (x, \operatorname{ad} y\,(n)) = -(\operatorname{ad} y\,(x), n) = 0$$

pour tous les x, $y \in L$, $n \in N$. Par conséquent $[y, n] \in N$. N est donc un idéal dans l'algèbre de Lie L. Par définition de N on a $(n, n_1) = 0$ pour n, $n_1 \in N$. En vertu du théorème 1, l'idéal N est résoluble. Puisque l'algèbre de Lie L est semi-simple, on a $N = (0)$, i.e. la forme (x, y) est non dégénérée.

§ 6. Algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie

6.1. Algèbre tensorielle. Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Posons $J_0 = K$, $J_r = V \otimes \ldots \otimes V$ (produit tensoriel de r copies de l'espace V). Les éléments de l'espace J_r s'appellent *tenseurs* (homogènes) d'ordre r. Soit J la somme directe de tous les J_r $(r \geqslant 0)$. Définissons une application bilinéaire $\{u, v\} \to u \otimes v$ du produit direct $J \times J$ dans J en posant

$$c \otimes v = cv = v \otimes c \text{ pour } c \in K = J_0, \quad v \in J; \tag{6.1.1a}$$

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) = \\ = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \tag{6.1.1b}$$

pour tous les r, s entiers positifs et tous les $x_1, \ldots, x_r$ et $y_1, \ldots, y_s$ qui appartiennent à V, et en prolongeant ensuite cette application par linéarité sur toutes les sommes possibles des expressions qui figurent dans les membres gauches des égalités (6.1.1a), (6.1.1b). Alors l'espace linéaire J devient une algèbre associative sur K relativement à la multiplication $\otimes$; l'unité de cette algèbre sera l'unité du corps $K = J_0$. L'algèbre J s'appelle *algèbre tensorielle* sur V. L'espace V peut être identifié au sous-espace $J_1 \subset J$.

I. *L'algèbre J est engendrée (comme algèbre) par le sous-espace V. Si A est une algèbre associative et f une application linéaire de l'espace*

V dans A, alors il existe un homomorphisme unique de l'algèbre J dans A qui prolonge f.

Les deux assertions de la proposition I sont évidentes.

6.2. Définition et construction de l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie donnée. Soient L une algèbre de Lie sur le corps K des nombres réels ou complexes, et J une algèbre tensorielle sur L. Soient $x, y \in L$. Désignons par $u_{x, y}$ l'élément $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in J$ et par M le sous-espace de l'espace J endendré par tous les éléments de la forme $t \otimes u_{x, y} \otimes t'$ $(t, t' \in J; x, y \in L)$, i.e.

$$M = \sum_{x, y \in L} J \otimes u_{x,y} \otimes J. \tag{6.2.1}$$

Puisque $u_{x, y} \in J_1 + J_2$ pour tous les $x, y \in L$, il est clair que $M \subset \sum_{m \geqslant 1} J_m$. Par conséquent, M est un sous-espace propre de J. Il est évident de la formule (6.2.1) que M est un idéal bilatère de J. Désignons par U l'algèbre quotient J/M et par γ l'homomorphisme canonique de J sur U. Puisque L et 1 engendrent J (voir I de 6.1), $\gamma(L)$ et $\gamma(1)$ engendrent U. Désignons par 1 l'élément unité de l'algèbre associative U, par ab le produit des éléments $a, b \in U$ et enfin par α la restriction de l'application γ au sous-espace $L = J_1$.

Soient L une algèbre de Lie sur K, J_1 une algèbre associative à unité sur K, et ρ une application linéaire de L dans A. L'algèbre A munie de l'application ρ s'appelle *algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie L* si l'on a les conditions suivantes: 1) l'algèbre A est engendrée par 1 et $\rho(L)$; 2) $\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$ pour tous les $x, y \in L$; 3) pour chaque algèbre B associative à unité et une application linéaire ξ de l'algèbre de Lie L dans B telle que $\xi([x, y]) = \xi(x)\xi(y) - \xi(y)\xi(x)$ pour tous les $x, y \in L$, il existe un homomorphisme ξ' de l'algèbre associative A dans B tel que $\xi'(1) = 1_B$ et $\xi(x) = \xi'(\rho(x))$ quel que soit $x \in L$.

I. *Soit L une algèbre de Lie sur K. Une algèbre associative U munie d'une application $\alpha: L \to U$ est une algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie L. Si (U', α') est une autre algèbre enveloppante universelle pour L, alors il existe un seul isomorphisme ξ de l'algèbre U sur U' tel que $\xi(1) = 1$ et $\xi(\alpha(x)) = \alpha'(x)$ pour tous les $x \in L$.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous savons déjà que $\alpha(L) = \gamma(L)$ et 1 engendrent U. Puisque $\gamma(u_{x, y}) = 0$, on a

$$\gamma([x, y]) = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x)$$

pour tous les $x, y \in L$, i.e.

$$\alpha([x, y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x)$$

pour tous les x, $y \in L$. Soient A une algèbre associative et ξ une application linéaire de L dans A telle que $\xi([x, y]) = \xi(x)\,\xi(y) - \xi(y)\,\xi(x)$ pour tous les x, $y \in L$. Soit η un homomorphisme de l'algèbre J dans A tel que $\eta(x) = \xi(x)$ pour tous les $x \in L$ (voir I, 6.1). Puisque $\eta(u_{x,y}) = 0$ quels que soient x, $y \in L$, on a $\eta = 0$ sur M. En passant à l'algèbre quotient U, nous obtenons un homomorphisme ξ de l'algèbre associative U dans A tel que $\eta = \zeta \circ \gamma$. Ainsi (U, α) est une algèbre enveloppante universelle de L.

Soit (U', α') une autre algèbre enveloppante universelle de L. Puisque (U, α) est également une algèbre enveloppante universelle pour L, il existe des homomorphismes $\zeta\colon U \to U'$ et $\zeta'\colon U' \to U$ tels que $\zeta(\alpha(x)) = \alpha'(x)$ et $\zeta'(\alpha'(x)) = \alpha(x)$ pour tous les $x \in L$. Par conséquent, les applications $\zeta \circ \zeta'$ et $\zeta' \circ \zeta$ sont identiques sur $\alpha'(L)$ et $\alpha(L)$ respectivement et $\zeta(1) = 1$, $\zeta'(1) = 1$. Puisque les algèbres U et U' sont engendrées par les éléments unités et $\alpha(L)$, $\alpha'(L)$ respectivement, alors $\zeta \circ \zeta'$ et $\zeta' \circ \zeta$ sont des applications identiques. Par conséquent, ζ est un isomorphisme de U sur U'.

6.3. Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

THÉORÈME (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Soient L une algèbre de Lie sur K, $x_1, \ldots, x_n$ une base de L, (U, α) l'algèbre enveloppante universelle pour L. Alors les éléments* 1 *et $\alpha(x_{i_1}) \ldots \alpha(x_{i_s})$ $(s \geqslant 1,\ i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_s)$ forment une base de l'espace linéaire U. En particulier, l'application α est un plongement de L dans U, i.e. le noyau de l'application α est égal à* (0).

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par J_p^0 l'enveloppe linéaire des éléments de J de la forme $x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}$ $(p \geqslant 1,\ i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p)$ et posons $J_0^0 = J_0$. Il est évident que $J_1^0 = J_1$. Désignons par J^0 la somme directe des espaces linéaires J_p^0, $p \geqslant 0$. Supposons que $p \geqslant 2$. Désignons par J_p^d l'enveloppe linéaire des éléments de J de la forme $x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}$ qui présentent cette particularité que le nombre d'inversions dans la suite $(i_1, \ldots, i_p)$ (i.e. le nombre de couples (r, s), $1 \leqslant r$, $s \leqslant p$, tels que $r < s$ mais $i_r > i_s$) est égal à d. Il est évident que J_p est la somme directe des sous-espaces J_p^d, $d > 0$.

L'assertion du théorème est équivalente à l'assertion suivante: J est la somme directe de M et J^0. Ainsi nous devons montrer que $M + J^0 = J$ et $M \cap J^0 = (0)$.

Pour démontrer l'égalité $M + J^0 = J$ il suffit de montrer que pour chaque $r \geqslant 0$ on a

$$J_r \subset M + \sum_{q=0}^{r} J_q^0. \tag{6.3.1}$$

La relation (6.3.1) est évidente pour $r = 0$ et 1. Démontrons la relation (6.3.1) pour $r \geqslant 2$ par récurrence. Soit $p \geqslant 2$ et supposons que (6.3.1) est vérifié pour tous les $r = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$. Puisque

$J_p = \sum_{d \geqslant 0} J_p^d$, il suffit de démontrer que

$$J_p^d \subset M + \sum_{q=0}^{p} J_q^0. \qquad (6.3.2)$$

pour tous les $d \geqslant 0$. Démontrons la relation (6.3.2) par récurrence sur d. Pour $d=0$ la relation (6.3.2) est évidente. Soit $d \geqslant 1$ et supposons que $J_p^e \subset M + \sum_{q=0}^{p} J_q^0$ pour tous les $e=0, \ldots, d-1$. Soit $t = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p} \in J_p^d$. Puisque $d > 1$, il existe un entier positif $r \leqslant p-1$ tel que $i_r > i_{r+1}$. Soit t' le tenseur $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$, où $j_l = i_l$ pour $l \neq r$, $l \neq r+1$, $j_r = i_{r+1}$, $j_{r+1} = i_r$. Alors $t' \in J_p^{d-1}$ et par hypothèse de récurrence $t' \in M + J^0$. Mais $x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} - x_{i_{r+1}} \otimes x_r = [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] + \lambda$, où λ est un élément de M. En utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence on en tire que $t - t' \in M + J_{p-1} \subset M + \sum_{q=0}^{p-1} J_q^0$. Ainsi $t \in M + \sum_{q=0}^{p} J_q^0$, donc $J_p^d \subset M + \sum_{q=0}^{p} J_q^0$, ce qui termine la démonstration par récurrence.

Démontrons maintenant que $M \cap J^0 = (0)$. Construisons l'opérateur linéaire φ dans J tel que pour tous les $p \geqslant 0$ on a

$$\varphi(t) = t \text{ pour tous les } t \in J_p^0; \qquad (6.3.3)$$

et si $p \geqslant 2$, $1 \leqslant s \leqslant p-1$ et $i_s > i_{s+1}$, alors

$$\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_s} \otimes x_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}) =$$
$$= \varphi(\ldots \otimes x_{i_{s+1}} \otimes x_{i_s} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_s}, x_{i_{s+1}}] \otimes \ldots). \qquad (6.3.4)$$

En effet, si un tel opérateur linéaire a été construit, il découle immédiatement de (6.3.4) que $\varphi(t_1 \otimes u_{x_i, x_j} \otimes t_2) = 0$ pour tous les $t_1, t_2 \in J$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Par conséquent φ s'annule sur M. Puisque φ est l'identité sur J^0, on a $M \cap J^0 = (0)$.

Soit φ l'application identique sur $J_0 + J_1$. Supposons que $r \geqslant 2$ et soit φ un opérateur linéaire (dans le sous-espace $\sum_{q=0}^{r-1} J_q$) qui vérifie les conditions (6.3.3) et (6.3.4) pour tous les $p \leqslant r-1$. Prolongeons φ à un opérateur linéaire (de l'espace $\sum_{q=0}^{r} J_q$) qui vérifie les relations (6.3.3) et (6.3.4) pour tous les $p \leqslant r$. Il est évident qu'il suffit de définir $\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_q})$ de manière à ce que les relations (6.3.3) et (6.3.4) soient satisfaites pour $p = r$. Construisons ces éléments $\varphi(t)$ pour $t = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r}$ par récurrence sur le nombre d d'inversions dans la suite $(i_1, \ldots, i_r)$. Si $t \in J_r^0$, alors

$\varphi(t) = t$. Soit $d \geqslant 1$ et supposons que l'application φ a été définie de sorte que les relations (6.3.3) et (6.3.4) sont valables pour tous les $t \in J_r^0$, où $r = 0, \ldots, d-1$. Soit q un nombre naturel $\leqslant r-1$ tel que $i_q > i_{q+1}$. Posons

$$\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_q} \otimes x_{i_{q+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_q}) =$$
$$= \varphi(\ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots). \quad (6.3.5)$$

Puisque le nombre q n'est pas uniquement déterminé, il faut démontrer que la définition de φ sur l'élément t à l'aide de la relation (6.3.5) est correcte. Dès que nous montrerons que φ est bien définie à l'aide de (6.3.5), la récurrence sur d et ensuite sur r terminera la construction de l'application $\varphi\colon J \to J$ qui vérifie les conditions (6.3.3) et (6.3.4). Montrons que la formule (6.3.5) donne une définition correcte de l'application φ. Soit l un autre nombre naturel $\leqslant r-1$ tel que $i_l > i_{l+1}$. Nous devons montrer, en nous servant de l'hypothèse de récurrence, que

$$\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes) =$$
$$= \varphi(\ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots). \quad (6.3.6)$$

Si $|q-l| \geqslant 2$, on peut supposer que $q \geqslant l+2$. Alors $p \geqslant 4$. Puisque les arguments des deux membres de la formule (6.3.6) appartiennent à $\sum_{p=0}^{r-1} J_p + \sum_{l=0}^{d-1} J_p^0$, on peut appliquer à ces deux membres l'hypothèse de récurrence. Un calcul direct montre alors que les deux membres de la relation (6.3.6) sont égaux à la même expression

$$\begin{aligned}\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes \ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots)&. \quad (6.3.7)\end{aligned}$$

Mais lorsque $|q-l| = 1$, supposons que $q = l+1$. Alors $i_l > i_{l+1} > i_{l+2}$ et $p \geqslant 3$. En nous servant de l'hypothèse de récurrence, nous arrivons à l'expression suivante du premier membre de la relation (6.3.6):

$$\begin{aligned}\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_l} \otimes [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}] \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+2}}] \otimes x_{i_{l+1}} \otimes \ldots) &+\\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes \ldots)&, \quad (6.3.8)\end{aligned}$$

tandis que le deuxième membre de (6.3.6) se met sous la forme

$$\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}] \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+2}}] \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes x_{i_{l+2}} \otimes \ldots). \quad (6.3.9)$$

D'autre part, nous avons par hypothèse de récurrence

$$\varphi(t_1 \otimes x \otimes y \otimes t_2) - \varphi(t_1 \otimes y \otimes x \otimes t_2) = \\ = \varphi(t_1 \otimes [x, y] \otimes t_2). \quad (6.3.10)$$

pour tous les $x, y \in L$, $t_1 \in J_\alpha$, $t_2 \in J_\beta$, où $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta = p - 3$. En comparant les expressions (6.3.8) et (6.3.9) et en appliquant la relation (6.3.10), nous voyons que pour démontrer l'égalité des deux membres de la formule (6.3.6) il suffit de montrer que l'application φ s'annule sur l'élément

$$s_1 \otimes [x_{i_l}, [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}]] \otimes s_2 + s_1 \otimes [x_{i_{l+1}}, [x_{i_{l+2}}, x_{i_l}]] \otimes s_2 + \\ + s_1 \otimes [x_{i_{l+2}} [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}]] \otimes s_2, \quad (6.3.11)$$

qui appartient à J_{r-2}. Mais l'élément (6.3.11) est nul d'après l'identité de Jacobi dans l'algèbre de Lie L. Ainsi, l'application φ a été définie correctement. Ceci termine la démonstration du théorème.

REMARQUE. Soit $x_1, \ldots, x_n$ une base de l'algèbre de Lie L; soient c_{ijk} les constantes de structure correspondantes. Alors l'algèbre associative U est engendrée, comme algèbre, par les éléments x_i qui vérifient les relations

$$x_i x_j - x_j x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k \quad (i, j = 1, \ldots, n). \quad (6.3.12)$$

I. *Soient L une algèbre de Lie sur un corps K, U son algèbre enveloppante universelle. Soient V un espace vectoriel et π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$. Il existe alors un homomorphisme π' de l'algèbre associative U dans l'algèbre associative $L(V)$ des opérateurs linéaires dans l'espace V tel que $\pi(x) = \pi'(x)$ pour tous les $x \in L$. L'homomorphisme π' est déterminé de façon unique par l'homomorphisme π.*

La proposition s'obtient de la définition de l'algèbre enveloppante universelle si l'on prend en guise de A l'algèbre $L(V)$ et en guise d'application ξ l'application $x \to \pi(x)$.

Notons un important cas particulier de la proposition I.

II. *Soient L une algèbre de Lie, et π une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace linéaire L. Il existe une représentation π' de*

l'algèbre U dans l'espace V telle que $\pi(x) = \pi'(x)$ pour tous les $x \in L$. La représentation π' est déterminée de façon unique par la représentation π.

6.4. Elément de Casimir. Soit π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Supposons que l'espace L est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B_π, invariante relativement à l'homomorphisme ad. Choisissons des bases $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ dans l'algèbre de Lie L de manière à avoir

$$B_\pi(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \qquad (6.4.1)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Soit U l'algèbre enveloppante universelle de L. Soit b un élément de l'algèbre U défini par l'égalité

$$b = \sum e_i f_i. \qquad (6.4.2)$$

L'élément b s'appelle *élément de Casimir* correspondant à la forme B_π.

I. *L'élément b est contenu dans le centre de l'algèbre U et ne dépend pas du choix des bases $\{e_i\}$, $\{f_j\}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Φ une application linéaire du produit tensoriel d'algèbres de Lie $L \otimes L$ dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, définie par la formule

$$\Phi(x \otimes y)(z) = B_\pi(y, z)\, x \qquad (6.4.3)$$

pour tous les $x, y, z \in L$. Montrons que l'application Φ est non dégénérée. Soit $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$ un élément de $L \otimes L$ contenu dans le noyau de l'application Φ. Nous pouvons supposer que les éléments $x_1, \ldots, x_k$ sont linéairement indépendants dans L. Alors la condition $\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i\right) = 0$ est équivalente à la condition

$$\sum_{i=1}^{k} B_\pi(y_i, z)\, x_i = 0 \quad \text{pour tous les } z \in L,$$

qui est à son tour équivalente à la condition

$$B_\pi(y_i, z) = 0 \text{ quels que soient } z \in L, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Puisque la forme B_π est, par hypothèse, non dégénérée, on a $y_i = 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, k$, i.e. $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$. Ainsi le noyau de l'application Φ est (0). Puisque les dimensions des espaces linéaires de dimension finie $L \otimes L$ et $gl(L)$ sont égales, l'application Φ est un isomorphisme des espaces linéaires $L \otimes L$ et $gl(L)$. On vérifie facilement que l'égalité

$$\Phi((\text{ad } z)\, x \otimes y + x \otimes (\text{ad } z)\, y) = [\text{ad } z, \Phi(x \otimes y)] \qquad (6.4.4)$$

a lieu pour tous les $x, y, z \in L$. En outre, il découle de la formule (6.4.3) que pour chaque $z \in L$ on a l'égalité

$$\Phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right)(z) = \sum_i \Phi(e_i \otimes f_i) z = \sum_i B_\pi(f_i, z) e_i = z,$$

i.e. l'isomorphisme Φ applique l'élément $\sum e_i \otimes f_i$ dans l'opérateur unité de l'espace L; d'où l'on tire que l'élément $\sum e_i \otimes f_i \in \in L \otimes L$ ne dépend pas du choix des bases $\{e_i\}$, $\{f_i\}$. En outre, puisque $\Phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right) = 1$, on a $[\mathrm{ad}\, z, \Phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right)] = 0$ pour tous les $z \in L$; alors on déduit de (6.4.4) que $\sum_i \{(\mathrm{ad}\, z) e_i \otimes f_i + e_i \otimes \otimes (\mathrm{ad}\, z) f_i\} = 0$. L'élément $b \in U$ est l'image de l'élément $\sum_i e_i \otimes f_i \in L \otimes L$ par l'application canonique de l'algèbre tensorielle J sur U; puisque l'algèbre U est engendrée par le sous-espace L, l'elément $b \in U$ appartient au centre de l'algèbre U, ce qui termine la démonstration de la proposition I.

En vertu de I de 6.3, l'homomorphisme π peut être prolongé à un homomorphisme de l'algèbre U dans $L(V)$. L'image $\pi(b)$ de l'élément b est permutable avec tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, puisque l'élément b est situé dans le centre de l'algèbre U.

II. *Si la forme B_π est non dégénérée et si b est l'élément de Casimir correspondant à la forme B_π, on a $\pi(b) \neq 0$. Si en outre $\pi(L)$ est une famille d'opérateurs irréductible, alors $\pi(b)$ est un opérateur scalaire inversible.*

Démonstration. Remarquons que $\operatorname{tr} \pi(b) = = \sum \operatorname{tr}(\pi(e_i)\, \pi(f_i)) = \sum_i B_\pi(e_i, f_i) = \dim L \neq 0$, donc $\pi(b) \neq 0$. Si la famille d'opérateurs $\pi(L)$ est irréductible, alors le lemme de Schur implique que $\pi(b)$ est soit l'opérateur nul, soit un opérateur scalaire non nul; mais $\pi(b) \neq 0$, donc $\pi(b)$ est inversible.

6.5. Algèbre enveloppante universelle d'un groupe de Lie. Soient G un groupe de Lie, et L l'algèbre de Lie du groupe G. Rappelons que l'algèbre de Lie L a été construite à l'aide des champs de vecteurs invariants à gauche sur G (voir 3.2, chapitre IX). Appelons *opérateur différentiel invariant à gauche* sur G toute combinaison linéaire de produits finis de champs vectoriels invariants à gauche sur G, où par produit de champs vectoriels on entend leur composition, conformément à la formule (1.6.7) du chapitre IX. La relation (1.6.6) du chapitre IX implique que chaque opérateur différentiel invariant à gauche sur G s'écrit dans chaque voisinage de coordonnées sous forme d'expression linéaire différentielle à coefficients analytiques, par ailleurs chacun de ces opérateurs est permutable avec les translations à gauche sur G. Les opérateurs différentiels

invariants à gauche sur G forment une algèbre associative relativement aux opérations linéaires naturelles et à la multiplication, définie comme la composition des opérateurs.

Soit $U(L)$ l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie L. L'application identique π de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche vérifie la condition $\pi([X, Y]) = XY - YX$ en vertu de la définition de l'algèbre de Lie du groupe G; en vertu de I, 6.2, cette application se prolonge de façon unique à un homomorphisme π' de l'algèbre associative $U(L)$ dans l'algèbre associative des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G. Le lecteur vérifiera sans peine que le noyau de l'homomorphisme π' se réduit à l'élément 0, tandis que son image coïncide avec l'algèbre de tous les opérateurs différentiels invariants à gauche sur G. Ainsi nous avons obtenu:

I. *L'algèbre enveloppante universelle $U(L)$ est isomorphe (comme algèbre associative) à l'algèbre de tous les opérateurs différentiels invariants à gauche sur G.*

Dans de nombreux problèmes de la théorie des représentations, le centre $Z(L)$ de l'algèbre enveloppante $U(L)$ joue un rôle important. Un des éléments du centre, l'élément de Casimir, a été introduit dans 6.4; nous nous servirons de l'élément de Casimir plus loin, dans 7.2, pour démontrer le théorème de Weyl sur la réductibilité complète des représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples. Donnons maintenant la description, due à I. G e l - f a n d [1*] des éléments du centre de l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie L d'un groupe de Lie connexe G.

Soit $g \to \mathrm{Ad}\, g$ la représentation adjointe du groupe G. L'opérateur $\mathrm{Ad}\, g$ définit un homomorphisme de Lie de l'algèbre de Lie L dans L. Nous dirons que l'élément $a \in U(L)$ est *homogène* si a appartient à l'image d'un des sous-espaces $\widetilde{J_r}$ (voir 6.1). Soient $\dim L = m$, $e_1, \ldots, e_m$ une base de L, $(\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})$ la matrice de l'opérateur $\mathrm{Ad}\, g$ pour la base $e_1, \ldots, e_m$, $(\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})'$ la transposée de $(\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})$, et $\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum c_{i_1, \ldots, i_k} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ un polynôme homogène de degré k relativement aux variables $z_1, \ldots, z_m$. Posons

$$a = \sum \frac{c_{i_1, \ldots, i_k}}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} e_{i_{\sigma(1)}} \ldots e_{i_{\sigma(k)}} \in U(L), \qquad (6.5.1)$$

où S_k est le groupe de toutes les permutations des indices $1, \ldots, k$.

II. *Soient G un groupe de Lie connexe, L son algèbre de Lie, et a un élément homogène de l'algèbre enveloppante $U(L)$. Alors $a \in Z(L)$ si et seulement si a est de la forme* (6.5.1), *où le polynôme φ vérifie la*

condition $\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \varphi((\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})' z_1, \ldots, (\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})' z_m)$ *pour tous les* $g \in G$ *et tous les* $z_1, \ldots, z_m$.

On trouvera la démonstration dans les livres de D. Jélobenko [2] et A. Kirillov [1].

Exemple. Soit $G = SU(2)$. L'algèbre de Lie L du groupe G est $su(2)$, i.e. l'algèbre de Lie des matrices complexes antihermitiennes d'ordre deux à trace nulle; il est évident que L est isomorphe (comme espace linéaire) à l'espace $\mathbf{R}^3$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que la représentation adjointe du groupe $SU(2)$ est équivalente à la représentation du groupe $SU(2)$ décrite dans l'exercice à la page 201. Ainsi le groupe adjoint au groupe $SU(2)$ est le groupe $SO(3, \mathbf{R})$. Chaque polynôme en trois variables, invariant par le groupe $SO(3, \mathbf{R})$, est constant sur toutes les sphères: c'est donc un polynôme en $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ainsi, dans le cas du groupe $SU(2)$, le centre de l'algèbre enveloppante universelle coïncide avec l'algèbre des polynômes relativement à l'opérateur de Casimir construit dans 6.4. La description des idéaux de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $su(2)$ est donnée dans le livre de A. Kirillov [1]. La description du centre de l'algèbre enveloppante universelle pour les groupes $GL(n, \mathbf{C})$, $U(n)$, $SL(n, \mathbf{C})$, $SU(n)$ est donnée dans le livre de D. Jélobenko [1].

§ 7. Algèbres de Lie semi-simples

Dans ce paragraphe nous allons étudier quelques propriétés élémentaires des algèbres de Lie semi-simples; en particulier, nous démontrerons le théorème de H. Weyl sur la réductibilité complète des représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples.

7.1. Idéaux dans les algèbres de Lie semi-simples. Soient L une algèbre de Lie, et A un sous-espace linéaire de L. L'ensemble de tous les $x \in L$ tels que $(x, y) = 0$ quel que soit $y \in A$, s'appelle *supplémentaire orthogonal* du sous-espace A; on le désigne par $A^\perp$.

I. *Si A est un idéal de l'algèbre de Lie L, alors $A^\perp$ est également un idéal de L.*

Démonstration. Il est évident que $A^\perp$ est un sous-espace linéaire de L. L'invariance de la forme de Killing signifie que

$$([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$$

quels que soient $x, y, z \in L$; si $y \in A$, $z \in A^\perp$, alors $[x, y] \in A$ et $([x, y], z) = 0$, et par conséquent $[x, z] \in A^\perp$ pour $x \in L$, $z \in A^\perp$.

II. *Soient L une algèbre de Lie semi-simple, et A, B ses idéaux. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $A \cap B = (0)$;
b) $[A, B] = (0)$;
c) $(A, B) = 0$.

Démonstration. Puisque $[A, B] \subset A \cap B$, b) découle de a). Supposons vérifiée la condition b), et soient $a \in A$, $b \in B$, $x \in L$. Alors $[b, x] \in B$ et $[a, [b, x]] \in [A, B] = 0$, d'où ad a ad $b = 0$ et $(a, b) = \operatorname{tr} 0 = 0$, i.e. on a c). Si la condition c) est vérifiée, alors la forme de Killing est identiquement nulle sur l'idéal $A \cap B$. Conformément au critère de Cartan, cet idéal est résoluble. L étant semi-simple, on a $A \cap B = (0)$, i.e. la condition a) est vérifiée. Ainsi a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

III. *Soit M un idéal de l'algèbre de Lie semi-simple L. Alors $[M, M^{\perp}] = (0)$ et l'algèbre de Lie L est la somme directe de M et $M^{\perp}$. Les algèbres de Lie M et L/M sont semi-simples.*

Démonstration. Par définition, les idéaux M et $M^{\perp}$ vérifient la condition $(M, M^{\perp}) = 0$. Il découle de la proposition II que $M \cap M^{\perp} = (0)$ et $[M, M^{\perp}] = (0)$. D'autre part, puisque la forme de Killing est non dégénérée sur l'algèbre de Lie semi-simple L, et en vertu de la définition de $M^{\perp}$ on a $\dim L = \dim M + \dim M^{\perp}$. En réunissant cette relation avec l'égalité $M \cap M^{\perp} = (0)$, nous voyons que L est la somme directe de M et $M^{\perp}$. Si $x \in M$, alors la restriction des opérateurs ad x à M définit l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie M, tandis que la restriction de ad x à $M^{\perp}$ est nulle. D'où l'on tire que la restriction de la forme de Killing sur L à l'idéal M détermine une forme de Killing sur M. Admettons que cette forme est non dégénérée sur M, i.e. qu'il existe un $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, tel que $(x_0, x) = 0$ pour tous les $x \in M$; il découle alors de l'orthogonalité de M et $M^{\perp}$, et de l'égalité $L = M \dot{+} M^{\perp}$, que $(x_0, x) = 0$ quel que soit $x \in L$. Puisque L est semi-simple, la forme $(\cdot, \cdot)$ est non dégénérée, donc $x_0 = 0$. Par conséquent, la forme de Killing sur M est non dégénérée, donc M est une algèbre de Lie semi-simple. D'une manière analogue $M^{\perp}$ est semi-simple. Comme L/M est isomorphe à $M^{\perp}$, alors L/M est également une algèbre de Lie semi-simple.

IV. *Si L est semi-simple, alors $L = [L, L]$.*

Démonstration. Supposons le contraire, i.e. $L \neq [L, L]$, alors $L/[L, L]$ serait une algèbre de Lie non nulle abélienne, et donc semi-simple en vertu de III, ce qui est impossible.

V. *Soient L une algèbre de Lie semi-simple, M un idéal de L, et N un idéal de M. Alors N est un idéal de L. En particulier, si M est un idéal minimal de L, alors M est une algèbre de Lie simple.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de III et II, on a $L = M \dotplus M^{\perp}$ et $[M, M^{\perp}] = (0)$, donc $[N, L] = [N, M] \subset N$. D'autre part, tout idéal minimal d'une algèbre semi-simple n'est pas commutatif; sa dimension est donc supérieure à un.

VI. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si elle se décompose en une somme directe d'algèbres de Lie simples L_i. Dans ce cas chaque idéal M de l'algèbre de Lie L est la somme directe de certains L_i. Cette décomposition d'une algèbre de Lie semi-simple est unique.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'algèbre de Lie L est semi-simple. Comme chaque idéal $H \subset L$ possède le supplémentaire $H^{\perp}$, on conclut à l'aide de V que L est la somme directe d'un certain nombre d'idéaux minimaux L_i. Chaque idéal minimal est une algèbre de Lie simple en vertu de V. Soit M un idéal quelconque de L. Si N est un idéal de M, alors $N^{\perp} \cap M$ est également un idéal de M ; en appliquant le raisonnement précédent à M on conclut que M est la somme directe de ces idéaux minimaux M_i. En vertu de la proposition V, chacun des idéaux M_i est un idéal de L. Par conséquent, il suffit de montrer que chaque idéal minimal A de l'algèbre de Lie L coïncide avec un des idéaux L_i. Puisque la forme de Killing est non dégénérée, tandis que la somme directe des idéaux L_i est toute l'algèbre L, il existe un i_0 tel que A n'est pas orthogonal à L_{i_0}. Il découle alors de la proposition II que $A \cap L_{i_0} \neq (0)$. Mais les idéaux A et L_{i_0} sont minimaux, donc $A \cap L_{i_0} = A = L_{i_0}$. L'unicité de la décomposition $L = \dotplus \sum L_i$ découle maintenant du fait que les L_i forment l'ensemble de tous les idéaux minimaux de l'algèbre de Lie L ; ainsi l'ensemble des idéaux L_i est déterminé uniquement.

Réciproquement, si L est la somme directe des algèbres simples L_i, alors les idéaux L_i sont deux à deux orthogonaux au sens de la forme de Killing, et celle-ci est non dégénérée sur chacun d'eux. Par conséquent, la forme de Killing est non dégénérée sur l'algèbre de Lie L, i.e. L est semi-simple.

7.2. Réductibilité complète des représentations d'algèbres de Lie semi-simples.

THÉORÈME (H. Weyl). *Soient L une algèbre de Lie semi-simple sur un corps K, et π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, où V est un espace de dimension finie sur K. Alors, pour tout sous-espace $V_1 \subset V$, invariant relativement à $\pi(L)$, il existe un sous-espace $V_2 \subset V$, invariant relativement à $\pi(L)$ et tel que $V_1 \cap V_2 = (0)$ et $V_1 + V_2 = V$.*

Soit N le noyau de l'homomorphisme π. On peut alors envisager π comme un homomorphisme de l'algèbre de Lie L/N à noyau nul.

Puisque L/N est semi-simple en vertu de III, on peut supposer en outre que le noyau de l'homomorphisme π est nul.

Considérons l'ensemble A de tous les éléments $x \in L$, pour lesquels $B_\pi (x, y) = 0$ quel que soit $y \in L$. En vertu de I, 5.2, l'ensemble A est un idéal de L. Cet idéal est résoluble en vertu de III, 5.2. Puisque L est semi-simple, on a $A = (0)$, i.e. la forme B_π est non dégénérée sur L. Soit $b \in U$ l'élément de Casimir qui correspond à la forme B_π (voir 6.4). Prolongeons l'homomorphisme π à l'algèbre enveloppante U de l'algèbre de Lie L (voir I, 6.3). En vertu de II, 6.4, l'opérateur $\pi (b)$ est non nul et si $\pi (L)$ est une famille irréductible d'opérateurs dans V, l'opérateur $\pi (b)$ est inversible.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème. Supposons d'abord que V_1 est un sous-espace invariant de V de codimension 1. Alors, pour l'espace quotient unidimensionnel $W = V/V_1$, un homomorphisme $\tilde{\pi}$ de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl (W)$ est défini. Comme W est isomorphe à K, $gl (W)$ est une algèbre de Lie abélienne unidimensionnelle. Mais L est semi-simple, donc L ne possède aucune algèbre quotient de Lie abélienne (voir III de 7.1); par conséquent $\tilde{\pi} (L) = 0$. Montrons qu'*il existe dans l'espace V un sous-espace unidimensionnel, invariant relativement à $\pi (L)$ et supplémentaire à V_1.*

Nous pouvons supposer en plus que le sous-espace V_1 est irréductible relativement à $\pi (L)$. En effet, si notre assertion est valable dans tous les cas où V_1 est irréductible relativement à $\pi (L)$, alors on peut montrer sa validité dans les cas réductibles par récurrence sur la dimension de l'espace V_1. Si V_1 est réductible relativement à $\pi (L)$, alors il existe un sous-espace $V' \subset V_1$, invariant relativement à $\pi (L)$ et tel que $V' \neq (0)$ et $V' \neq V_1$.

Considérons l'homomorphisme $\tilde{\pi}$ de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl (V/V')$, défini par passage aux opérateurs quotients. L'espace V_1/V' est invariant relativement à $\tilde{\pi} (L)$ et sa codimension dans V/V' est égale à un; en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une droite V''/V', supplémentaire à V_1/V' et invariante relativement à $\tilde{\pi} (L)$. Alors V'' est invariant relativement à $\pi (L)$ et contient un sous-espace invariant V' de codimension 1 dans V''; en appliquant à nouveau l'hypothèse de récurrence, nous obtenons une droite V_2, $\pi (L)$-invariante et supplémentaire à V' dans V''. Alors V_2 est le supplémentaire de V_1 dans V. En effet, $V' \subset V_1$ et $V_2 + V' = V''$, donc $V_2 + V_1 = V_2 + V' + V_1 = V'' + V_1 = V$; d'autre part, $V_2 \cap V_1 \neq (0)$ implique $V_2 \subset V_1$ en vertu du fait que V_2 est unidimensionnel. Alors $V' \subset V_1$ et $V_2 \subset V_1$, i.e. $V'' = V' + V_2 \subset V_1$, mais V''/V' est le supplémentaire de V_1/V' dans V/V', donc $V'' \not\subset V_1$. La contradiction obtenue montre que $V_2 \cap V_1 = (0)$, i.e. V_2 est le supplémentaire de V_1 dans V.

Admettons l'hypothèse supplémentaire selon laquelle $\pi(L)$ est une famille irréductible d'opérateurs dans V_1. D'après ce qui a été démontré précédemment, la forme bilinéaire B_π est non dégénérée. Si b est l'élément de Casimir correspondant à la forme B_π, on a $\pi(b)\, V \subset \subset V_1$. En effet, l'image de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl\,(V/V_1) \approx gl\,(K)$ est une algèbre de Lie unidimensionnelle, et donc abélienne, i.e. $\pi(x)\, V \subset V_1$ pour tous les $x \in L$ et $\pi(b)\, V \subset V_1$. D'autre part, la famille des opérateurs $\pi(L)$ est irréductible dans V_1, donc $\pi(b)$ est un opérateur scalaire non nul sur l'espace V_1. Soit V_2 le noyau de l'opérateur $\pi(b)$ dans V. Alors V_2 est un sous-espace unidimensionnel supplémentaire de V_1. Puisque $\pi(b)$ est permutable avec les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, on a pour chaque $v \in V_2$ la relation $\pi(b)\,(\pi(x)\, v) = \pi(x)\,(\pi(b)\, v) = \pi(x)\, 0 = 0$, i.e. $\pi(x)\, v \in V_2$, et V_2 est invariant relativement à $\pi(L)$. Remarquons que

$$\pi(L)\, V_2 = (0) \tag{7.2.1}$$

car $\pi(L)\,|_{V_2}$ est abélienne, comme doit l'être toute l'algèbre de Lie unidimensionnelle.

Passons maintenant à la démonstration du théorème dans le cas général. Soit $\widetilde{V}$ l'espace linéaire des applications linéaires de l'espace V dans l'espace V_1 dont les restrictions à V_1 sont des opérateurs scalaires, i.e. des opérateurs de multiplication par les éléments du corps. Soit $\widetilde{V}_1$ l'ensemble des opérateurs linéaires sur l'espace V à valeurs dans V_1, dont la restriction à V_1 est nulle. Si V_1 est un sous-espace non nul, alors l'espace $\widetilde{V}_1$ est de codimension 1 dans $\widetilde{V}$. Définissons l'homomorphisme $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl\,(\widetilde{V})$ en posant

$$\widetilde{\pi}(x)\,\widetilde{v} = [\pi(x), \widetilde{v}] \text{ pour tous les } x \in L,\ \widetilde{v} \in \widetilde{V}.$$

Il est évident que $\widetilde{V}_1$ est invariant relativement à $\widetilde{\pi}(L)$. Nous venons de démontrer qu'il existe un sous-espace unidimensionnel $\widetilde{V}_2 \subset \widetilde{V}$ invariant relativement à $\widetilde{\pi}(L)$ et supplémentaire de $\widetilde{V}_1$. Soit ψ un élément non nul de $\widetilde{V}_2$; en vertu de la définition de $\widetilde{V}$, la restriction de ψ à V_1 est une multiplication par un scalaire non nul. En multipliant éventuellement ψ par un nombre, nous pouvons supposer que ψ agit sur V_1 identiquement. En vertu de (7.2.1), $\widetilde{\pi}(L)\,\widetilde{V}_2 = (0)$, donc $\widetilde{\pi}(x)\,\psi = [\pi(x), \psi] = 0$ pour $x \in L$, i.e. ψ est une application de l'espace V dans V_1, identique sur V_1 et permutable avec tous les $\pi(x)$, $x \in L$. Le noyau de l'application ψ est justement le sous-espace V_2 cherché.

7.3. Corollaires du théorème de H. Weyl.

I. *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si pour chaque homomorphisme π de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl\,(V)$*

la famille des opérateurs $\pi(L)$ est complètement réductible (i.e. chaque sous-espace $\pi(L)$-invariant possède un supplémentaire $\pi(L)$-invariant).

D é m o n s t r a t i o n. Si L est semi-simple, alors $\pi(L)$ est complètement réductible en vertu du théorème de H. Weyl. Réciproquement, soit $\pi(L)$ une famille complètement réductible pour une certaine algèbre de Lie L relativement à tout homomorphisme $\pi: L \to gl(V)$; alors, cette condition est satisfaite en particulier pour l'homomorphisme adjoint. Par conséquent, chaque idéal de l'algèbre de Lie L possède un idéal supplémentaire. Supposons que l'algèbre de Lie L n'est pas semi-simple. Soit $R \neq (0)$ un radical de l'algèbre de Lie L; soit n la hauteur de R considéré comme algèbre résoluble. Alors $n \geqslant 1$, et $A = R^{(n-1)}$ est un idéal commutatif non nul de L. Soit B l'idéal de l'algèbre de Lie L supplémentaire de A. Alors L est isomorphe à la somme directe de A et B, donc chaque homomorphisme de l'algèbre de Lie A dans $gl(V)$ se prolonge à un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans $gl(V)$, nul sur B. Mais l'algèbre de Lie commutative A possède un homomorphisme π dans $gl(K^2)$ tel que $\pi(A)$ n'est pas complètement réductible. En effet, soit f une fonction linéaire non nulle sur A; l'homomorphisme π se définit, par exemple, par la formule

$$\pi(a) = \begin{Vmatrix} 0 & f(a) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad a \in A.$$

II. *Chaque dérivation d d'une algèbre de Lie semi-simple L est de la forme* ad x *pour un certain $x \in L$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit D l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie L. Soit J l'ensemble des dérivations de l'algèbre de Lie L de la forme ad x, $x \in L$ (voir I, 1.1). En vertu de la proposition I de 1.1, l'ensemble J est un idéal de D. L'application $x \to$ ad x est un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur J. En effet, le centre de l'algèbre de Lie L est un idéal commutatif de l'algèbre de Lie semi-simple L; il est donc nul; d'autre part, le noyau de l'application $x \to$ ad x coïncide avec le centre de L. Ainsi, L et J sont *isomorphes*, et J est une algèbre de Lie semi-simple. La restriction de l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie D à l'idéal J détermine une famille complètement réductible d'opérateurs dans D, donc D est somme directe du sous-espace $[D, J]$ et du sous-espace D_0 des éléments orthogonaux à $[D, J]$:

$$D = [D, J] \dotplus D_0. \tag{7.3.1}$$

Lorsque $a \in J$, $d \in D$, $d_0 \in D_0$, on a $([a, d], d_0) = 0$, donc $(d, [a, d_0]) = 0$ pour tous les $d \in D$, $a \in J$, $d_0 \in D_0$. Par conséquent, $[a, d_0] = 0$. Réciproquement, si $[a, d_0] = 0$, on a évidemment $d_0 \in D_0$. On voit que D_0 est constitué par les éléments $d_0 \in D$ permutables avec tous les éléments de J. Ainsi, lorsque $d_0 \in D_0$, on a ad $(d_0 x) = [d_0, \text{ad}\, x] =$

$= 0$ pour tous les $x \in L$, mais alors $d_0 x = 0$ pour tous les $x \in L$ et $d_0 = 0$, de sorte que $D_0 = (0)$ et $D = [D, J] \dotplus D_0 = [D, J]$ en vertu de (7.3.1). Mais J est un idéal de D, donc $D = [J, D] \subset J$, i.e. $D = J$.

III. *Soient L une algèbre de Lie, et M un idéal* (de L) *qui est une algèbre de Lie semi-simple. Il existe un seul idéal N de L tel que L soit la somme directe de M et N.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la restriction de l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie L à l'idéal M. Il est évident que le sous-espace $M \subset L$ est invariant relativement à la famille des opérateurs ad x, $x \in M$. En vertu du théorème de H. Weyl, il existe un sous-espace $N \subset L$, supplémentaire de M et invariant relativement aux opérateurs ad x, $x \in M$. Montrons que $[M, N] = (0)$. En effet, puisque M est un idéal, on a $[M, N] \subset M$; puisque N est invariant relativement à ad x, $x \in M$, on a $[M, N] \subset N$, donc $[M, N] \subset M \cap N = (0)$. Montrons que $N = M'$, où M' est l'ensemble de tous les éléments $x \in L$ tels que $[x, M] = (0)$. Soit $x \in L$; alors $x = m + n$, où $m \in M$, $n \in N$. Par conséquent, $[M, x] = [M, m]$. Lorsque $[M, x] = (0)$, on a $[M, m] = (0)$, i.e. m appartient au centre de M. Mais M est semi-simple, donc $m = 0$. Ainsi, lorsque $x \in M'$, on a $x \in N$, i.e. $M' \subset N$. Comme $[M, N] = 0$, on a $M' \supset N$, donc $M' = N$. Par conséquent, N est déterminé de manière unique (à savoir $N = M'$) et N est un idéal de L en vertu de I, 7.1.

§ 8. Sous-algèbres de Cartan

Soient L une algèbre de Lie complexe, et H sa sous-algèbre de Lie nilpotente. Désignons par π la restriction de la représentation adjonte de l'algèbre de Lie L à la sous-algèbre H. En vertu de II, 2.4, l'espace L se décompose en somme directe de sous-espaces L^α correspondant aux divers poids α de la représentation π. Chaque poids de la représentation π s'appelle *racine de l'algèbre de Lie L relativement à la sous-algèbre de Lie H.*

Autrement dit, la fonctionnelle linéaire α sur H s'appelle *racine* de l'algèbre de Lie L relativement à H s'il existe un élément $x \in L$, $x \neq 0$, tel que pour chaque $h \in H$ on a

$$[h, x] = \alpha(h)\, x. \qquad (8.1.1)$$

Le sous-espace L^α s'appelle *sous-espace des racines associé à la racine α*. Indiquons quelques propriétés de la décomposition $L = \sum L^\alpha$.

I. $H \subset L^0$; *qui plus est, chaque sous-algèbre de Lie nilpotente $M \subset L$ qui contient H est contenue dans L^0.*

D é m o n s t r a t i o n. La représentation adjointe de l'algèbre de Lie M est une représentation par des opérateurs nilpotents (voir

le théorème I de 2.1) ; par conséquent, la restriction de cette représentation à H ne peut avoir qu'un poids nul, donc $M \subset L^0$.

II. $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$.

Démonstration. Soient $x \in L^\alpha$, $y \in L^\beta$. Montrons que $[x, y] \in L^{\alpha+\beta}$. De l'identité évidente

$$(\mathrm{ad}\,(h) - \alpha\,(h) - \beta\,(h))\,[x, y] =$$
$$= [(\mathrm{ad}\,(h) - \alpha\,(h))\,x, y] + [x, (\mathrm{ad}\,(h) - \beta\,(h))\,y]$$

on déduit par récurrence une formule analogue à celle de Leibnitz :

$$(\mathrm{ad}\,(h) - \alpha\,(h) - \beta\,(h))^n\,[x, y] =$$
$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,[(\mathrm{ad}\,(h) - \alpha\,(h))^p\,x, (\mathrm{ad}\,(h) - \beta\,(h))^{n-p}\,y]. \qquad (8.1.2)$$

Lorsque $n > \dim L^\alpha + \dim L^\beta$, tous les termes du deuxième membre de (8.1.2) s'annulent, d'où l'on tire $[x, y] \in L^{\alpha+\beta}$.

Il découle de II que $[L^\alpha, L^\beta] = (0)$ lorsque $\alpha + \beta$ n'est pas une racine.

III. *L^0 est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie L.*

Démonstration. D'après II, $[L^0, L^0] \subset L^0$.

Soit H une sous-algèbre de Lie nilpotente de l'algèbre de Lie L ; H s'appelle *sous-algèbre de Cartan* lorsque $L^0 = H$.

Il est évident que chaque sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre nilpotente maximale (par inclusion) de L.

Soient L une algèbre de Lie et $x \in L$. Soit $L\,(\mathrm{ad}\,x, 0)$ le sous-espace de L constitué par les éléments $y \in L$ tels que $(\mathrm{ad}\,x)^k y = 0$ pour un certain $k \geqslant 0$. Il est évident que $x \in L\,(\mathrm{ad}\,x, 0)$; alors $L\,(\mathrm{ad}\,x, 0) \neq 0$ si $x \neq 0$. Le nombre $r = \min \dim L\,(\mathrm{ad}\,x, 0)$ s'appelle *rang* de l'algèbre de Lie L. Lorsque $x \in L$ et $\dim L\,(\mathrm{ad}\,x, 0) = r$, l'élément x s'appelle élément *régulier* de l'algèbre de Lie L.

On voit facilement que chaque algèbre de Lie non nulle contient au moins un élément régulier. En effet, soit $x_1 \neq 0$ un élément quelconque de L. Lorsque $\dim L\,(\mathrm{ad}\,x_1, 0)$ n'est pas minimale, il existe un élément $x_2 \in L$, $x_2 \neq 0$, pour lequel $\dim L\,(\mathrm{ad}\,x_2, 0) < \dim L\,(\mathrm{ad}\,x_1, 0)$. Puisque $\dim L$ est finie, en répétant ce raisonnement, on aboutira à un élément x_k pour lequel $\dim L\,(\mathrm{ad}\,x_k, 0)$ soit minimale.

IV. *Soit H une sous-algèbre de Lie nilpotente (de l'algèbre de Lie L) qui contient l'élément régulier h. Alors l'algèbre de Lie L^0 est une sous-algèbre de Cartan de L, et $L^0 = L\,(\mathrm{ad}\,h, 0)$.*

Démonstration. *Soit* $L = L^0 + \sum_{\alpha \neq 0} L^\alpha$ la décomposition de l'espace L relativement à la sous-algèbre nilpotente de Lie H ;

soit $\tilde{L} = \sum_{\alpha \neq 0} L^{\alpha}$. En vertu de II, les sous-espaces L^{α} sont invariants relativement à tous les opérateurs ad x, $x \in L^0$; par conséquent, le sous-espace $\tilde{L}$ est aussi invariant relativement à ces opérateurs. Soit det (x) le déterminant de la transformation ad x, $x \in L^0$, restreinte au sous-espace $\tilde{L}$. L'ensemble de tous les vecteurs $h \in H$ tels que $\alpha(h) = 0$ pour un certain $\alpha \neq 0$ est réunion d'un nombre fini d'hyperplans de H; cette réunion ne recouvre pas l'espace H tout entier, et l'on peut donc trouver un vecteur $h_0 \in H$ tel que $\alpha(h_0) \neq 0$ pour tous les $\alpha \neq 0$. Puisque $H \subset L^0$, on a $\det h = \prod_{\alpha \neq 0} \alpha(h) \neq 0$ pour certains $h_0 \in L^0$. D'autre part, lorsque det $(x) \neq 0$, la restriction de l'opérateur ad x au sous-espace $\tilde{L}$ pour un certain élément $x \in L^0$ possède seulement des valeurs propres nulles; ainsi L (ad x, 0) $\subset L^0$. Soit h un élément régulier contenu dans H. Comme $h \in H$, on a L (ad h, 0) $\supset L^0$; donc

$$L(\text{ad } x, 0) \subset L^0 \subset L(\text{ad } h, 0). \tag{8.1.3}$$

Mais la dimension de L (ad h, 0) est minimale alors on tire de (8.1.3) que

$$L(\text{ad } x, 0) = L^0 = L(\text{ad } h, 0). \tag{8.1.4}$$

Démontrons que la sous-algèbre de Lie L^0 est nilpotente. En vertu de (8.1.4), l'opérateur ad (x) est nilpotent sur L^0, d'où l'on tire

$$\operatorname{tr}(\text{ad}(x)|_{L^0})^p = 0 \text{ pour tous les } p \geqslant 1. \tag{8.1.5}$$

Le premier membre de la formule (8.1.5) est un polynôme en coordonnées du vecteur $x \in L^0$. Nous avons déjà démontré que la relation (8.1.5) est vérifiée pour tous les $x \in L^0$ tels que det $(x) \neq 0$; cet ensemble n'est pas vide et il est ouvert dans L^0, donc l'égalité (8.1.5) est valable pour tous les $x \in L^0$. Ensuite, en ramenant ad $(x)|_{L^0}$ à la forme normale de Jordan, nous voyons que la relation (8.1.5) implique que tous les polynômes symétriques relativement aux valeurs propres de l'opérateur ad $(x)|_{L^0}$ s'annullent. Alors le polynôme caractéristique de l'opérateur ad $(x)|_{L^0}$ ne possède que des racines nulles, i.e. l'opérateur ad $(x)|_{L^0}$ est nilpotent. Ainsi, les opérateurs ad $(x)|_{L^0}$ sont nilpotents pour tous les $x \in L^0$; par conséquent, l'algèbre de Lie L^0 est nilpotente. Enfin la sous-algèbre de Lie H est contenue dans L^0 et $L(L^0, 0) \subset L(H, 0) = L^0$. D'où l'on tire que $L(L^0, 0) = L^0$, i.e. L^0 est une sous-algèbre de Cartan de L.

V. *Toute algèbre de Lie L contient au moins une sous-algèbre de Cartan.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient h un élément régulier de L, et H la sous-algèbre de Lie unidimensionnelle engendrée par l'élé-

ment h. En appliquant IV, nous obtenons une sous-algèbre de Cartan L^0 de L.

Choisissons une sous-algèbre de Cartan H de l'algèbre de Lie L; alors

$$L = H + \sum_{\alpha \neq 0} L^{\alpha}. \tag{8.1.6}$$

Posons

$$\nu(\alpha) = \dim L^{\alpha} \tag{8.1.7}$$

pour $\alpha \neq 0$.

VI. *Soient h, $h' \in H$; alors*

$$(h, h') = \sum_{\alpha} \nu(\alpha)\, \alpha(h)\, \alpha(h'), \tag{8.1.8}$$

où $\nu(\alpha)$ est défini par la relation (8.1.7).

D é m o n s t r a t i o n. La relation $(h, h') = (1/4)\{(h + h', h + h') - (h - h', h - h')\}$ étant évidente, il suffit de démontrer la relation (8.1.8) pour $h = h'$. L'opérateur ad h possède dans l'espace L^{α} l'unique valeur propre $\alpha(h)$, donc $\mathrm{tr}\,((\mathrm{ad}\, h)^2) = \sum_{\alpha} \nu(\alpha)\, \alpha(h)^2$.

VII. *Soient α et β des racines de l'algèbre de Lie L relativement à H et supposons que $\alpha \neq 0$. Il existe alors un entier non positif maximal $p = p_{\beta\alpha}$ et un entier non négatif minimal $q = q_{\beta\alpha}$ tels que*

$$[L^{-\alpha}, L^{\beta + p\alpha}] = (0) \text{ et } [L^{\alpha}, L^{\beta + q\alpha}] = (0). \tag{8.1.9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Lorsdue

$$[L^{\alpha}, L^{\beta}] \neq (0), [L^{\alpha}, L^{\beta+\alpha}] \neq (0), \ldots, [L^{\alpha}, L^{\beta+q\alpha}] \neq (0),$$

alors β, $\beta + \alpha$, ..., $\beta + (q + 1)\alpha$ sont en vertu de II des racines. Puisque le nombre des racines est fini, $[L^{\alpha}, L^{\beta+q\alpha}] = (0)$ pour un certain $q \geqslant 0$; soit $q_{\beta\alpha}$ le plus petit des q. On démontre d'une manière analogue l'existence d'un nombre maximal $p = p_{\beta\alpha} \leqslant 0$ pour lequel $[L^{-\alpha}, L^{\beta+p\alpha}] = (0)$.

VIII. *Soient α, β, $p = p_{\beta\alpha}$, $q = q_{\beta\alpha}$ les mêmes que dans la proposition* VII. *Introduisons un nombre rationnel $r_{\beta\alpha}$ en posant*

$$r_{\beta\alpha} = \frac{\sum_{k=p}^{q} k\nu(\beta + k\alpha)}{\sum_{k=p}^{q} \nu(\beta + k\alpha)}. \tag{8.1.10}$$

Alors $\beta(h) = r_{\beta\alpha}\alpha(h)$ pour tous les $h \in [L^{\alpha}, L^{-\alpha}]$.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de vérifier la proposition VIII pour les éléments $h \in H$ de la forme $[x, y]$, $x \in L^{\alpha}$, $y \in L^{-\alpha}$. Soit

$V = \sum_{k=p}^{q} L^{\beta+k\alpha}$. L'opérateur ad (x) applique l'espace $L^{\beta+k\alpha}$ dans le sous-espace $L^{\beta+(k+1)\alpha}$ et applique $L^{\beta+q\alpha}$ dans l'élément nul par hypothèse, donc V est invariant relativement à ad (x). On démontre d'une manière analogue que V est invariant relativement à ad (y). Puisque ad $(h) = [\text{ad}(x), \text{ad}(y)]$, V est invariant relativement à ad (h), et tr (ad $(h)) = 0$. Mais l'unique valeur propre de l'opérateur ad (h) dans le sous-espace $\beta + k\alpha$ est le nombre $\beta(h) + k\alpha(h)$, donc

$$\sum_{k=p}^{q} \nu(\beta + k\alpha)(\beta(h) + k\alpha(h)) = 0$$

ce qui est équivalent à l'assertion de la proposition VIII.

§ 9. Structure des algèbres de Lie semi-simples

9.1. Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie semi-simples. Soient L une algèbre de Lie semi-simple, et H une de ses sous-algèbres de Cartan. Servons-nous des notations et des résultats du § 8.

Rappelons que la forme de Killing est non dégénérée sur L.

I. *Lorsque $\alpha + \beta \neq 0$, les sous-espaces L^{α} et L^{β} sont orthogonaux.*

Démonstration. Si $x \in L^{\alpha}$, $y \in L^{\beta}$, l'opérateur ad x ad y applique chaque sous-espace L^{γ} dans le sous-espace $L^{\gamma+\alpha+\beta}$. Lorsque $\alpha+\beta\neq 0$, alors dans la base de l'espace L, choisie conformément à la décomposition de L dans la somme directe des sous-espaces L^{γ}, tous les éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur ad x ad y sont nuls, donc tr (ad x ad $y) = 0$, i.e. $(x, y) = 0$.

II. *Les sous-espaces L^{α} et $L^{-\alpha}$ sont duaux relativement à la forme de Killing (i.e. pour tout $x \in L^{\alpha}$ il existe un $y \in L^{-\alpha}$ tel que $(x, y) \neq 0$, et pour tout $y \in L^{-\alpha}$ il existe un $x \in L^{\alpha}$ tel que $(x, y) \neq 0$).*

Démonstration. Si l'élément $x \in L^{\alpha}$ est orthogonal au sous-espace $L^{-\alpha}$, alors, en vertu de I, l'élément x est orthogonal à $L = \sum_{\alpha} L^{\alpha}$; la forme de Killing étant non dégénérée, on a $x = 0$.

III. $\dim L^{\alpha} = \dim L^{-\alpha}$.

La proposition découle immédiatement de II.

IV. *La restriction de la forme de Killing de l'algèbre de Lie L au sous-espace H est non dégénérée.*

Démonstration. En vertu de II, le sous-espace $H = L^{0}$ est autodual relativement à la forme Killing.

V. *Si* $r = \dim H$, *où* H *est une algèbre de Lie commutative, alors il existe* r *racines linéairement indépendantes de l'algèbre de Lie* L *relativement à* H.

Démonstration. Si le nombre maximal de racines linéairement indépendantes est inférieur à la dimension de l'espace H, il doit exister un élément non nul $h \in H$ tel que $\alpha(h) = 0$ pour toutes les racines α. Mais alors (8.1.8) implique

$$(h, h') = \sum_{\alpha} \nu(\alpha)\, \alpha(h)\, \alpha(h') = 0 \qquad (9.1.1)$$

quel que soit $h' \in H$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle la forme de Killing sur H est non dégénérée.

Remarquons maintenant que chaque racine α s'annulle sur $[H, H]$ (puisque $\alpha([h_1, h_2])\, h = [[h_1, h_2], h] = [h_1, [h_2, h]] - [h_2, [h_1, h]] = (\alpha(h_1)\, \alpha(h_2) - \alpha(h_2)\, \alpha(h_1))\, h = 0$ pour tous les $h, h_1, h_2 \in H$. Mais comme nous venons de le voir, la condition $\alpha(h) = 0$ pour toutes les racines α implique $h = 0$. Ainsi $[H, H] = (0)$ et H est commutative, ce qui termine la démonstration de la proposition V.

9.2. Propriétés des sous-espaces L^{α}. La forme (x, y) étant non dégénérée sur H, il existe pour chaque fonctionnelle linéaire λ sur H un élément et un seul $h'_{\lambda} \in H$ tel que $\lambda(h) = (h, h'_{\lambda})$ pour tous les $h \in H$. On peut munir l'espace H^* des fonctionnelles linéaires sur H d'un produit scalaire, en posant pour $\lambda, \mu \in H^*$

$$(\lambda, \mu) = (h'_{\lambda}, h'_{\mu}) = \lambda(h'_{\mu}) = \mu(h'_{\lambda}). \qquad (9.2.1)$$

Choisissons dans chaque sous-espace L^{α} un vecteur $e_{\alpha} \neq 0$ qui est un vecteur propre relativement à tous les opérateurs ad h, $h \in H$. Alors pour tous les $h \in H$ on a

$$[h, e_{\alpha}] = \alpha(h)\, e_{\alpha}. \qquad (9.2.2)$$

I. *Si* α *est une racine non nulle et* $x \in L^{-\alpha}$, *alors*

$$[e_{\alpha}, x] = (e_{\alpha}, x)\, h'_{\alpha}. \qquad (9.2.3)$$

Démonstration. Les deux membres de l'égalité (9.2.3) appartiennent à l'algèbre de Lie H, et pour chaque $h \in H$ on a

$$(h, [e_{\alpha}, x]) = ([h, e_{\alpha}], x) = \alpha(h)\, (e_{\alpha}, x) = (e_{\alpha}, x)\, (h'_{\alpha}, h),$$

i.e. les produits scalaires des deux membres de la relation (9.2.3) par un vecteur quelconque $h \in H$ sont égaux. Par conséquent, la proposition I se déduit de IV, 9.1.

II. *Si* α *est une racine non nulle, alors* $(\alpha, \alpha) \neq 0$.

Démonstration. En vertu de II, 9.1, il existe un élément $x \in L^{-\alpha}$ tel que $(e_{\alpha}, x) = 1$. En appliquant la relation (9.2.3) on obtient $[e_{\alpha}, x] = h'_{\alpha}$. Puisque $[e_{\alpha}, x] \in [L^{\alpha}, L^{-\alpha}]$, on tire de VII, § 8, qu'il existe pour chaque racine β un nombre rationnel $r_{\beta\alpha}$ tel

que $\beta(h'_\alpha) = r_{\beta\alpha}\alpha(h'_\alpha)$. Si $(\alpha, \alpha) = \alpha(h'_\alpha) = 0$, on a $\beta(h'_\alpha)$ pour chaque racine β. Par conséquent $h'_\alpha = 0$ (cf. avec la démonstration de la proposition V de 9.1). Mais la relation $h'_\alpha = 0$ est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha \neq 0$. Ainsi $(\alpha, \alpha) \neq 0$ pour toutes les racines non nulles α.

III. *Si α est une racine non nulle, alors le sous-espace L^α est unidimensionnel.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in L^{-\alpha}$ un élément choisi de manière à avoir $[e_\alpha, x] = h'_\alpha$ (voir (9.2.3) et II de 9.1). Soit $y \in L^\alpha$. Montrons que y est proportionnel à e_α. Posons $y_k = (\operatorname{ad} e_\alpha)^k y$. Comme $e_\alpha \in L^\alpha$, on déduit de II, § 8, par récurrence sur k que $y_k \in L^{(k+1)\alpha}$. Trouvons $[x, y_k]$. En vertu de l'identité de Jacobi on a

$$[x, y_1] = [x, (\operatorname{ad} e_\alpha) y] = -[e_\alpha, [y, x]] - [y, [x, e_\alpha]]. \qquad (9.2.4)$$

Posons $[x, y] = h$; l'élément h appartient à H en vertu de II, § 8. Puisque $[x, e_\alpha] = -h'_\alpha$, on tire de (9.2.4) que

$$[x, y_1] = -\alpha(h) e_\alpha - [h'_\alpha, y]. \qquad (9.2.5)$$

En répétant ce raisonnement, on obtient par récurrence sur k pour $k > 1$

$$[x, y_k] = \frac{k(k-1)}{2}\alpha(h'_\alpha) y_{k-1} - k[h'_\alpha, y_{k-1}]. \qquad (9.2.6)$$

Puisque le nombre des racines de l'algèbre de Lie L est fini, il existe un entier minimal k_0 tel que $y_{k_0} = 0$ (rappelons que $y_k \in L^{(k+1)\alpha}$). Si $k_0 \geqslant 2$ et $y_{k_0-1} \neq 0$, on déduit de la relation (9.2.6) pour $k = k_0$ que y_{k_0-1} est un vecteur propre de l'opérateur $\operatorname{ad} h'_\alpha$ à la valeur propre $(k_0 - 1)\alpha(h'_\alpha)/2$. D'autre part, on a $y_{k_0-1} \in L^{k_0\alpha}$, donc la valeur propre de l'opérateur $\operatorname{ad} h'_\alpha$ associée à y_{k_0-1} est égale à $k_0\alpha(h'_\alpha)$. Puisque $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$ en vertu de II et $(k_0 - 1)/2 \neq k_0$ pour $k_0 \geqslant 2$, nous avons abouti à une contradiction. Ainsi $y_{k_0-1} = 0$. En particulier, $y_1 = 0$. Par conséquent, la formule (9.2.5) nous donne l'égalité

$$[h'_\alpha, y] = -\alpha(h) e_\alpha. \qquad (9.2.7)$$

Posons $z = \alpha(h'_\alpha) y + \alpha(h) e_\alpha$. La relation (9.2.7) signifie que $[h'_\alpha, z] = 0$, i.e. lorsque $z \neq 0$, z serait un vecteur propre pour l'opérateur $\operatorname{ad} h'_\alpha$ à valeur propre 0. Mais comme $z \in L^\alpha$ et $\alpha \neq 0$, ceci est impossible. Par conséquent, $z = 0$ donc $\alpha(h'_\alpha) y + \alpha(h) e_\alpha = 0$. Mais $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$, donc y est proportionnel à e_α.

9.3. Séries de racines et sous-algèbres de Lie associées. Soit α une racine non nulle de l'algèbre de Lie L. Si β est une racine de l'algèbre de Lie L, alors l'ensemble S de toutes les racines de la forme $\beta + k\alpha$ (k étant entier) s'appelle *α-série de racines*.

I. *Le sous-espace* $L_S = \sum_{\alpha \in S} L^\alpha$ *est invariant relativement aux opérateurs de* ad L^α, ad $L^{-\alpha}$ *et* ad H.

La proposition découle immédiatement de II, § 8.

La proposition I permet de construire une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L isomorphe à sl (2). Passons à cette construction.

II. *Le sous-espace* $H^\alpha = [L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ *est unidimensionnel pour toute racine non nulle* α.

La proposition découle immédiatement de III, 9.2.

III. *Il existe des vecteurs* $x_\alpha \in L^\alpha$, $y_\alpha \in L^{-\alpha}$, $h_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ *tels que*

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, \quad [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha. \tag{9.3.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de II, 9.2, on a $(\alpha, \alpha) = \alpha(h'_\alpha) \neq 0$ et en vertu de I, 9.2, on a $h'_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}]$. En multipliant h'_α par un scalaire convenable, on obtient un vecteur $h_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(h_\alpha) = 2$. Puisque $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})\, h'_\alpha$ (voir (9.2.3)) et $(e_\alpha, e_{-\alpha}) \neq 0$ d'après II de 9.1, on a $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \neq 0$, et $[e_\alpha, e_{-\alpha}]$ est proportionnel à h_α. En multipliant $e_{-\alpha}$ par un scalaire k approprié, on obtient $[e_\alpha, ke_{-\alpha}] = h_\alpha$. Posons $x_\alpha = e_\alpha$, $y_\alpha = ke_{-\alpha}$; alors $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. En appliquant (9.2.2), on a $[h_\alpha, x_\alpha] = \alpha(h_\alpha)\, x_\alpha = 2x_\alpha$; d'une manière analogue, puisque $y_\alpha \in L^{-\alpha}$, on a $[h_\alpha, y_\alpha] = (-\alpha)(h_\alpha)\, y_\alpha = -2y_\alpha$. Notons pour la suite que

$$h_\alpha = 2h'_\alpha/(\alpha, \alpha) \tag{9.3.2}$$

car $\alpha(h_\alpha) = (2/(\alpha, \alpha))\, \alpha(h'_\alpha) = 2$.

IV. *L'enveloppe linéaire des espaces* L^α, $L^{-\alpha}$ *et* H^α $(\alpha \neq 0)$ *est une sous-algèbre de Lie* $L_\alpha \subset L$; *l'algèbre de Lie* L_α *est isomorphe à* sl (2).

D é m o n s t r a t i o n. Il découle de I que le sous-espace L_α est une sous-algèbre. Considérons maintenant l'algèbre de Lie sl (2) formée des matrices carrées d'ordre deux à trace nulle. Il est évident que les matrices

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad h = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{9.3.3}$$

forment une base de sl (2), et

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y. \tag{9.3.4}$$

En comparant (9.3.4) avec (9.3.1), nous voyons que l'application $\xi x + \eta y + \zeta h \to \xi x_\alpha + \eta y_\alpha + \zeta h_\alpha$ $(\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{C})$ détermine un isomorphisme des algèbres de Lie sl (2) et L_α.

9.4. Représentations de l'algèbre de Lie sl **(2).** Par la suite nous aurons besoin de certaines propriétés de l'algèbre de Lie sl (2) et de ses représentations. Nous allons les énoncer dans les propositions I à III et le théorème qui les suit.

I. a) *L'algèbre de Lie* sl (2) *est simple.*

b) *L'espace unidimensionnel* H, *engendré par un élément* h, *est une sous-algèbre de Cartan de* sl (2).

D é m o n s t r a t i o n. Soit I un idéal de l'algèbre de Lie sl (2). Lorsque $z \in I$ et $z \notin H$, l'élément $[h, z] \in I$ est, en vertu de (9.3.4), une combinaison linéaire non nulle des vecteurs x et y. En appliquant à ce vecteur soit ad x, soit ad y, nous obtiendrons un élément non nul de l'idéal I, multiple de $[x, y] = h$. Ainsi, $h \in I$ (si $I \neq (0)$); alors $x = (1/2)\,[h, x] \in I$ et $y = (-1/2)\,[h, y] \in I$, i. e. $I = sl$ (2).

Puisque $[z, z] = 0$ pour tous les z de l'algèbre de Lie donnée L, on a $r = \min_{z \in L} L\,(\text{ad}\, z, 0) \geqslant 1$. On peut tirer des relations (9.3.4) que $L\,(\text{ad}\, h, 0) = H$, i.e. h est un élément régulier de l'algèbre de Lie $L = sl$ (2) et H est une sous-algèbre de Cartan de L (voir IV, § 8).

Désignons par α la fonctionnelle linéaire sur H définie par l'égalité

$$\alpha\,(ch) = 2c \tag{9.4.1}$$

pour tous les $c \in \mathbf{C}$. Soit π une représentation linéaire de l'algèbre de Lie sl (2) dans l'espace de dimension finie V. Pour chaque fonctionnelle linéaire λ sur H, désignons par V_λ le sous-espace de V constitué par tous les vecteurs $v \in V$ tels que $\pi\,(h)\,v = \lambda\,(h)\,v$. Si $v \in V_\lambda$, on a

$$\pi\,(h)\,\pi\,(x)\,v = \pi\,(x)\,\pi\,(h)\,v + 2\pi\,(x)\,v = \\ = (\lambda\,(h) + 2)\,\pi\,(x)\,v = ((\lambda + \alpha)(h))\,\pi\,(x)\,v,$$

i.e. $\pi\,(x)\,V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$. D'une manière analogue, $\pi\,(y)\,V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$.

II. $V = \sum V_\lambda$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que la représentation π est irréductible. Les relations $\pi\,(x)\,V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$, $\pi\,(y)\,V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$ impliquent que $\sum_\lambda V_\lambda$ est un sous-espace invariant de V. Comme l'opérateur $\pi\,(h)$ possède au moins un vecteur propre, on a $\sum_\lambda V_\lambda \neq (0)$. On tire alors de l'irréductibilité de π que $\sum_\lambda V_\lambda = V$. Si π n'est pas irréductible, il se décompose en une somme directe de représentations irréductibles par suite de la simplicité de sl (2) et en vertu du

théorème de H. Weyl. Par conséquent, pour chaque représentation de dimension finie π on a $V = \sum_{\lambda} V_{\lambda}$.

Soit π une représentation irréductible de l'algèbre de Lie sl (2). Le nombre des poids de la restriction de la représentation π à H étant fini, il existe un poids λ_0 tel que $\lambda_0 + \alpha$ n'est pas un poids de la restriction de la représentation π à H.

III. *L'ensemble des poids de la restriction de la représentation π à H est la famille*

$$-\lambda_0, \ -\lambda_0 + \alpha, \ -\lambda_0 + 2\alpha, \ \ldots, \ \lambda_0 - \alpha, \ \lambda_0. \qquad (9.4.2)$$

Pour chaque poids λ, le nombre $\lambda(h)$ est entier.

Démonstration. Puisque $\lambda_0 + \alpha$ n'est pas un poids, on a

$$\pi(x) V_{\lambda_0} \subset V_{\lambda_0+\alpha} = (0). \qquad (9.4.3)$$

Soit $e_0 \in V_{\lambda_0}$, $e_0 \neq 0$. Posons $e_k = \pi(y)^k e_0$; démontrons que le vecteur $\pi(x) e_{k+1}$ est proportionnel à e_k. En posant $e_{-1} = 0$, nous voyons que pour $k = -1$ l'assertion est valable en vertu de (9.4.3). Lorsque $\pi(x) e_{k+1} = \mu_k e_k$ pour tous les $k < r$, on a

$$\pi(x) e_{r+1} = \pi(x) \pi(y) e_r = \pi(y) \pi(x) e_r + \pi(h) e_r =$$
$$= \mu_{r-1} \pi(y) e_{r-1} + (\lambda_0 - r\alpha)(h) e_r = \mu_r e_r,$$

où

$$\mu_r = \mu_{r-1} - (r\alpha - \lambda_0)(h), \qquad \mu_{-1} = 0.$$

Par conséquent, en vertu de la condition $\alpha(h) = 2$ (voir (9.4.1)) on a

$$\mu_k = -\sum_{r=0}^{k} (r\alpha - \lambda_0)(h) = -(k+1)(k\alpha(h)/2 - \lambda_0(h)) =$$
$$= (k+1)(\lambda_0(h) - k). \qquad (9.4.4)$$

Puisque l'espace V est de dimension finie, il existe un j tel que $e_j \neq 0$, $e_{j+1} = 0$ (sinon on aurait $0 \neq e_k \in V_{\lambda_0 - k\alpha}$ pour tous les k, où les $V_{\lambda_0 - k\alpha}$ sont linéairement indépendantes, ce qui est en contradiction avec le fait que V est de dimension finie). Alors $\mu_j e_j = \pi(x) e_{j+1} = 0$, donc $\mu_j = 0$ et l'on tire de (9.4.4) que $\lambda_0(h) = j$, de sorte que $\lambda_0(h)$ est un entier non négatif; d'où en vertu de (9.4.4)

$$\mu_k = (k+1)(j-k). \qquad (9.4.5)$$

Posons

$$f_k = (j-k)!\, e_k, \quad k = 0, 1, \ldots, j. \qquad (9.4.6)$$

Alors, en vertu de (9.4.5),

$$\left.\begin{array}{l} \pi(x) f_k = k f_{k-1}, \ \pi(y) f_k = (j-k) f_{k+1}, \\ \pi(h) f_k = (\lambda_0 - k\alpha)(h) f_k = (j-2k) f_k; \qquad k = 0, 1, \ldots, j. \end{array}\right\} \qquad (9.4.7)$$

On tire des relations (9.4.7) que le sous-espace engendré par les vecteurs $f_0, f_1, \ldots, f_j$ est invariant relativement à la représentation π. Puisque π est irréductible par hypothèse, les vecteurs $f_0, f_1, \ldots, f_j$ forment une base de V. Vu que $f_0 \in V_{\lambda_0}$ et $f_k \in V_{\lambda_0 - k\alpha}$, l'ensemble des poids associés à la représentation π est $\{\lambda_0, \lambda_0 - \alpha, \ldots \ldots, \lambda_0 - j\alpha\}$. Mais $(\lambda_0 - j\alpha)(h) = \lambda_0(h) - 2j = j - 2j = -j = -\lambda_0(h)$, donc

$$\lambda_0 - j\alpha = -\lambda_0. \tag{9.4.8}$$

Enfin, pour chaque poids $\lambda = \lambda_0 - k\alpha$, le nombre $\lambda(h) = \lambda_0(h) - k\alpha(h) = j - 2k$ est entier.

THÉORÈME. *Soit π une représentation linéaire de l'algèbre de Lie $sl(2)$ dans une espace V de dimension finie. Alors*

1) $V = \sum_{\lambda} V_\lambda$ *et pour chaque poids λ le nombre $\lambda(h)$ est entier;*

2) *pour chaque poids λ il existe un poids λ' tel que $\lambda(h) = -\lambda'(h)$ et* $\dim V_\lambda = \dim V_{\lambda'}$;

3) *si λ et $\lambda + \alpha$ sont des poids, alors $\pi(x) V_\lambda \neq 0$, et si λ et $\lambda - \alpha$ sont des poids, alors $\pi(y) V_\lambda \neq 0$;*

4) *si la représentation π est irréductible, $v \in V_\lambda$, s est le plus petit entier non négatif tel que $\pi(x)^{s+1} v = 0$, tandis que t est le plus petit entier non négatif tel que $\pi(y)^{t+1} v = 0$, alors*

$$\pi(x)\pi(y)v = (s+1)tv; \quad \pi(y)\pi(x)v = (t+1)sv \tag{9.4.9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Puisque chaque représentation de l'algèbre de Lie $sl(2)$ est complètement réductible, il suffit de démontrer le théorème pour les représentations irréductibles. L'assertion 1) découle de II et III; l'assertion 2) découle de III si l'on prend en considération que les sous-espaces V_λ sont unidimensionnels et que (9.4.8) implique $-(\lambda_0 - k\alpha) = \lambda_0 - (j-k)\alpha$, $0 \leqslant k \leqslant j$. Démontrons la propriété 3). Soit $\lambda = \lambda_0 - k\alpha$ le poids de la représentation π; si $\lambda + \alpha$ est un poids, alors $k \geqslant 1$ et $\pi(x) f_k \neq 0$ en vertu de III. Puisque $f_k \in V_\lambda$, on a $\pi(x) V_\lambda \neq (0)$. Si $\lambda - \alpha$ est un poids, alors $k \leqslant j - 1$ et $\pi(y) f_k \neq 0$.

Démontrons la propriété 4). Il suffit de considérer le cas $v = f_k$. On a $s = k$, et $t = j - k$ et l'on tire de la formule (9.4.7)

$$\pi(x)\pi(y) f_k = (j-k)\pi(x) f_{k+1} = (k+1)(j-k) f_k = (s+1)t f_k,$$

$$\pi(y)\pi(x) f_k = k\pi(y) f_{k-1} = k(j+1-k) f_k = s(t+1) f_k,$$

ce qui démontre les égalités (9.4.9).

REMARQUE. Pour chaque entier non négatif j les formules (9.4.7) déterminent une représentation π de l'algèbre de Lie $sl(2)$ dans l'espace V à base $f_0, f_1, \ldots, f_j$. Cette représentation est irréductible. En effet, si W est un sous-espace invariant de la représentation π, alors W est invariant, en particulier, relativement à l'opé-

rateur $\pi(h)$, et il est donc engendré par les vecteurs propres de l'opérateur $\pi(h)$ situés dans W. Mais tous les vecteurs propres de l'opérateur $\pi(h)$ sont $f_0, f_1, \ldots, f_j$. Si $f_k \in W$, alors $f_l \in W$ quel que soit $l = 0, 1, \ldots, j$, de sorte que f_l est multiple de $\pi(x)^{k-l} f_k$ pour $k \geqslant l$ et f_l est multiple de $\pi(y)^{l-k} f_k$ pour $l \geqslant k$. Par conséquent $W = V$, i.e. π est irréductible.

9.5. Structure des α-séries de racines. Appliquons les résultats obtenus à la représentation π de l'algèbre de Lie L_α isomorphe à $sl(2)$, où π est la restriction de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie L à la sous-algèbre L_α et au sous-espace L_S (voir I de 9.3).

I. *Soient α, β des racines de l'agèbre de Lie L, et $\alpha \neq 0$. Alors la α-série S contenant β est constituée par toutes les racines de la forme $\beta + k\alpha$, où $p \leqslant k \leqslant q$. Par ailleurs*

$$-2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = p + q. \tag{9.5.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons d'abord que $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$ et donc les différentes racines d'une même α-série prennent des valeurs distinctes sur l'élément h'_α. Soit H^α le sous-espace de H engendré par le vecteur h'_α. Chaque racine γ de l'algèbre de Lie L définit, par restriction à H^α, un certain poids de la représentation π de l'algèbre de Lie $sl(2)$. Puisque les sous-espaces L^α des racines sont unidimensionnels pour $\alpha \neq 0$, la représentation π est soit irréductible, soit se présente comme la somme d'une représentation irréductible et d'une représentation nulle dans un certain sous-espace $W \subset L_S \cap H$ (ce qui est possible seulement dans le cas où la α-série S contient la racine nulle). Alors la forme de la α-série S se déduit de la proposition III de 9.4. Puisque les restrictions des racines $\beta + q\alpha$ et $\beta + p\alpha$ sur H^α coïncident avec λ_0 et $-\lambda_0$ respectivement, on a $(\beta + q\alpha)(h'_\alpha) = \lambda_0(h'_\alpha)$, $(\beta + p\alpha)(h'_\alpha) = -\lambda_0(h'_\alpha)$. En ajoutant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$2\beta(h'_\alpha) + (p + q)(\alpha, \alpha) = 0,$$

d'où l'on tire (9.5.1).

II. *Si α, β et $\alpha + \beta$ sont des racines non nulles, alors* $[L^\alpha, L^\beta] = L^{\alpha+\beta}$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous savons que $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ et $\dim L^{\alpha+\beta} = 1$. D'autre part, la propriété 3) du théorème de 9.4 implique $\operatorname{ad}(e_\alpha) L^\beta \neq (0)$.

III. *Les seules racines proportionnelles à la racine $\alpha \neq 0$ sont 0, α, $-\alpha$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'ensemble $\{m\alpha\}$, où m est un entier et $p \leqslant m \leqslant q$, forme la α-série des racines qui con-

tient α. Etant donné que $[L^{\alpha}, L^{\alpha}] = 0$ et $[L^{-\alpha}, L^{-\alpha}] = 0$, il découle de II que 2α et -2α ne sont pas des racines. Puisque $(-\alpha)$ est une racine (voir II de 9.1), on a $p = -1$, $q = 1$. Si $\beta = c\alpha$ est une racine de l'algèbre de Lie, où c est un nombre complexe, alors $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = 2c$ doit être un entier en vertu de (9.5.1). Par conséquent, si c n'est pas entier, on a $c = k + 1/2$, où k est entier. En vertu de (9.5.1) pour la α-série de la racine β, on a $p + q = -2k - 1$; puisque $p \leqslant 0 \leqslant q$, où p et q sont entiers, on a $p \leqslant -k - 1$, $q \geqslant -k$. Par conséquent, $\alpha/2$ et $-\alpha/2$ sont des racines de l'agèbre de Lie L; mais alors $\alpha = 2(\alpha/2)$ ne peut être une racine, d'après ce que nous venons de démontrer. La contradiction obtenue montre que c est un entier, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ceci termine la démonstration de la proposition III.

9.6. Racines simples et racines positives. Désignons par H_0 l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs h'_{α} à coefficients réels. Alors H_0 est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ des réels; il est évident que $H_0 \subset H$.

I. *La dimension de l'espace H_0 sur* $\mathbf{R}$ *est égale à la dimension de H sur* $\mathbf{C}$. *La restriction de la forme de Killing à H_0 est définie positive et prend des valeurs réelles. L'algèbre de Lie H est égale à la somme directe $H_0 + iH_0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Δ l'ensemble des racines non nulles de l'algèbre de Lie L relativement à H. On tire de VI, § 8, et de III, 9.1 que

$$(h, h') = \sum_{\beta \in \Delta} \beta(h)\, \beta(h') \tag{9.6.1}$$

quels que soient $h, h' \in H$. En particulier, $(h'_{\alpha}, h'_{\alpha}) = \sum_{\beta \in \Delta} (\beta(h'_{\alpha}))^2 = \sum_{\beta \in \Delta} r^2_{\beta\alpha}(\alpha, \alpha)^2$. D'autre part, $(h'_{\alpha}, h'_{\alpha}) = (\alpha, \alpha)$ donc $(\alpha, \alpha) = \left(\sum_{\beta \in \Delta} r^2_{\beta\alpha}\right)^{-1}$. Ainsi (α, α) est un nombre posifif. Si $p_{\beta\alpha}$, $q_{\beta\alpha}$ sont les entiers définis dans la proposition I de 9.5, alors $(\beta(h'_{\alpha}))^2 = \frac{(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})^2}{4}(\alpha, \alpha)^2$ en vertu de la formule (9.5.1). En substituant cette égalité dans (9.6.1), on obtient après des calculs évidents que $(\alpha, \alpha) = 4\left(\sum_{\beta \in \Delta} (p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})^2\right)^{-1}$. Pour $\beta \neq \alpha$ on a

$$(h'_{\alpha}, h'_{\beta}) = (\beta, \alpha) = -(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})(\alpha, \alpha)/2;$$

ce nombre est réel puisque (α, α) est réel. Lorsque $x \in H_0$, on a $x = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} h'_{\alpha}$, où les c_{α} sont des nombres réels. Alors $\beta(x) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \beta(h'_{\alpha}) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha}(\beta, \alpha)$ est un nombre réel, i.e chaque racine

prend sur H_0 des valeurs réelles. En outre, si $x \in H_0$, le nombre

$$(x, x) = \sum_{\beta \in \Delta} (\beta(x))^2$$

(voir (9.6.1)) est non négatif; si $(x, x) = 0$, alors $\beta(x) = 0$ quel que soit $\beta \in \Delta$, donc $x = 0$ (voir IV de 9.1).

Démontrons que $\dim_{\mathbf{R}} H_0 = \dim_{\mathbf{C}} H$. Il suffit de montrer que chaque système $\{h'_{\alpha_i}\}$ linéairement indépendant sur $\mathbf{R}$ l'est sur $\mathbf{C}$. Soit $\sum \lambda_i h'_{\alpha_i} = 0$ pour certains $\lambda_i \in \mathbf{C}$ qui ne sont pas tous nuls en même temps. Alors $\sum \lambda_i (h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_j}) = 0$. C'est un système d'équations linéaires homogènes en λ_i à coefficients réels $(h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_j})$. Si un tel système possède une solution complexe non nulle, elle possède également une solution réelle non nulle; mais ceci est impossible car $\{h'_{\alpha_i}\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbf{R}$.

Il est évident que $H_0 \cap iH_0 = (0)$, d'autre part $\dim_{\mathbf{C}} (H_0 + iH_0) = \dim_{\mathbf{R}} H_0$, mais $\dim_{\mathbf{R}} H_0 = \dim_{\mathbf{C}} H$, donc $H_0 + iH_0 = H$. Ceci termine la démonstration de la proposition I.

Un ensemble M est dit *ordonné par la relation* $<$ si pour chaque couple de ses éléments a, b on a une et une seule des relations $a < b$, $b < a$ ou $a = b$; les relations $a < b$ et $b < c$ impliquent que $a < c$. Les relations $a < b$ et $b > a$ sont équivalentes par définition.

Un espace vectoriel réel V de dimension finie est un *espace vectoriel ordonné* si V est un ensemble ordonné, et la relation d'ordre $<$ vérifie les conditions suivantes:

a) si $x, y \in V$, $x > 0$, $y > 0$, alors $x + y > 0$;

b) si $x \in V$, $x > 0$, et a est un nombre réel positif, alors $ax > 0$.

L'élément x est *positif* lorsque $x > 0$.

Soit maintenant $e_1, \ldots, e_n$ une base de l'espace vectoriel réel V. Posons $x > y$ pour $x, y \in V$ si $x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ et si le premier nombre non nul dans la suite $a_1, \ldots, a_n$ est positif. Un tel ordre s'appelle *ordre lexicographique* de l'espace V relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$.

II. *Un espace vectoriel V, muni de l'ordre lexicographique relativement à une certaine base de V, est un espace vectoriel ordonné.*

La démonstration élémentaire de cette assertion est laissée au lecteur.

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, V^* l'espace des fonctionnelles linéaires sur V, $e_1, \ldots, e_n$ une base de V, et $f_1, \ldots, f_n$ la base de V^* *biorthogonale* à $e_1, \ldots, e_n$ (i.e. $f_j(e_i) = \left\{\begin{matrix} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{matrix}\right)$. L'ordre lexicographique de l'espace V^* relative-

ment à la base $f_1, \ldots, f_n$ est appelé *ordre lexicographique relativemet à la base* $e_1, \ldots, e_n$.

Ainsi, ayant muni l'espace V^* de l'ordre lexicographique relativement à $e_1, \ldots, e_n$, nous disons que $f > g$, $f, g \in V^*$, si $f(e_i) = g(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $f(e_{k+1}) > g(e_{k+1})$.

Soit $h_1, \ldots, h_r$ une base de l'espace H_0. Introduisons dans l'espace H_0^* des fonctionnelles linéaires sur H_0 l'ordre lexicographique relativement à la base $h_1, \ldots, h_r$.

Une racine est dite *positive* lorsque c'est un élément positif de H_0^*. Une racine positive est dite *simple* si elle ne peut être représentée sous forme de somme de deux racines positives.

Il est évident que $\alpha > 0$ si et seulement si $0 > -\alpha$, donc l'ensemble de toutes les racines non nulles Δ est la réunion $\Delta_+ \cup (-\Delta_+)$, où Δ_+ est l'ensemble des racines positives.

III. *Si* $\dim H = r$, *alors il existe exactement* r *racines simples* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *qui forment une base de l'espace* H_0^*. *Chaque racine* β *peut être représentée sous forme de la somme* $\sum m_i\alpha_i$, *où les* m_i *sont des entiers de même signe.*

Démonstration. Montrons que les racines simples sont linéairement indépendantes. Remarquons tout d'abord que lorsque α_i, α_j sont des racines simples, alors leur différence $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas une racine. En effet, si $\alpha_i - \alpha_j = \beta \in \Delta$, on a soit $\beta > 0$, et alors l'égalité $\alpha_i = \alpha_j + \beta$ est contraire à la simplicité de α_i, soit $\beta < 0$, et l'égalité $\alpha_j = \alpha_i - \beta$ est en contradiction avec la simplicité de α_j. On tire alors de I de 9.5 pour $\beta = \alpha_i$, $\alpha = \alpha_j$, que

$$-2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = q \geqslant 0, \tag{9.6.2}$$

car $p = 0$ en vertu de ce que nous venons de démontrer. Ainsi $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$.

Supposons maintenant que le système des racines simples est linéairement dépendant. Alors, pour certains entiers non négatifs a_i, b_j, on doit avoir la relation $\sum (a_i - b_j)\alpha_i = 0$, donc $\sum\limits_i a_i\alpha_i = \sum\limits_j b_j\alpha_j > 0$, où les racines simples figurant dans le premier et le deuxième membre de l'égalité sont distinctes. Soit $\gamma = \sum\limits_i a_i\alpha_i$; alors

$$(\gamma, \gamma) = (\sum_i a_i\alpha_i, \sum_j b_j\alpha_j) = \sum_{i, j} a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j).$$

Puisque $(\gamma, \gamma) \geqslant 0$, $a_i b_j \geqslant 0$, $(\alpha_i, \alpha_j) \geqslant 0$, l'égalité n'est possible que dans le cas $(\gamma, \gamma) = 0$, d'où $\gamma = 0$.

Montrons que chaque racine $\beta > 0$ peut être présentée sous forme d'une somme de racines simples à coefficients entiers non

négatifs. Ceci est évident pour une racine qui est l'élément minimal de l'ensemble Δ_+ relativement à l'ordre envisagé. Si la racine $\beta > 0$ n'est pas minimale, alors elle est soit simple (dans ce cas notre assertion est évidente), soit se présente sous la forme $\beta = \gamma + \delta$, où γ, δ sont des racines positives. Il est évident que $\gamma < \beta$, $\delta < \beta$; donc, en admettant que chaque racine positive β' strictement inférieure à β se représente sous la forme $\beta' = \sum m_i \alpha_i$ avec des coefficients entiers non négatifs, nous terminerons la démonstration par récurrence.

Enfin, les racines positives engendrent l'espace H^* (par exemple, en vertu de I), donc les racines simples engendrent également cet espace. Désignons le système des racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ par Π. Les nombres entiers

$$n_{ij} = -2\,(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i) \tag{9.6.3}$$

sont appelés *nombres de Cartan*.

IV. *Le système Δ_+ des racines positives se retrouve d'une manière et d'une seule d'après le système Π des racines simples.*

Démonstration. Il découle de III que chaque racine positive β est simple ou se met sous la forme $\beta = \gamma + \alpha_i$, où γ est une racine positive, α_i une racine simple. En effet, soit $\beta = \sum m_i \alpha_i$, où les m_i sont des entiers non négatifs. Puisque $(\beta, \beta) = \sum m_i \times \times (\beta, \alpha_i) > 0$ et $m_i \geqslant 0$, nous avons $(\beta, \alpha_i) > 0$ pour au moins une valeur de i. Alors il découle de I de 9. 5 que

$$p_{\beta\alpha_i} + q_{\beta\alpha_i} = -2\,(\beta, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) < 0;$$

donc $p_{\beta\alpha_i} < 0$; par conséquent, $\gamma = \beta - \alpha_i$ est une racine. Alors ou bien $\gamma = 0$, i.e. $\beta = \alpha_i$ est une racine simple, ou bien $\gamma > 0$, car si l'on avait $\gamma < 0$, la racine $\alpha_i = \beta + (-\gamma)$ ne serait pas simple.

Trouvons maintenant parmi les expressions de la forme $\sum m_i \alpha_i$, où les m_i sont des entiers non négatifs, celles qui sont des racines. Appelons *ordre* de la combinaison linéaire $\sum m_i \alpha_i$ le nombre naturel $m = \sum m_i$. Les combinaisons linéaires d'ordre 1 sont les racines α_i. Supposons que l'on a déjà trouvé toutes les racines d'ordre $\leqslant m$. Chaque racine d'ordre $m + 1$ peut être représentée sous la forme $\gamma + \alpha_i$, où γ est une racine d'ordre m. Il suffit donc de déterminer celles des sommes $\gamma + \alpha_i$ qui sont des racines. Soit $\gamma \neq \alpha_i$. Montrons que la α_i-série qui contient γ est constituée uniquement par des racines positives. En effet, $\gamma = \sum_{j \neq i} m_j \alpha_j + m_i \alpha_i$, où au moins un des nombres m_j est positif. On déduit donc de III que le vecteur $\gamma + k\alpha_i = \sum_{j \neq i} m_j \alpha_j + (m_i + k)\,\alpha_i$ peut être une racine seulement dans le cas où $m_i + k \geqslant 0$; alors $\gamma + k\alpha_i > 0$. En outre, lorsque

$k \leqslant 0$, l'expression $\gamma + k\alpha_i$ est d'ordre $m + k \leqslant m$, mais toutes ces racines nous sont connues par hypothèse de récurrence. Par conséquent, nous connaissons le nombre p défini dans la proposition I de 9.5. La relation (9.5.1) se met sous la forme

$$p + q = -2\,(\gamma,\ \alpha_i)/(\alpha_i,\ \alpha_i),$$

d'où nous pouvons trouver le nombre q. Le vecteur $\gamma + \alpha_i$ est racine si et seulement si $q \geqslant 1$.

On dit que le système de racines simples Π *se décompose* si $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, où les ensembles Π' et Π'' sont non vides et les sous-espaces H' et H'' de l'espace H engendrés par les vecteurs $h'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Pi'$, et $h'_{\alpha''}$, $\alpha'' \in \Pi''$, respectivement sont orthogonaux relativement à la forme de Killing.

V. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple. L est simple si et seulement si le système des racines simples de L ne se décompose pas.*

Démonstration. Soit $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et $H' \perp H''$. Désignons par Δ'_+ l'ensemble de toutes les racines positives de la forme $\sum m_i\alpha_i$, où les m_i sont des entiers non négatifs, $\alpha_i \in \Pi'$; définissons d'une manière analogue Δ''_+. Si $\alpha' \in \Delta'_+$, alors $h'_{\alpha'} = \sum m_i h'_{\alpha_i} \in H'$; d'une manière analogue, si $\alpha'' \in \Delta''_+$, alors $h'_{\alpha''} \in H''$, donc deux racines quelconques $\alpha' \in \Delta'_+$, $\alpha'' \in \Delta''_+$ sont orthogonales entre elles. La différence $\alpha' - \alpha''$ ne peut être racine puisque $\alpha' - \alpha'' = \sum m_i\alpha_i - \sum n_j\beta_j$, où $\alpha_i \in \Delta'_+$, $\beta_j \in \Delta''_+$, $m_i \geqslant 0$, $n_j \geqslant 0$, tandis que chaque racine doit admettre la représentation sous forme d'une combinaison linéaire de racines simples à coefficients de même signe. D'autre part, il découle de la proposition I de 9.5 que pour la α''-série qui contient α' on a $p + q = -2\,(\alpha',\ \alpha'')/(\alpha'',\ \alpha'') = 0$; comme $p = 0$ d'après le précédent, on a $q = 0$, i.e. $\alpha' + \alpha''$ n'est pas racine. Par conséquent, chaque racine positive appartient soit à Δ'_+, soit à Δ''_+, i.e. $\Delta = \Delta'_+ \cup \Delta''_+$.

Posons $L' = H' + \sum\limits_{\alpha \in \Delta'_+} (L^{\alpha} + L^{-\alpha})$. Si α, $\beta \in \Delta'_+$, alors $\alpha \pm \beta \in \Delta'_+ \cup (-\Delta'_+)$. En outre, $[H',\ L^{\alpha}] \subset L^{\alpha}$ et $[L^{\alpha},\ L^{-\alpha}] = \{Ch'_{\alpha}\} \subset H'$. Par conséquent, L'. est une sous-algèbre de Lie de L. Définissons d'une manière analogue la sous-algèbre L''. Puisque $\pm\alpha' \pm \alpha''$ n'est pas racine, on a $[L^{\pm\alpha'},\ L^{\pm\alpha''}] = 0$. En outre, $[h'_{\alpha'},\ e_{\alpha''}] = (\alpha',\ \alpha'')\,e_{\alpha''} = 0$ car $(\alpha',\ \alpha'') = 0$; donc $[H',\ L^{\pm\alpha''}] = 0$; d'une manière analogue $[H'',\ L^{\pm\alpha'}] = 0$. Puisque H est commutative, on a $[H',\ H''] = 0$. Ceci entraîne $[L',\ L''] = 0$, i.e. l'algèbre de Lie L se décompose en une somme directe des sous-algèbres L' et L'', ce qui signifie que L n'est pas simple.

Supposons maintenant que L n'est pas simple. Alors $L = L' + L''$ où L' et L'' sont des idéaux de L. Le vecteur $e_{\alpha} \in L^{\alpha}$ se représente

donc d'une manière et d'une seule sous forme de la somme $e_\alpha = e'_\alpha + e''_\alpha$, où $e'_\alpha \in L'$, $e''_\alpha \in L''$. Si $h \in H$, alors

$$0 = [h, e_\alpha] - \alpha(h) e_\alpha = [h, e'_\alpha] - \alpha(h) e'_\alpha + [h, e''_\alpha] - \alpha(h) e''_\alpha.$$

Comme $[h, e'_\alpha] \in L'$, $[h, e''_\alpha] \in L''$, on a $[h, e'_\alpha] - \alpha(h) e'_\alpha = 0$, $[h, e''_\alpha] - \alpha(h) e''_\alpha = 0$. D'où l'on tire que e'_α et e''_α sont situés dans L^α. Mais $\dim L^\alpha = 1$, tandis que les vecteurs e'_α, e''_α sont orthogonaux; par conséquent, on a soit $e'_\alpha = 0$, soit $e''_\alpha = 0$. Si $e''_\alpha = 0$, alors $L^\alpha \subset L'$. L' étant orthogonal à L'', on a $e_{-\alpha} \notin L''$ d'après II de 9.1, alors $e_{-\alpha} \in L'$ et $L_{-\alpha} \subset L'$. En outre $h'_\alpha = -[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in L'$; d'une manière analogue, lorsque $e'_\alpha = 0$, on a $L^\alpha \subset L''$, $L^{-\alpha} \subset L''$, $h'_\alpha \in L''$.

Désignons par Δ' (respectivement Δ'') l'ensemble de toutes les racines α telles que $L^\alpha \subset L'$ (respectivement $L^\alpha \subset L''$). Si $\alpha \in \Delta'$, $\beta \in \Delta''$, on a $(\alpha, \beta) = (h'_\alpha, h'_\beta) = 0$ car $(L', L'') = 0$. Alors $\Pi = (\Pi \cap \Delta') \cup (\Pi \cap \Delta'')$ et les sous-espaces $H' \subset L'$ et $H'' \subset L''$ sont orthogonaux. Il est également évident que $H = (H \cap L') + (H \cap L'')$, ce qui termine la démonstration de la proposition V.

9.7. Base de Weyl dans une algèbre de Lie semi-simple. Soit $\{h_1, \ldots, h_r\}$ une base de H. En ajoutant à cette base les vecteurs $e_\alpha \in L^\alpha$ pour toutes les racines non nulles α de l'algèbre de Lie L, on obtient une base de L. On peut supposer que les vecteurs e_α sont choisis de manière à avoir $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$. On a alors les relations

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha; \tag{9.7.1}$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -h'_\alpha; \tag{9.7.2}$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta \neq 0 \text{ n'est pas une racine,} \\ N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ est une racine non nulle;} \end{cases} \tag{9.7.3}$$

$$(h, h'_\alpha) = \alpha(h). \tag{9.7.4}$$

Posons $N_{\alpha\beta} = 0$ lorsque $\alpha + \beta \neq 0$ n'est pas une racine. Il découle des formules (9.7.1) à (9.7.4) que la structure de l'algèbre de Lie L est entièrement définie par les nombres $N_{\alpha\beta}$. Indiquons certaines relations entre ces nombres.

I. a) *Pour des racines quelconques* α, β *on a* $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$.

b) *Soient* α, β, γ *des racines non nulles telles que* $\alpha + \beta + \gamma = 0$. *Alors*

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}. \tag{9.7.5}$$

c) *Soient* α, β, γ, δ *des racines non nulles telles que* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, *mais les sommes de chaque couple des racines* α, β, γ, δ *ne sont pas nulles. Alors*

$$N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} = 0. \tag{9.7.6}$$

Démonstration. Puisque $[e_\alpha, e_\beta] = -[e_\beta, e_\alpha]$, on a $N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} =$

$= -N_{\beta\alpha}e_{\alpha+\beta}$. Si $\alpha+\beta\neq 0$ est une racine, alors $e_{\alpha+\beta}\neq 0$ et $N_{\alpha\beta}= -N_{\beta\alpha}$. Si $\alpha+\beta\neq 0$ n'est pas une racine, alors $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha}=0$. Ceci démontre l'assertion a).

Soient $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$ des racines et $\alpha+\beta+\gamma=0$. Alors $[e_\beta, e_\gamma]=N_{\beta\gamma}e_{\beta+\gamma}=N_{\beta\gamma}e_{-\alpha}$, donc $[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]]=N_{\beta\gamma}[e_\alpha, e_{-\alpha}]= -N_{\beta\gamma}h'_\alpha$. Il découle de l'identité de Jacobi pour e_α, e_β, e_γ que

$$N_{\beta\gamma}h'_\alpha+N_{\gamma\alpha}h'_\beta+N_{\alpha\beta}h'_\gamma=0,$$

d'où

$$N_{\beta\gamma}\alpha+N_{\gamma\alpha}\beta+N_{\alpha\beta}\gamma=0.$$

D'autre part, $\alpha+\beta+\gamma=0$. Si la relation (9.7.5) n'était pas vraie, alors les racines α, β, γ seraient proportionnelles à l'une d'elles, par exemple à α. Alors on aurait soit $\beta=-\alpha$, soit $\gamma=-\alpha$. Dans chacun des cas une des racines est nulle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Par conséquent, l'égalité (9.7.5) est satisfaite.

Enfin, soient α, β, γ, δ des racines non nulles et telles que les sommes de deux racines quelconques ne sont pas nulles; supposons que $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$. Alors $[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] = N_{\beta\gamma}\,[e_\alpha, e_{\beta+\gamma}] = N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\,\beta+\gamma}e_{-\delta}$, car $\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma=-\delta$. Si $N_{\beta\gamma}\neq 0$, alors $\beta+\gamma$ est une racine; en appliquant (9.7.5) on obtient l'égalité $N_{\alpha,\,\beta+\gamma}=N_{\delta\alpha}=-N_{\alpha\delta}$. D'où l'on tire

$$[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]]=-N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}e_{-\delta}$$

et l'identité de Jacobi pour e_α, e_β, e_γ donne la relation (9.7.6). Si toutes les sommes des couples des racines α, β, γ, δ ne sont pas des racines, alors (9.7.6) est de la forme $0=0$.

II. *Soient* α, β *des racines non nulles et* $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha\neq\beta$. *Si la* α*-série contenant* β *est constituée par tous les vecteurs de la forme* $\beta+k\alpha$, $p\leqslant k\leqslant q$, *alors*

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\,-\beta}=q(1-p)(\alpha,\,\alpha)/2. \qquad (9.7.7)$$

Démonstration. La racine β n'étant pas multiple de α, les sous-espaces $L^{\beta+k\alpha}$ sont unidimensionnels et donc la représentation de la sous-algèbre de Lie $L_\alpha=L^\alpha+L^{-\alpha}+H^\alpha$ dans l'espace $\sum_{k=p}^{q} L^{\beta+k\alpha}$ est irréductible. Servons-nous de l'assertion 4) du théorème 9.4, i.e. des formules (9.4.9). Posons $x_\alpha=e_\alpha$, $y_\alpha= -2e_{-\alpha}/(\alpha,\,\alpha)$, alors (9.7.2) et (9.3.2) impliquent pour tous ces x_α et y_α toutes les relations (9.3.1). Alors on tire de (9.4.9)

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]]=-(\alpha,\,\alpha)[y_\alpha, [x_\alpha, e_\beta]]/2= -(\alpha,\,\alpha)((1-p)q/2)e_\beta. \qquad (9.7.8)$$

D'autre part,

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]]=N_{\alpha\beta}[e_{-\alpha}, e_{\alpha+\beta}]=N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\,\alpha+\beta}e_\beta. \qquad (9.7.9)$$

Si $\alpha + \beta$ n'est pas racine, alors en vertu de (9.7.3) $q = 0$ et $N_{\alpha\beta} = 0$ et donc on a l'égalité (9.7.7). Si $\alpha + \beta$ est une racine, alors en appliquant l'égalité (9.7.5) aux racines $-\alpha$, $\alpha + \beta$, $-\beta$ on obtient

$$N_{-\alpha,\, \alpha+\beta} = N_{-\beta,\, -\alpha}. \tag{9.7.10}$$

En substituant (9.7.10) dans (9.7.9) et en comparant avec (9.7.8) on obtient

$$N_{\alpha\beta}N_{-\beta,\, -\alpha} = -(\alpha,\ \alpha)(1-p)\,q/2; \tag{9.7.11}$$

comme $N_{-\beta,\, -\alpha} = -N_{-\alpha,\, -\beta}$, (9.7.11) implique (9.7.7).

III. *Soient L, L' des algèbres de Lie simples, H et H' les sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie L et L' respectivement. Soit Δ (respectivement Δ') l'ensemble des racines non nulles de l'algèbre de Lie L (respectivement L'). Supposons que l'on a choisi des vecteurs $e_\alpha \in L^\alpha$ tels que les relations* (9.7.1) *à* (9.7.4) *sont vérifiées pour une famille donnée de constantes $N_{\alpha\beta}$. Soit φ une application linéaire bijective de l'espace H_0 sur l'espace H_0' telle que l'application adjointe φ^* envoie le système Δ' sur le système Δ. Posons $\alpha' = (\varphi^*)^{-1}\alpha$ pour chaque $\alpha \in \Delta$. Il existe alors des vecteurs $e'_{\alpha'} \in (L')^{\alpha'}$ vérifiant les relations* (9.7.1) *à* (9.7.4) *pour les constantes $N_{\alpha',\beta'} = N_{\alpha\beta}$, i.e.*

$$[e'_{\alpha'},\ e'_{\beta'}] = N_{\alpha\beta}e'_{\alpha'+\beta'} \tag{9.7.12}$$

pour tous les α', $\beta' \in \Delta'$.

D é m o n s t r a t i o n. Les restrictions des formes de Killing des algèbres de Lie L et L' à H_0 et H_0' sont des formes bilinéaires réelles définies positives. On peut identifier grâce à ces formes H_0 avec H_0^* et H_0' avec $H_0'^*$; par conséquent, les formes de Killing sur L et L' définissent des produits scalaires sur les espaces réels H_0^* et $H_0'^*$. Montrons que l'application φ^* de l'espace $H_0'^*$ sur l'espace H_0^* est isométrique relativement à ces produits scalaires. En vertu de la proposition I de 9.5 on a l'égalité $-2(\beta,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha) = p + q$ pour tous les α, $\beta \in \Delta$, où les nombres p et q sont déterminés par la condition que la α-série contenant β est constituée par les vecteurs $\beta + k\alpha$, où $p \leqslant k \leqslant q$. Puisque φ^* est une application bijective de Δ' sur Δ et conserve les opérations linéaires, on a $p = p'$, $q = q'$, donc $-2(\beta,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha) = -2(\beta',\ \alpha')/(\alpha',\ \alpha')$ pour tous les α, $\beta \in \Delta$, ou

$$(\beta,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha) = (\beta',\ \alpha')/(\alpha',\ \alpha') \tag{9.7.13}$$

pour tous les α, $\beta \in \Delta$. En changeant les rôles de α et β, on obtient

$$(\alpha,\ \beta)/(\beta,\ \beta) = (\alpha',\ \beta')/(\beta',\ \beta'). \tag{9.7.14}$$

Les relations (9.7.13) et (9.7.14) impliquent l'égalité

$$(\alpha,\ \alpha)/(\alpha',\ \alpha') = (\beta,\ \beta)/(\beta',\ \beta') \tag{9.7.15}$$

pour $(\alpha,\ \beta) \neq 0$. En vertu de V, 9.6, il existe pour chaque couple de racines α, $\beta \in \Delta$ une suite $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$ de racines

non nulles de l'algèbre de Lie L vérifiant la condition $(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \neq 0$ pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n-1$. D'où l'on tire que la relation (9.7.15) a lieu pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$. Soit $(\beta, \beta)/(\beta', \beta') = k$; alors pour chaque $\alpha \in \Delta$ on a

$$(\alpha, \alpha) = k(\alpha', \alpha') \qquad (9.7.16)$$

où le coefficient k ne dépend pas de α. En substituant l'égalité (9.7.16) dans la relation (9.7.13), on obtient

$$(\alpha, \beta) = k(\alpha', \beta') \qquad (9.7.17)$$

pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$, où la constante k ne dépend pas de α et β. D'autre part, (9.6.1) implique

$$(\alpha, \beta) = (h'_\alpha, h'_\beta) = \sum_\gamma \gamma(h'_\alpha)\gamma(h'_\beta) = \sum_\gamma (\gamma, \alpha)(\gamma, \beta); \qquad (9.7.18)$$

d'une manière analogue

$$(\alpha', \beta') = \sum_{\gamma'} (\gamma', \alpha')(\gamma', \beta'); \qquad (9.7.19)$$

en substituant (9.7.17) dans (9.7.19), on obtient $(\alpha, \beta) = k^2(\alpha', \beta')$ pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$. Par conséquent $k = k^2$; puisque $(\alpha, \alpha) \neq 0$ pour $\alpha \neq 0$, on a $k = 1$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite de l'existence des vecteurs vérifiant l'égalité (9.7.12). Pour pouvoir construire ces vecteurs par récurrence, munissons l'espace H_0^* de l'ordre lexicographique défini par une base $h_1, \ldots, h_r$ choisie une fois pour toutes. Soit ρ une racine positive de l'algèbre de Lie L; désignons par Δ_ρ l'ensemble de toutes les racines non nulles α qui vérifient l'inégalité $-\rho < \alpha < \rho$. Supposons déjà construits les vecteurs $e'_{\alpha'} \in L'^{\alpha'}$ pour tous les $\alpha \in \Delta_\rho$, la relation (9.7.12) étant satisfaite pour $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_\rho$. Construisons le vecteur $e'_{\rho'}$ de la manière suivante: si ρ est une racine simple, choisissons alors $e'_{\rho'} \neq 0$ arbitrairement; si ρ n'est pas simple, elle se met sous la forme $\rho = \alpha + \beta$, où $\alpha, \beta \in \Delta_\rho$, et dans ce cas on définit le vecteur $e'_{\rho'}$ de manière que la relation (9.7.12) soit satisfaite pour la décomposition $\rho = \alpha + \beta$ donnée. Définissons ensuite le vecteur $e'_{\rho'}$ par la condition $(e'_{\rho'}, e'_{-\rho'}) = -1$.

Si σ est une racine positive telle que $\rho < \sigma$ et s'il n'y a aucune autre racine positive entre ρ et σ, alors $\Delta_\sigma = \Delta_\rho \cup \{\rho, -\rho\}$; ainsi, les vecteurs $e'_{\rho'}$ et $e'_{-\rho'}$ une fois construits, les vecteurs voulus $e'_{\alpha'} \in L'^{\alpha'}$ seront construits pour tous les $\alpha \in \Delta_\sigma$. Soient $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_\sigma$; définissons le nombre $N'_{\gamma', \delta'}$ par la relation $[e'_{\gamma'}, e'_{\delta'}] = N'_{\gamma', \delta'} e'_{\gamma'+\delta'}$. Ayant démontré que $N_{\gamma\delta} = N'_{\gamma', \delta'}$, nous aurons démontré la relation (9.7.12) pour tous les $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_\sigma$.

Si γ, δ et $\gamma + \delta$ sont contenus dans Δ_ρ, on a $N_{\gamma\delta} = N'_{\gamma', \delta'}$ par récurrence. Si $\gamma, \delta \in \Delta_\rho$ et $\gamma + \delta = \rho$, on peut supposer que la

décomposition $\rho = \gamma + \delta$ ne coïncide pas avec la décomposition $\rho = \alpha + \beta$. Alors on a $\alpha + \beta + (-\gamma) + (-\delta) = 0$, les sommes des couples des racines α, β, $-\gamma$, $-\delta$ n'étant pas nulles. En vertu de I, c), on a l'égalité (9.7.6). Donc

$$N_{\alpha\beta}N_{-\gamma,-\delta} = -N_{\beta,-\gamma}N_{\alpha,-\delta} - N_{-\gamma,\alpha}N_{\beta,-\delta}. \qquad (9.7.20)$$

D'une manière analogue, on obtient dans L' l'égalité

$$N'_{\alpha',\beta'}N'_{-\gamma',-\delta'} = -N'_{\beta',-\gamma'}N'_{\alpha',-\delta'} - N'_{-\gamma',\alpha'}N'_{\beta',-\delta'}. \qquad (9.7.21)$$

Puisque les racines $\beta - \gamma$, $\alpha - \delta$, $\alpha - \gamma$, $\beta - \delta$ sont contenues dans Δ_ρ, on remarquera que les deuxièmes membres des égalités (9.7.20) et (9.7.21) sont identiques par l'hypothèse de récurrence. En outre, $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha',\beta'}$ d'après la définition du vecteur $e'_{\rho'}$, et $N_{\alpha\beta} \neq 0$. D'où l'on tire $N_{-\gamma,-\delta} = N'_{-\gamma',-\delta'}$. En nous servant du fait que l'application φ^* est isométrique (ce que nous avons déjà démontré), nous obtenons $(\gamma, \gamma) = (\gamma', \gamma')$, et II implique $N_{\gamma\delta}N_{-\gamma,-\delta} = q(1-p) \times \times (\gamma, \gamma)/2 = N'_{\gamma',\delta'}N'_{-\gamma',-\delta'}$, d'où $N_{\gamma\delta} = N'_{\gamma',\delta'}$. Ainsi, lorsque $\gamma + \delta = \rho$, on a $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma\delta}$ et $N'_{-\gamma',-\delta'} = N_{-\gamma,-\delta}$. Si γ, $\delta \in \Delta_\rho$ et $\gamma + \delta = -\rho$, on a $-\gamma$, $-\delta \in \Delta_\rho$ et $(-\gamma) + (-\delta) = \rho$; d'après ce qui précède, $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma,\delta}$. Enfin, lorsque γ, δ, $-(\gamma + \delta)$ sont situés dans Δ_σ, une des racines seulement peut être égale à $\pm\rho$. En appliquant I b) on réduit la démonstration de l'égalité $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma\delta}$ au cas $\gamma + \delta = \pm\rho$. Le nombre de racines positives étant fini, le raisonnement ci-dessus permet de démontrer la proposition III par récurrence.

IV. *Soient L, L' des algèbres de Lie simples, et H, H' des sous-algèbres de Lie de L et L' respectivement. Soit Δ (respectivement Δ') l'ensemble des racines non nulles de l'algèbre de Lie L (respectivement L'). Soit φ une application linéaire bijective de l'espace H_0 sur l'espace H'_0 telle que l'application adjointe φ^* envoie le système Δ' sur le système Δ. Il existe alors un isomorphisme f de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie L' qui prolonge φ.*

D é m o n s t r a t i o n. Choisissons $e_\alpha \in L^\alpha$ de manière à avoir les relations (9.7.1) à (9.7.4). Construisons le système $e_{\alpha'}$ qui vérifie les hypothèses de la proposition III. Posons

$$f(h) = \varphi(h) \quad \text{pour} \quad h \in H_0, \qquad f(e_\alpha) = e_{\alpha'}. \qquad (9.7.22)$$

D'après I de 9.6, une base de l'espace vectoriel réel H_0 est en même temps une base de l'espace linéaire complexe H; par conséquent, l'application f définie par la formule (9.7.22) peut être prolongée à une application linéaire de l'espace vectoriel complexe L dans l'espace vectoriel complexe L'. Il est évident que f applique une base de L dans une base de L' ; c'est donc un isomorphisme de l'espace L sur l'espace L'. Montrons que f est un homomorphisme d'algèbres

de Lie. Nous avons

$$f([h, h']) = f(0) = 0 = [f(h), f(h')];$$

$$f([h, e_\alpha]) = f(\alpha(h) e_\alpha) = \alpha(h) e'_{\alpha'} = \alpha'(\varphi(h)) e'_{\alpha'} =$$
$$= [\varphi(h), e'_{\alpha'}] = [f(h), f(e_\alpha)];$$

$$f([e_\alpha, e_\beta]) = f(N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta} e'_{\alpha'+\beta'} =$$
$$= [e'_{\alpha'}, e'_{\beta'}] = [f(e_\alpha), f(e_\beta)], \text{ si } \alpha + \beta \neq 0;$$

$$f([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = f(-h'_\alpha) = [e'_{\alpha'}, e_{-\alpha'}] = [f(e_\alpha), f(e_{-\alpha})],$$

ce qui termine la démonstration de la proposition IV.
On tire immédiatement de IV

V. *Une algèbre de Lie simple L se détermine uniquement, à un isomorphisme près, par l'espace H et le système des racines.*

VI. *On peut choisir les vecteurs $e_\alpha \in L^\alpha$ de manière à avoir, en plus des égalités* (9.7.1) *à* (9.7.4), *la relation*

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,\,-\beta}. \tag{9.7.23}$$

Démonstration. Il est évident que l'application φ_0: $h \to -h$ de l'espace H_0 conserve le système des racines, en appliquant chaque racine α dans la racine $\alpha' = -\alpha$. Conformément à IV, il existe un isomorphisme Φ de l'algèbre de Lie L sur elle-même qui prolonge cette symétrie. Choisissons les vecteurs $f_\alpha \in L^\alpha$ de sorte que $(f_\alpha, f_{-\alpha}) = -1$ et soit $\Phi(f_\alpha) = f'_{-\alpha} = \rho_\alpha f_{-\alpha}$. Alors $(f'_{-\alpha}, f'_\alpha) = (f_\alpha, f_{-\alpha}) = -1$, donc $\rho_\alpha \rho_{-\alpha} = 1$. Soit $e_\alpha = \rho_\alpha^{-1/2} f_\alpha$, où $\rho_\alpha^{-1/2}$ désigne une des racines carrées de ρ_α. Soit $(\rho_{-\alpha})^{-1/2} = (\rho_\alpha)^{1/2}$. Alors $\Phi(e_\alpha) = \rho_\alpha^{-1/2} \rho_\alpha f_{-\alpha} = \rho_\alpha^{1/2} f_{-\alpha} = \rho_{-\alpha}^{-1/2} f_{-\alpha} = e_{-\alpha}$. Puisque Φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, on a $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha',\,\beta'} = N_{-\alpha,\,-\beta}$ pour les vecteurs $e_\alpha \in L^\alpha$, ce qui termine la démonstration.

VII. *Si l'on a la relation* (9.7.23), *alors* $N^2_{\alpha,\,\beta} = q(1-p) \times (\alpha, \alpha)/2 \geqslant 0$, *i.e. les* $N_{\alpha,\,\beta}$ *sont des nombres réels.*

La proposition découle immédiatement de II et VI. Puisque $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$, on a $q(1-p)/2 \geqslant 0$.

La base de l'espace L obtenue en complétant une certaine base $\{h_1, \ldots, h_r\}$ de l'espace H par des vecteurs $e_\alpha \in L^\alpha$ tels que $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$ et $N_{\alpha,\,\beta} = N_{-\alpha,\,-\beta}$ s'appelle *base de Weyl* de l'algèbre de Lie L.

§ 10. Classification des algèbres de Lie simples

10.1. Schémas de Dynkine et leur classification. Soient L une algèbre de Lie simple complexe, et H sa sous-algèbre de Cartan. Désignons par Π le système des racines simples de l'algèbre de Lie L

relativement à H. Soit H_0^* l'espace vectoriel réel formé des combinaisons linéaires des éléments du système Π.

I. a) *Dans l'espace H_0^* la forme de Killing est définie positive et prend des valeurs réelles*;

b) Π *est un système de vecteurs linéairement indépendants dans* H_0^*;

c) *lorsque* α, β *sont des éléments distincts de* Π, *le nombre* $n_{\alpha,\beta} = -2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ *est entier et non négatif*;

d) *le système* Π *ne peut être représenté sous forme de réunion de sous-ensembles* Π' *et* Π'' *non vides de manière à ce que chaque vecteur de* Π' *soit orthogonal à chaque vecteur de* Π''.

Démonstration. a) découle de I, 9.6; b) se déduit de III, 9.6; c) de (9.6.2) et d) de V, 9.6.

II. *Le système* Π *détermine l'algèbre de Lie* L *de manière unique à un isomorphisme près.*

Démonstration. En vertu de IV, 9.6, le système Π détermine uniquement le système Δ de racines non nulles de l'algèbre de Lie L. D'autre part, en vertu de V, 9.7, le système Δ définit l'algèbre de Lie L de manière unique à un isomorphisme près.

Les propositions I et II ramènent le problème de la classification des algèbres de Lie complexes simples à la recherche de tous les systèmes Π de vecteurs de l'espace euclidien de dimension finie qui vérifient les assertions b) à d) de la proposition I. Notons que les propriétés b) à d) se conservent lorsqu'on multiplie tous les vecteurs du système Π par un même nombre λ. D'autre part, le système Π détermine de manière unique le système Δ de toutes les racines de l'algèbre de Lie L, tandis que pour toutes les racines α, $\beta \in \Delta$ on doit avoir la relation $(\alpha, \beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} (\gamma, \alpha)(\gamma, \beta)$ (voir (9.6.1)). Ainsi, le fait que Π est un système de racines simples de l'algèbre de Lie détermine de manière unique le « coefficient de similitude » λ.

Soit Π un système de vecteurs de l'espace euclidien réel de dimension finie, vérifiant les conditions b) à d) de la proposition I. Soient α, $\beta \in \Pi$; supposons que $\alpha \neq \pm\beta$ et α n'est pas orthogonal à β. Alors $n_{\alpha,\beta} \neq 0$, $n_{\beta,\alpha} \neq 0$, et c) donne

$$n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 4(\alpha, \beta)^2/\{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)\} = 4\cos^2\theta, \qquad (10.1.1)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs α et β. Par hypothèse, $(\alpha, \beta) \neq 0$ et α n'est pas proportionnel à β. Par conséquent, on obtient de (10.1.1)

$$0 < n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 4\cos^2\theta < 4,$$

où le produit $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha}$ est entier. Alors $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 1$, 2 ou 3. Donc le plus petit des nombres entiers $n_{\alpha,\beta}$ et $n_{\beta,\alpha}$ est égal à un. Sup-

posons, pour fixer les idées, que $(\alpha, \alpha) \geqslant (\beta, \beta)$. Alors $n_{\alpha, \beta} \leqslant n_{\beta, \alpha}$, donc $n_{\alpha, \beta} = 1$, $n_{\beta, \alpha} = 4\cos^2\theta$ et

$$(\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = n_{\beta, \alpha}/n_{\alpha, \beta} = 4\cos^2\theta. \tag{10.1.2}$$

Dans les cas $n_{\beta, \alpha} = 1, 2, 3$ on obtient respectivement $\cos\theta = -1/2$, $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{3}/2$, d'où $\theta = 2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$ respectivement.

Faisons correspondre à chaque système Π un schéma de Dynkine S, construit de la manière suivante: on figure d'abord chaque élément $\alpha \in \Pi$ par un point du plan, muni du coefficient numérique (α, α); on joint ensuite deux points distincts et non orthogonaux α, β par un trait simple, double ou triple suivant que le nombre $4\cos^2\theta$ est égal à 1, 2 ou 3 respectivement; lorsque α est orthogonal à β, on ne joint pas ces deux points. Nous dirons alors que le schéma S *correspond* au système des racines Π. Le nombre d'éléments du système Π s'appelle *ordre du schéma de Dynkine* S. Un schéma de Dynkine est dit *admissible* s'il est construit d'après un système Π vérifiant les conditions b) et c) de la proposition I. Il est évident que *le système* Π *vérifie la condition* d) *si et seulement si le schéma de Dynkine* S *correspondant à* Π *est connexe.*

III. *En éliminant dans un schéma de Dynkine admissible quelques-uns de ces points (et les traits issus de ces points) on obtient à nouveau un schéma de Dynkine admissible.*

Démonstration. Soit S le schéma de Dynkine qui correspond au système Π. Eliminer de S un certain nombre de points équivaut à éliminer certains éléments du système Π. Puisque les propriétés b) et c) sont valables pour chaque sous-système Π' du système Π, le schéma de Dynkine qui correspond au système Π' est admissible.

IV. *Chaque schéma de Dynkine admissible connexe d'ordre 2 coïncide (à similitude près) avec un des trois schémas suivants:*

1 1 2 1 3 1

Démonstration. $(\alpha, \beta) \neq 0$ en vertu de la connexité, donc lorsque $(\alpha, \alpha) \geqslant (\beta, \beta)$ on a $4\cos^2\theta = (\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = 1$, 2 ou 3; les schémas correspondent à ces trois cas.

Etudions maintenant les propriétés des liaisons des schémas de Dynkine admissibles.

V. *Dans un schéma de Dynkine admissible d'ordre* n *il ne peut y avoir plus de* $(n - 1)$ *couples de points liés.*

Démonstration. Soit $x=\sum_{\alpha\in\Pi} \alpha/\sqrt{(\alpha, \alpha)}$. Comme nous le savons, pour des α, β distincts nous avons $(\alpha, \beta)\leqslant 0$, et lorsque $(\alpha, \beta)\neq 0$, le nombre $4\cos^2\theta$ n'est pas inférieur à un, donc $2(\alpha, \beta)/\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}\leqslant -1$. Si le système Π possède plus de $n-1$ couples de vecteurs non orthogonaux, alors

$$(x, x)=\sum_{\alpha\in\Pi}(\alpha, \alpha)/(\alpha, \alpha)+2\sum_{\substack{\alpha,\,\beta\in\Pi\\ \alpha\neq\beta}}(\alpha, \beta)/\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}\leqslant n-n=0,$$

d'où $x = 0$, ce qui est en contradiction avec l'indépendance linéaire du système Π.

VI. *Un schéma de Dynkine admissible ne contient pas de lignes brisées fermées.*

Démonstration. Soit S un schéma de Dynkine admissible. Si S contient une ligne brisée fermée S', alors S' est un schéma admissible en vertu de III. D'autre part, tous les éléments de S' sont liés deux à deux, ce qui est impossible en vertu de V.

VII. *Si S' est un sous-schéma connexe d'un schéma de Dynkine admissible S, alors chaque élément $\alpha\notin S'$ ne peut être lié à plus d'un élément de S'.*

Démonstration. Supposons que l'élément α du schéma S, $\alpha\notin S'$, est lié aux éléments β et γ de S'. Puisque le schéma S' est connexe, il doit exister une famille $\beta_0=\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n=\gamma$ d'éléments de S' dont deux éléments voisins seraient liés. Le sous-schéma du schéma S, constitué par l'élément α et les éléments β_i, $i=0, 1, \ldots, n$, contiendrait $n+2$ éléments et au moins $n+2$ couples liés, ce qui est impossible en vertu de V.

VIII. *Le nombre maximal d'arêtes issues d'un même point d'un schéma admissible est égal à trois.*

Démonstration. Soit $\alpha\in\Pi$; soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les éléments liés avec α. Si $i\neq j$, alors β_i et β_j ne sont pas liés (autrement les éléments α, β_i, β_j formeraient une ligne brisée fermée, ce qui est impossible en vertu de VI).

Par conséquent, si $\beta_i\neq\beta_j$, les éléments β_i et β_j sont orthogonaux. Supposons que le vecteur γ est orthogonal à tous les β_j et est situé dans le sous-espace engendré par les vecteurs α et β_j. Soit θ_0 l'angle entre α et γ, et θ_j l'angle entre α et β_j. Puisque α se décompose suivant la base orthogonale constituée par les vecteurs γ et β_j, on a $\cos^2\theta_0+\sum_i\cos^2\theta_i=1$. Le système de vecteurs formé de α et β_j est linéairement indépendant, et donc le vecteur α n'est pas ortho-

gonal à γ. Par conséquent $\cos^2\theta_0 \neq 0$ et donc $\sum_j \cos^2\theta_j < 1$. Ainsi $\sum_j 4\cos^2\theta_j < 4$, où $4\cos^2\theta_j$ est le nombre d'arêtes qui joignent α et β_j.

IX. *Un schéma admissible connexe de Dynkine d'ordre $n \geqslant 3$ ne peut avoir de liaisons triples.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que α et β sont liés par des liaisons triples. Alors (voir VIII), aucune autre arête ne peut être issue ni de l'élément α, ni de l'élément β. Puisque, par hypothèse, le schéma est connexe, chaque schéma connexe admissible à liaison triple entre α et β se réduit aux éléments α et β, i.e. est d'ordre 2.

Appelons *chaîne* une suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ de points du schéma de Dynkine S dans laquelle les éléments voisins α_k et α_{k+1}, $k = 1, \ldots, n$, sont liés. En vertu de VI, il ne peut y avoir d'autres liaisons entre les éléments de la chaîne. Une chaîne donnée C est dite *homogène* si toutes les liaisons qu'elle contient sont simples.

Chaque chaîne C est évidemment connexe. En vertu de VII, chaque élément $\beta \in S$ n e peut être lié à plus d'un élément de C.

X. *Soient S un schéma de Dynkine admissible, C une chaîne homogène dans S. Constituons un nouveau schéma de Dynkine S' en remplaçant la chaîne C par un point unique que l'on suppose lié à l'élément $\beta \notin C$ par une liaison de multiplicité p ($p = 0, 1, 2$ ou 3) si l'élément β est lié dans le schéma S par une liaison de multiplicité p avec un certain élément de la chaîne C. Le schéma S' est admissible.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Π' le système de vecteurs constitué par tous les vecteurs $\beta \notin C$, $\beta \in \Pi$, et le vecteur $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$, où $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Montrons que le schéma S' correspond au système Π'. En effet, si $\beta \notin C$ et β est lié à α_i, le vecteur β est orthogonal à tous les α_j, $j \neq i$, donc $(\beta, \alpha) = (\beta, \alpha_i)$. D'autre part, $(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} ((\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1})) + (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})$. En effet, puisque la chaîne est homogène, on a $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$, mais $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = -2(\alpha_i, \alpha_{i+1})/(\alpha_i, \alpha_i)$, donc $(\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$. En outre, d'après (10.1.2), on tire de la relation $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1$ que $(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1})$, donc $(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_k, \alpha_k)$ pour tous les i, $k = 1, \ldots, n+1$. Par conséquent, $(\alpha, \alpha) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (\alpha_k, \alpha_k)$ pour tous les $k = 1, \ldots, n+1$. Les liaisons entre les éléments qui ne participent pas à la chaîne C n'ont pas changé. Par conséquent le schéma S' correspond au système Π', ce système Π' vérifiant l'assertion c) de la proposition I. Il est également évident que les vecteurs du système

Π' sont linéairement indépendants, i.e. on a la condition b) de la proposition I. Ainsi le schéma de Dynkine S' est admissible.

XI. *Les schémas de Dynkine*

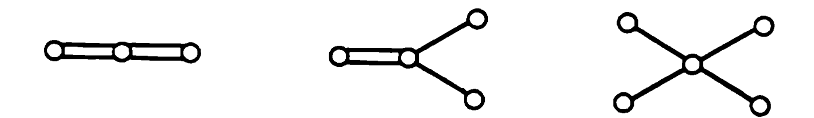
(H)

(I)

(K)

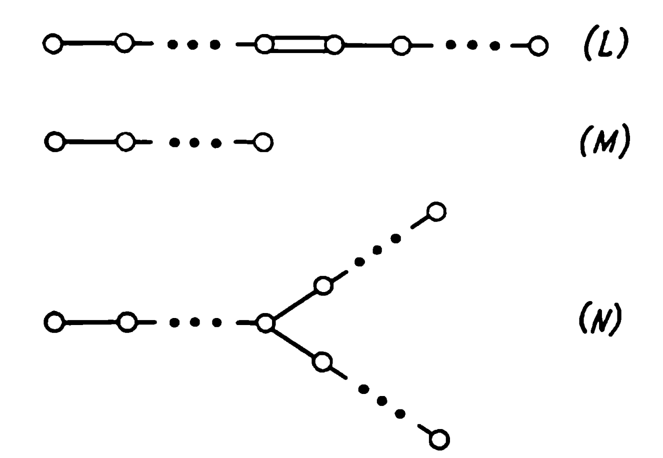
ne sont pas admissibles.

Démonstration. En appliquant X aux chaînes $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$ de ces schémas, nous obtenons respectivement les schémas de Dynkine



qui sont inadmissibles en vertu de VIII.

XII. *Chaque schéma de Dynkine connexe admissible d'ordre* $n \geqslant 3$ *appartient à une des classes*



Démonstration. En vertu de IX, le schéma de Dynkine S connexe admissible ne contient pas de liaisons triples. Supposons que S contient une liaison double, i.e. un sous-schéma constitué par deux points réunis par deux traits. Elargissons ce sous-schéma jusqu'à obtenir une chaîne maximale C. Si la chaîne C contient deux liaisons doubles, alors elle contient un sous-schéma de la forme (H),

qui est inadmissible. Lorsque $C \neq S$, en vertu de la connexité du schéma de Dynkine S, il existe un élément $\beta \notin C$ lié avec un certain élément de la chaîne C (cet élément est unique en vertu de VII). Si β est lié avec un élément d'extrémité de C, on peut élargir la chaîne C en y ajoutant β; ceci est en contradiction avec le fait que la chaîne C est maximale. Il ne reste à supposer que β est lié avec un élément intérieur de la chaîne C, alors le schéma de Dynkine S contient un sous-schéma du type (I) qui est inadmissible. Ceci est impossible en vertu de III. Ainsi $C = S$, i.e. le schéma de Dynkine S est une chaîne qui ne contient qu'une seule liaison double ; le schéma considéré est donc de la forme (L).

Supposons maintenant que toutes les liaisons de S sont simples. Si chaque point de S est au plus lié à deux points, la chaîne maximale C du schéma S coïncide avec S. En effet, si $C \neq S$, il existe un élément $\beta \notin C$ lié à un élément bien déterminé de la chaîne C ; si β est lié à un élément de bout de C, alors la chaîne C peut être élargie ce qui est contraire à sa maximalité. Mais β ne peut être lié à aucun autre élément de C, puisque, par hypothèse, chaque point du schéma de Dynkine S est au plus lié à deux points. La contradiction obtenue montre que le schéma S est de la forme (M).

Supposons enfin que toutes les liaisons de S sont simples, et supposons qu'il existe dans S un point lié à trois points. Alors S contient un sous-schéma en forme d'étoile à trois branches. Prolongeons ce schéma jusqu'à obtenir un sous-schéma maximal $\widetilde{S} \subset S$ à trois branches, i.e. un sous-schéma maximal de la forme (N). Si $\widetilde{S} \neq S$, alors il existe un élément $\beta \notin \widetilde{S}$ lié avec un certain élément du sous-schéma $\widetilde{S}$ (unique en vertu de VII). Comme $\widetilde{S}$ est un sous-schéma maximal de la forme (N), l'élément β ne peut être lié à une des extrémités de $\widetilde{S}$. Mais si β est lié à un élément intérieur de $\widetilde{S}$, ceci signifie que S contient un sous-schéma de la forme (K), qui n'est pas admissible. La contradiction obtenue montre que $\widetilde{S} = S$, i.e. S est de la forme (N).

XIII. *Soit* $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *une chaîne de vecteurs de même longueur, i.e.* $(\alpha_i, \alpha_i) = a$. *Posons* $\alpha = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k$. *Alors* $(\alpha, \alpha) = n(n+1)a/2$.

D é m o n s t r a t i o n.

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} k^2 (\alpha_k, \alpha_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(\alpha_k, \alpha_{k+1}) =$$

$$= n^2 a - \sum_{k=1}^{n-1} ka = n(n+1)a/2.$$

THÉORÈME. *Chaque schéma admissible connexe de Dynkine est de l'un des types A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_4, G_2 (au multiple commun près), où les schémas A_n à G_2 ont la forme suivante*

A_n 2 2 … 2 $(n \geqslant 1)$

B_n 2 2 … 2 1 $(n \geqslant 2)$

C_n 2 2 … 2 4 $(n \geqslant 3)$

D_n 2 2 … 2 2 2, 2 $(n \geqslant 4)$

E_n 2 2 … 2 2 2 2, 2 $(n = 6, 7, 8)$

F_4 2 2 1 1

G_2 2 6

(l'indice qui figure dans la notation est égal au nombre d'éléments dans le schéma de Dynkine).

Démonstration. Considérons un schéma de la forme (L). Deux éléments liés par une liaison double sont tels que le carré de la longueur de l'un des vecteurs est deux fois plus grand que le carré de la longueur de l'autre (voir (10.1.2)). Les éléments liés par une liaison simple sont de même longueur. Ainsi, à un facteur miltiplicatif commun près, chaque schéma du type (L) est de la forme

1 1 … 1 1 2 2 … 2

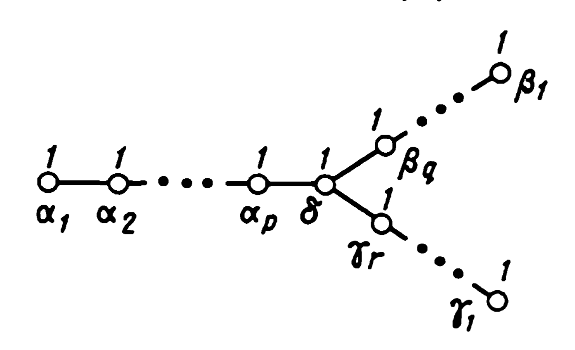
α_1 α_2 … α_{p-1} α_p β_q β_{q-1} … β_1

où les racines $\beta_1, \ldots, \beta_q$ ont un carré de longueur deux fois plus grand que celui des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Posons $\alpha = \sum_{k=1}^{p} k\alpha_k$, $\beta = \sum_{j=1}^{q} j\beta_j$. En vertu de XIII, $(\alpha, \alpha) = p(p+1)/2$, $(\beta, \beta) =$

$= q(q+1)$. Il est évident que $(\alpha, \beta) = pq(\alpha_p, \beta_q) = -pq$. Puisque les vecteurs α et β ne sont pas colinéaires, on a $(\alpha, \beta)^2 < < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ (i.e. $p^2q^2 < pq(p+1)(q+1)/2$) ou $2pq < < (p+1)(q+1)$, d'où $(p-1)(q-1) < 2$. Par conséquent, trois cas sont possibles: soit $p = 1$ et q est arbitraire, soit $q = 1$ et p est arbitraire, soit $p = q = 2$. Les schémas correspondants sont B_{q+1}, C_{p+1} et F_4 respectivement. Il est évident que les schémas B_2 et C_2 diffèrent seulement par un facteur.

Le schéma (M) à n éléments est désigné par (A_n).

Considérons maintenant le schéma (N):



Posons $\alpha = \sum_{i=1}^{p} i\alpha_i$, $\beta = \sum_{j=1}^{q} j\beta_j$, $\gamma = \sum_{k=1}^{r} k\gamma_k$. Puisque les vecteurs α, β et γ sont orthogonaux deux à deux, et le vecteur δ n'est pas leur combinaison linéaire (le système Π étant linéairement indépendant), la somme des carrés des cosinus des angles entre le vecteur δ et les vecteurs α, β et γ respectivement doit être strictement inférieure à un. Trouvons ces cosinus carrés. En vertu de XIII on a $(\alpha, \alpha) = p(p+1)/2$. Puisque $(\delta, \delta) = 1$ et $(\alpha, \delta) = p(\alpha_p, \delta) = -p/2$, le cosinus carré de l'angle θ entre les vecteurs α et δ est égal à $\cos^2\theta = \frac{(\alpha, \delta)^2}{(\alpha, \alpha)(\delta, \delta)} = \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)\Big/2$. On calcule d'une manière analogue les deux autres cosinus carrés; ainsi on doit avoir l'inégalité

$$\left(1 - \frac{1}{p+1} + 1 - \frac{1}{q+1} + 1 - \frac{1}{r+1}\right)\frac{1}{2} < 1$$

ou

$$(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} + (r+1)^{-1} > 1.$$

Supposons que $p \geqslant q \geqslant r$; alors $(p+1)^{-1} \leqslant (q+1)^{-1} \leqslant \leqslant (r+1)^{-1}$ et $3 > r+1$, i.e. $r = 1$. On doit alors avoir l'inégalité $(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} > 1/2$, d'où $2/(q+1) > 1/2$, i.e. $q < 3$. Par conséquent, deux cas sont possibles: soit $q = 1$ et p est quelconque, soit $q = 2$ et $2 \leqslant p \leqslant 4$. Les schémas correspondants sont désignés par D_{p+3} $(p \geqslant 1)$ et E_{p+4} $(2 \leqslant p \leqslant 4)$.

Le schéma d'ordre 2 à liaison triple est désigné par G_2.

Le théorème est démontré.

Les systèmes de racines des algèbres de Lie des types (A_n) à (G_2) sont étudiés en détail dans le livre de N. Bourbaki [1].

10.2. Quelques propositions auxiliaires. Par la suite nous allons construire des algèbres de Lie simples dont les systèmes de racines correspondent aux schémas de Dynkine des types A_n, B_n, C_n et D_n. Maintenant nous allons démontrer deux propositions qui seront nécessaires à la construction de ces algèbres.

I. *Soient L une algèbre de Lie semi-simple, et H sa sous-algèbre de Cartan de dimension r. Si le sous-système $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, du système de toutes les racines est tel que pour chaque racine α de l'algèbre de Lie L relativement à H on a l'égalité $\alpha = \pm\sum m_i\alpha_i$, où les m_i sont des entiers non négatifs, alors l'ensemble $\{\alpha_i\}$ est un système de racines simples.*

Démonstration. Les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ engendrent le système de toutes les racines dont le rang est égal à la dimension r de la sous-algèbre de Lie H. Par conséquent les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ forment une base de l'espace H^*. Munissons l'espace H_0^* (voir 9.6) de l'ordre lexicographique correspondant à la base $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Relativement à cet ordre, les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont positives, et l'ensemble de toutes les racines positives est constitué par les racines de la forme $\sum m_i\alpha_i$, où $m_i \geqslant 0$. Montrons que relativement à cet ordre les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont simples. Supposons que $\alpha_i = \beta + \gamma$, où β et γ sont des racines positives. Alors $\beta = \sum m_j\alpha_j$; $\gamma = \sum n_j\alpha_j$, où m_j, $n_j \geqslant 0$ et $\alpha_i = \sum\limits_j (m_j + n_j)\,\alpha_j$. Il découle de l'indépendance linéaire des vecteurs α_j que $m_j + n_j = 0$ pour $j \neq i$ et $m_i + n_i = 1$, i.e. une des racines β ou γ est égale à α, tandis que l'autre est nulle. Ainsi toutes les racines α_i sont simples. Il n'y a pas d'autres racines simples, puisque le nombre de racines simples est égal à r.

II. *Soient L une algèbre de Lie complexe, H une sous-algèbre abélienne de L, et Δ l'ensemble fini de fonctionnelles linéaires non nulles sur H. Pour chaque fonctionnelle linéaire λ (qui n'appartient pas nécessairement à Δ) sur H, désignons par L^λ l'ensemble de tous les éléments $\lambda \in L$ tels que $[h, x] = \lambda(h)\,x$ pour tous les $h \in H$. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées:*

a) *l'enveloppe linéaire de l'ensemble Δ coïncide avec l'espace H^* des fonctionnelles linéaires sur H;*

b) *lorsque $\alpha \in \Delta$, on a $-\alpha \in \Delta$, et $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq (0)$ pour chaque $\alpha \in \Delta$;*

c) $$L = H + \sum_{\alpha\in\Delta} L^\alpha. \qquad (10.2.1)$$

Alors L est une algèbre de Lie semi-simple, H est une sous-algèbre de Cartan dans L, et la relation (10.2.1) *est la décomposition de l'algèbre de Lie L relativement à la sous-algèbre de Cartan H.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que la décomposition (10.2.1) est la décomposition de l'algèbre de Lie en une somme directe de sous-espaces. La condition c) implique que $L^0 \subset H$; puisque H est abélienne, on a $H \subset L^0$; par conséquent $H = L^0$. De la définition de L^λ et de l'identité de Jacobi, on tire immédiatement que pour tous les $\lambda, \mu \in H^*$ on a $[L^\lambda, L^\mu] \subset L^{\lambda+\mu}$ (voir II, § 8); en particulier, $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. Puisque $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq$ $\neq (0)$, on a $L^\alpha \neq (0)$. Fixons $\alpha \in \Delta$ et choisissons des éléments $x'_\alpha \in L^\alpha$, $x'_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ de sorte que l'élément $\bar{h}_\alpha = [x'_\alpha, x'_{-\alpha}]$ soit différent de zéro.

Considérons l'ensemble $\Delta_{\beta, \alpha}$ des éléments de la famille Δ que l'on peut représenter sous la forme $\beta + k\alpha$ pour un certain entier k. Puisque l'ensemble Δ est fini, l'ensemble $\Delta_{\beta, \alpha}$ l'est aussi. Introduisons le sous-espace $V = \sum_{\gamma \in \Delta_{\beta, \alpha}} L^\gamma$. La relation $[L^\lambda, L^\mu] \subset L^{\lambda+\mu}$ implique $[x'_\alpha, V] \subset V$ et $[x'_{-\alpha}, V] \subset V$. Par conséquent, la restriction de l'opérateur ad $\bar{h}_\alpha$ au sous-espace V est le commutateur des restrictions au sous-espace V des opérateurs ad x'_α et ad $x'_{-\alpha}$, d'où l'on tire que la trace de l'opérateur ad $\bar{h}_\alpha$ dans le sous-espace V est nulle. Soit d_k la dimension de l'espace $L^{\beta+k\alpha}$ (en particulier, $d_k = 0$ pour $\beta + k\alpha \notin \Delta_{\beta, \alpha}$); alors la trace de l'opérateur ad $\bar{h}_\alpha$ dans le sous-espace $L^{\beta+k\alpha}$ est égale à $d_k (\beta + k\alpha)(\bar{h}_\alpha)$; donc

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} \bar{h}_\alpha |_V) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (\beta + k\alpha)(\bar{h}_\alpha) \tag{10.2.2}$$

(la somme est en fait une somme finie, puisque $d_k = 0$ pour $\beta + k\alpha \notin \Delta_{\beta, \alpha}$). Transformons la relation (10.2.2), il vient

$$\beta(\bar{h}_\alpha) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k = -\alpha(\bar{h}_\alpha) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k d_k,$$

où $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k d_k$ sont des entiers dont le premier n'est pas nul. Par conséquent, pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$ il existe un nombre rationnel $q_{\beta, \alpha}$ tel que

$$\beta(\bar{h}_\alpha) = q_{\beta, \alpha} \alpha(\bar{h}_\alpha). \tag{10.2.3}$$

Si $\alpha(\bar{h}_\alpha) = 0$ on a d'après (10.2.3) $\beta(\bar{h}_\alpha) = 0$ quel que soit $\beta \in \Delta$. Alors la condition a) implique $\lambda(\bar{h}_\alpha) = 0$ pour tous les $\lambda \in H^*$, donc $\bar{h}_\alpha = 0$ ce qui est en contradiction avec la définition de $\bar{h}_\alpha$.

Ainsi

$$\alpha(\overline{h}_\alpha) \neq 0 \text{ pour chaque } \alpha \in \Delta. \tag{10.2.4}$$

Montrons que $\dim(L^\alpha) = 1$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. Soit $V' = \mathbf{C}x'_{-\alpha} + \mathbf{C}\overline{h}_\alpha + \sum_{k \geq 1} L^{k\alpha}$ un sous-espace de l'espace L (ici $L^{k\alpha} = (0)$ lorsque $k\alpha \notin \Delta$). Le lecteur vérifiera sans difficulté que le sous-espace V' est invariant relativement aux opérateurs $\operatorname{ad} x'_\alpha$ et $\operatorname{ad} x'_{-\alpha}$, et la trace de la restriction à V' de l'opérateur $\operatorname{ad} h'_\alpha$ est donc égale à zéro, car $\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha|_{V'} = [\operatorname{ad} x'_\alpha|_{V'}, \operatorname{ad} x'_{-\alpha}|_{V'}]$. Soit δ_k la dimension de l'espace $L^{k\alpha}$. Alors la trace de l'opérateur $\operatorname{ad} h_\alpha$ dans l'espace $L^{k\alpha}$ est égale à $\delta_k (k\alpha)(\overline{h}_\alpha)$; en outre, $(\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha)(\overline{h}_\alpha) = 0$ et $(\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha)(x'_{-\alpha}) = -\alpha(\overline{h}_\alpha) x'_{-\alpha}$, donc

$$0 = \operatorname{tr} \operatorname{ad} \overline{h}_\alpha|_{V'} = -\alpha(\overline{h}_\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k \alpha(\overline{h}_\alpha),$$

ou

$$0 = \alpha(\overline{h}_\alpha)(-1 + \delta_1 + 2\delta_2 + \ldots), \tag{10.2.5}$$

où $\delta_1 \geqslant 1$ (car $L^\alpha \neq (0)$) et $\delta_k \geqslant 0$ pour $k \geqslant 2$. Puisque $\alpha(\overline{h}_\alpha) \neq 0$ en vertu de (10.2.4), on a $\delta_1 + 2\delta_2 + \ldots = 1$, où $\delta_1 \geqslant 1$ et $\delta_k \geqslant 0$; en substituant ces relations dans (10.2.5), on obtient $\delta_1 = 1$, i.e. $\dim(L^\alpha) = 1$ quel que soit $\alpha \in \Delta$.

Introduisons les éléments $h_\alpha \in H$, $x_\alpha \in L^\alpha$, $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ en posant

$$h_\alpha = 2\overline{h}_\alpha / \alpha(\overline{h}_\alpha), \quad x_\alpha = x'_\alpha, \quad x_{-\alpha} = 2x'_{-\alpha}/\alpha(h'_\alpha). \tag{10.2.6}$$

Alors on tire de la relation $\overline{h}_\alpha = [x'_\alpha, x'_{-\alpha}]$ et de la définition de l'espace L^α que

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}, \quad [x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha. \tag{10.2.7}$$

Démontrons maintenant que L est une algèbre de Lie semi-simple. Soit R le radical de l'algèbre de Lie L. Conformément à IV, § 3, le radical R est invariant relativement à la représentation π de l'algèbre de Lie H dans l'espace L, définie par la formule $\pi(h) = \operatorname{ad} h$. Montrons que $R = (R \cap H) + \sum_{\alpha \in \Delta} (R \cap L^\alpha)$. Soit ρ la représentation de l'algèbre de Lie H dans l'espace quotient $\widetilde{L} = L/R$ défini par la représentation π; soient $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}^\alpha$ les images des espaces H, L^α dans $\widetilde{L}$ respectivement. Alors $\rho(h)\widetilde{h} = 0$, $\rho(h)\widetilde{x}_\alpha = \alpha(h)\widetilde{x}_\alpha$ quels que soient $\alpha \in \Delta$, $h \in H$, $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$, $\widetilde{x}_\alpha \in \widetilde{L}^\alpha$. Soit $\widetilde{\Delta}$ l'ensemble de tous les $\alpha \in \Delta$ tels que $\widetilde{L}^\alpha \neq (0)$. Le lecteur vérifiera facilement que les sous-espaces $\widetilde{L}^\alpha$, $\alpha \in \widetilde{\Delta}$, sont linéairement

indépendants et $\widetilde{H} \neq (0)$ implique que les sous-espaces $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}^{\alpha}$, $\alpha \in \widetilde{\Delta}$, le sont aussi. Par conséquent, la relation $h + \sum_{\alpha \in \Delta} x_{\alpha} \in R$, où $h \in H$, $x_{\alpha} \in L^{\alpha}$, implique $h \in R$, $x_{\alpha} \in R$, i.e. $R \subset (R \cap H) + \sum_{\alpha \in \Delta} (R \cap L^{\alpha})$. L'inclusion inverse est évidente ; ainsi

$$R = (R \cap H) + \sum_{\alpha \in \Delta} (R \cap L^{\alpha}). \tag{10.2.8}$$

Montrons que $R \cap L^{\alpha} = (0)$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. En effet, supposons le contraire : soit $R \cap L^{\alpha} \neq (0)$ pour un certain $\alpha \in \Delta$. L^{α} étant unidimensionnel, on a $R \cap L^{\alpha} = L^{\alpha}$, donc $x_{\alpha} \in R$. Puisque R est un idéal, les relations (10.2.7) entraînent que $h_{\alpha} \in R$, donc également que $x_{-\alpha} \in R$. L'idéal R est résoluble, mais, d'après ce que nous venons de démontrer, il contient les éléments h_{α}, x_{α}, $x_{-\alpha}$; le sous-espace $Ch_{\alpha} + L^{\alpha} + L^{-\alpha}$ qu'ils engendrent est une sous-algèbre de Lie semi-simple de l'algèbre de Lie R, ce qui est contraire à la résolubilité de l'algèbre de Lie R. Par conséquent $R \cap L^{\alpha} = (0)$ quel que soit $\alpha \in \Delta$, et la relation (10.2.8) implique $R \subset H$. Si $R \neq (0)$ et h est un élément non nul de R, il existe un élément $\lambda \in H^*$ tel que $\lambda(h) \neq 0$. La condition a) entraîne qu'il existe un élément $\alpha \in \Delta$ tel que $\alpha(h) \neq 0$. On obtient de la relation $[h, x_{\alpha}] = \alpha(h) x_{\alpha}$ que $x_{\alpha} = \alpha(h)^{-1} [h, x_{\alpha}]$ appartient à l'idéal R, ce qui est impossible puisque $R \subset H$. Ainsi $R = (0)$, i.e. L est une algèbre de Lie semi-simple. La relation (10.2.1) implique que $H = L^0$, i.e. H est sous-algèbre de Cartan de L.

10.3. Algèbres de Lie du type A_n ($n \geqslant 1$). Soit L l'algèbre de Lie $sl(n+1, \mathbf{C})$, i.e. l'algèbre de Lie des matrices carrées complexes d'ordre $n+1$ et de trace nulle. Soit H la sous-algèbre de Lie abélienne de L constituée par les matrices diagonales. Désignons par diag $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Désignons ensuite par e_{ij} la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la j-ème colonne avec la i-ème ligne, qui est égal à un. Il est évident que les matrices $e_{ii} - e_{i+1, i+1}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), e_{ij} ($i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$) forment une base de L.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ les fonctionnelles linéaires sur H définies par les formules $\lambda_i(\text{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})) = a_i$. Il est évident que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0$. Un calcul direct montre que

$$[h, e_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h) e_{ij} \tag{10.3.1}$$

pour tous les $h \in H$. Désignons par Δ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur H de la forme $\lambda_i - \lambda_j$, où $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n+1$.

Alors pour $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, nous avons conformément à (10.3.1)

$$L^{\alpha} = L^{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C}e_{ij} \quad (i \neq j), \tag{10.3.2}$$

les éléments $e_{ii} - e_{i+1,\, i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, formant une base de H; donc

$$L = H + \sum_{\alpha \in \Delta} L^{\alpha}, \tag{10.3.3}$$

i.e. pour les algèbres de Lie L et H et la famille Δ la condition c) de la proposition II de 10.2 est vérifiée. Il est évident que la famille Δ est telle que $\alpha \in \Delta$ implique $-\alpha \in \Delta$. Enfin, lorsque $\alpha(h) = 0$ quel que soit $\alpha \in \Delta$, où $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$, alors $a_i = a_{i+1}$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$; par conséquent $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_1)$ et $\operatorname{tr}(h) = (n+1)\,a_1$; comme $\operatorname{tr}(h) = 0$, alors $a_1 = 0$; donc $h = 0$. Ainsi on a la condition a) de la proposition II de 10.2. Montrons que $[L^{\alpha}, L^{-\alpha}] \neq (0)$ pour $\alpha \in \Delta$. Si $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, on a $e_{ij} \in L^{\alpha}$, $e_{ji} \in L^{-\alpha}$, et

$$[e_{ij}, e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj} \quad (i \neq j), \tag{10.3.4}$$

donc $[L^{\alpha}, L^{-\alpha}] \neq (0)$, i.e. toutes les hypothèses de la proposition II de 10.2 sont satisfaites. Par conséquent, l'algèbre de Lie $L = sl \times \times (n+1, \mathbf{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, tandis que la décomposition (10.3.3) est la décomposition de l'algèbre de Lie L correspondant à la sous-algèbre de Cartan H.

Trouvons le schéma de Dynkine pour l'algèbre de Lie L. Pour cela calculons d'abord la forme de Killing sur L. Soient $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ et $h' = \operatorname{diag}(a'_1, \ldots, a'_{n+1})$ des éléments de l'algèbre de Cartan H; en appliquant la formule (9.6.1), on obtient

$$\begin{aligned}(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\,\alpha(h') &= \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)(a'_i - a'_j) = \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_i - a_j)(a'_i - a'_j) = \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_i a'_i + a_j a'_j - a_j a'_i - a_i a'_j) = \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_i a'_i + a_j a'_j) - 2 \sum_{i \neq j} a_i a'_j.\end{aligned} \tag{10.3.5}$$

Puisque $a_1 + \ldots + a_{n+1} = 0$ et $a'_1 + \ldots + a'_{n+1} = 0$, on a

$$(a_1 + \ldots + a_{n+1})(a'_1 + \ldots + a'_{n+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n+1} a_i a'_i + \sum_{i \neq j} a_i a'_j = 0. \tag{10.3.6}$$

En substituant la relation (10.3.6) dans (10.3.5) on obtient

$$(h,\ h')=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_i a_i'+a_j a_j')+2\sum_{i=1}^{n+1}a_i a_i'=$$
$$=2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}a_i a_i'. \qquad (10.3.7)$$

La formule (10.3.7) permet de calculer la forme de Killing de l'algèbre de Lie L pour des éléments quelconques de la sous-algèbre de Cartan H. Posons

$$h'_{\lambda_i-\lambda_j}=(2(n+1))^{-1}(e_{ii}-e_{jj}) \qquad (10.3.8)$$

pour tous les $i\neq j$; on tire de (10.3.7)

$$(h,\ h'_{\lambda_i-\lambda_j})=(\lambda_i-\lambda_j)(h). \qquad (10.3.9)$$

En comparant les relations (10.3.4) et (10.3.8), nous voyons que $h'_{\lambda_i-\lambda_j}\in[L^{\lambda_i-\lambda_j},\ L^{\lambda_j-\lambda_i}]$, donc $h'_{\lambda_i-\lambda_j}$ est proportionnel à $\overline{h}_{\lambda_i-\lambda_j}$. On tire alors de la première relation (10.2.6)

$$h_{\lambda_i-\lambda_j}=2((\lambda_i-\lambda_j)(h'_{\lambda_i-\lambda_j}))^{-1}h'_{\lambda_i-\lambda_j}=e_{ii}-e_{jj} \qquad (10.3.10)$$

pour tous les $i\neq j$.

Désignons par α_i la racine $\lambda_i-\lambda_{i+1}$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Alors

$$\Delta=\{\pm(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_j),\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}. \qquad (10.3.11)$$

La proposition I de 10.2 permet de conclure que le système de racines

$$S=\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\} \qquad (10.3.12)$$

est un système de racines simples de l'algèbre de Lie L relativement à H. Le système des racines positives correspondant est l'ensemble de racines de la forme $\lambda_i-\lambda_j$, où $i<j$. En appliquant la relation (9.2.1) et l'égalité (10.3.8), nous obtenons à l'aide de (10.3.7)

$$(\alpha_i,\ \alpha_i)=(h'_{\lambda_i-\lambda_{i+1}},\ h'_{\lambda_i-\lambda_{i+1}})=$$
$$=2\cdot 2(n+1)\cdot 4^{-1}(n+1)^{-2}=(n+1)^{-1} \qquad (10.3.13)$$

pour tous les $i=1,\ \ldots,\ n$. D'une manière analogue, on trouve pour $i\neq j$

$$(\alpha_i,\ \alpha_j)=\begin{cases}0 & \text{si } |i-j|>1,\\ -2^{-1}(n+1)^{-1} & \text{si } |i-j|=1.\end{cases} \qquad (10.3.14)$$

Il découle des relations (10.3.13) et (10.3.14) que

$$n_{\alpha_i,\ \alpha_{i+1}}=1,\quad n_{\alpha_i,\ \alpha_j}=0 \text{ si } |i-j|>1, \qquad (10.3.15)$$

où les n_{α_i, α_j} sont les nombres de Cartan définis par la formule (9.6.3). Ainsi $sl\,(n+1,\ \mathbf{C})$ est une algèbre de Lie du type A_n $(n \geqslant 1)$; en particulier, $sl\,(n+1,\ \mathbf{C})$ est une algèbre de Lie simple.

10.4. Algèbres de Lie des types B_n $(n \geqslant 1)$ et D_n $(n \geqslant 2)$. Soient $m \geqslant 3$ un entier, L l'algèbre de Lie des matrices complexes antisymétriques d'ordre m, i.e. l'algèbre de Lie $so\,(m,\ \mathbf{C})$. Les éléments de l'algèbre de Lie L sont les matrices carrées $a = (a_{pq})$ d'ordre m qui vérifient la condition $a_{pq} = -a_{qp}$ $(p,\ q = 1,\ \ldots,\ m)$. Les cas $m = 2n$ $(n \geqslant 2)$ et $m = 2n+1$ $(n \geqslant 1)$ sont essentiellement différents.

a) Soit $m = 2n+1$, $n \geqslant 1$. Changeons la numération des lignes et des colonnes des matrices considérées en supposant que les indices $p,\ q$ parcourent les valeurs $-n,\ -n+1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ entières.

I. *L'algèbre de Lie $L = so\,(m,\ \mathbf{C})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices $b = (b_{pq})$, $p,\ q = -n,\ -n+1,\ \ldots,\ n$ qui vérifient la condition*

$$b_{pq} = -b_{-q,\,-p}, \quad p,\ q = -n,\ -n+1,\ \ldots,\ n. \tag{10.4.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $a_{pq} = -a_{qp}$ pour tous les $p,\ q = -n,\ -n+1,\ \ldots,\ n$, i.e.

$$a' = -a, \tag{10.4.2}$$

où a' est la transposée de a. Introduisons la matrice $\sigma = (\sigma_{pq})$, $p,\ q = -n,\ -n+1,\ \ldots,\ n$ en posant

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} (1+i)/2 & & & 0 & & & (1-i)/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (1+i)/2 & & (1-i)/2 & & \\ 0 & & & 1 & & & 0 \\ & & (1-i)/2 & & (1+i)/2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-i)/2 & & & 0 & & & (1+i)/2 \end{matrix} \right\| . \tag{10.4.3}$$

Soit $\widetilde{L}$ l'algèbre de Lie des matrices b de la forme $b = \sigma a \sigma^{-1}$, $a \in L$. Alors les algèbres de Lie L et $\widetilde{L}$ sont isomorphes, et $b \in \widetilde{L}$ si et seulement si $a \in L$, i.e.

$$(\sigma^{-1} b \sigma)' = -\sigma^{-1} b \sigma. \tag{10.4.4}$$

Un calcul direct donne

$$\sigma^{-1}=\left\|\begin{matrix} (1-i)/2 & & & & (1+i)/2 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \ldots\ldots & (1-i)/2 & & (1+i)/2 & \ldots\ldots \\ & & 1 & & \\ \ldots\ldots & (1+i)/2 & & (1-i)/2 & \ldots\ldots \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (1+i)/2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (1-i)/2 \end{matrix}\right\|, \quad \sigma'=\sigma, \qquad (10.4.5)$$

et

$$\sigma^2=\left\|\begin{matrix} 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{matrix}\right\|. \qquad (10.4.6)$$

Alors on tire des relations (10.4.4), (10.4.5) que $b \in \widetilde{L}$ si et seulement si $\sigma' b' (\sigma^{-1})' = -\sigma^{-1} b \sigma$, i.e. $\sigma b' \sigma^{-1} = -\sigma^{-1} b \sigma$, d'où

$$b' = -\sigma^{-2} b \sigma^2 = -\sigma^2 b \sigma^2. \qquad (10.4.7)$$

Il découle de la relation (10.4.6) que l'égalité (10.4.7) est équivalente aux relations (10.4.1).

Soit H le sous-espace linéaire de $\widetilde{L}$ constitué par des matrices diagonales. Il est évident que les matrices $f_{pq} = e_{pq} - e_{-q,\,-p}$ $(-n \leqslant -q < p \leqslant n)$ forment une base dans l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$ tandis que les matrices $e_{kk} - e_{-k,\,-k} = f_{kk}$, $k = 1, \ldots, n$, forment une base dans le sous-espace H, de sorte que la dimension de H est égale à n. Les relations évidentes

$$[e_{pq}, e_{kl}] = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \text{ ou } p = k,\ q = l, \\ e_{pl} & \text{si } q = k,\ p \neq l, \\ e_{pp} - e_{qq} & \text{si } p = l,\ q = k,\ p \neq q \end{cases} \qquad (10.4.8)$$

permettent d'écrire

$$[f_{kk}, f_{k_1k_1}] = 0 \quad \text{pour tous les } k, k_1,\ 1 \leqslant k, k_1 \leqslant n. \qquad (10.4.9)$$

Ainsi le sous-espace H est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\widetilde{L}$. En outre, lorsque $-n \leqslant -q < p \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient à

l'aide de (10.4.8)

$$[f_{kk}, f_{pq}] = [e_{kk} - e_{-k,-k}, e_{pq} - e_{-q,-p}] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq \pm k,\ q \neq \pm k \text{ ou } p = q = \pm k; \\ (e_{kq} - e_{-q,-k}) & \text{si } p = k,\ q \neq k; \\ (e_{-k,q} - e_{-q,k}) & \text{si } p = -k,\ q \neq -k; \\ (e_{pk} - e_{-k,-p}) & \text{si } p \neq k,\ q = k; \\ (e_{p,-k} - e_{k,-p}) & \text{si } p \neq -k,\ q = -k. \end{cases} \quad (10.4.10)$$

Il découle des relations (10.4.10) que l'on a l'égalité

$$[f_{kk}, f_{pq}] = c_{pqk} f_{pq}, \quad (10.4.11)$$

où

$$c_{pqk} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq \pm k, & q \neq \pm k \text{ ou } p = q = \pm k, \\ -1 \text{ si } p = -k, & q \neq -k \text{ ou } q = k,\ p \neq k, \\ 1 \text{ si } p = k, & q \neq k, \text{ ou } p \neq k,\ q = -k. \end{cases} \quad (10.4.12)$$

Si $h \in H$, alors $h = \sum_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$. Posons $h_0 = 0$, $h_{-k} = -h_k$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Les relations (10.4.12) fournissent

$$[h, f_{pq}] = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{pqk} h_k\Big) f_{pq} = (h_p - h_q) f_{pq} \quad (10.4.13)$$

pour tous les $h \in H$. Posons $\lambda_k(h) = h_k$ $(k = -n, -n+1, \ldots$ $\ldots, n)$; alors

$$[h, f_{pq}] = (\lambda_p - \lambda_q)(h) f_{pq} \quad (10.4.14)$$

pour tous les $h \in H$. Soit Δ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur H de la forme $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $-p < q$. Alors pour $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_p - \lambda_q$ on obtient à l'aide de (10.4.14)

$$\widetilde{L}^{\alpha} = \widetilde{L}^{\lambda_p - \lambda_q} = \mathbf{C} f_{pq}, \quad (10.4.15)$$

car les fonctionnelles $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $-p < q$, ne peuvent être identiquement nulles sur H et sont distinctes deux à deux. Remarquant que $\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_q - \lambda_p)$, on a $\Delta = -\Delta$; si $(\lambda_q - \lambda_p)(h) = 0$ pour tous les $p \neq q$, $-p < q$, on a $(\lambda_p - \lambda_q)(h) = h_p = 0$ pour $p = 1, \ldots, n$, i.e. $h = 0$. Enfin, il découle de (10.4.15) que

$$\widetilde{L} = H + \sum_{\alpha \in \Delta} \widetilde{L}^{\alpha}, \quad (10.4.16)$$

tandis que (10.4.8) implique $[f_{pq}, f_{qp}] = 2(f_{pp} - f_{qq}) \neq 0$ pour $p \neq q$, i.e. $[\widetilde{L}^{\alpha}, \widetilde{L}^{-\alpha}] \neq 0$. Ainsi, toutes les hypothèses de la propo-

sition II de 10.2 sont vérifiées, et $\widetilde{L}$ est une algèbre de Lie semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, Δ le système des racines non nulles de l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$ relativement à H.

Trouvons le schéma de Dynkine pour l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$. Soient $h, h' \in H$, et $h = \sum_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$, $h' = \sum_{k=1}^{n} h'_k f_{kk}$. Il découle de (9.6.1) que

$$(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\,\alpha(h') = \sum_{\substack{p \neq q \\ p+q>0}} (h_p - h_q)(h'_p - h'_q). \qquad (10.4.17)$$

Des calculs analogues à ceux effectués pour les algèbres de Lie du type A_n (voir (10.3.5) à (10.3.7)) donnent

$$(h, h') = (2n-1) \sum_{k=1}^{n} h_k h'_k, \qquad (10.4.18)$$

donc, pour $k \neq 0$,

$$\lambda_k(h) = (\lambda_k - \lambda_0)(h) = (h, h'_{\lambda_k}), \qquad (10.4.19)$$

où

$$h'_{\lambda_k} = (2n-1)^{-1} f_{kk}, \qquad (10.4.20)$$

tandis que pour $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p + q > 0$ on a

$$(\lambda_p - \lambda_q)(h) = (h, h'_{\lambda_p - \lambda_q}), \qquad (10.4.21)$$

où

$$h'_{\lambda_p} = (2n-1)^{-1} (f_{pp} - f_{qq}). \qquad (10.4.22)$$

Désignons par α_p la racine $\lambda_p - \lambda_{p+1}$, $p = 1, \ldots, n-1$, et posons $\alpha_n = \lambda_n$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_q &= \alpha_q + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_n && \text{si } q > 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= \alpha_q + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_{p-1} && \text{si } 0 < q < p,\\
\lambda_q &= -\lambda_{-q} && \text{si } q < 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_{-q} + \lambda_p) && \text{si } q < 0,\ p > 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_p - \lambda_q) && \text{si } q > p > 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_{-q} - \lambda_{-p}) && \text{si } p < 0,
\end{aligned}$$

et l'on tire maintenant de la proposition I de 10.2 que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est un système de racines simples de l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$. En appliquant la relation (9.2.1) et les égalités (10.4.20) et (10.4.22), nous obtenons

$$(\alpha_p, \alpha_p) = (h'_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}, h'_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}) =$$
$$= (2n-1)^{-2} \cdot 2 \cdot (2n-1) = 2(2n-1)^{-1} \qquad (10.4.23)$$

pour $p = 1, \ldots, n-1$ et, d'une manière analogue,

$$(\alpha_n, \alpha_n) = (2n-1)^{-1}, \tag{10.4.24}$$

et pour $p \neq q$ on obtient

$$(\alpha_p, \alpha_q) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |p-q| > 1, \\ -(2n-1)^{-1} & \text{pour } |p-q| = 1. \end{cases} \tag{10.4.25}$$

Les égalités (10.4.23) à (10.4.25) suggèrent la forme suivante du schéma de Dynkine de l'algèbre de Lie $\tilde{L}$:

$$\overset{\alpha_1}{\underset{2}{\circ}} - \overset{\alpha_2}{\underset{2}{\circ}} - \cdots - \overset{\alpha_{n-1}}{\underset{2}{\circ}} = \overset{\alpha_n}{\underset{1}{\circ}}$$

i.e. $\tilde{L}$ est une algèbre de Lie du type B_n. Pour $n=1$ on a $B_1 = A_1$. Comme le schéma de Dynkine est connexe, l'algèbre de Lie $\tilde{L} = so(2n+1, \mathrm{C})$ est simple.

b) Soit $m = 2n$, $n \geqslant 2$. Changeons la numération des lignes et des colonnes des éléments des matrices considérées, en supposant que les indices p, q parcourent les valeurs entières $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$)

II. *L'algèbre de Lie $L = so\,(m, \mathrm{C})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices $b = (b_{pq})$, $p, q = \pm 1, \ldots, \pm n$, qui vérifient la condition*

$$b_{pq} = -b_{-q,-p}, \quad p, q = \pm 1, \ldots, \pm n. \tag{10.4.26}$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition I. Introduisons la matrice $\sigma = (\sigma_{pq})$, $p, q = \pm 1, \ldots, \pm n$, en posant

$$\sigma = \begin{Vmatrix} (1+i)/2 & 0 & (1-i)/2 \\ & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \ddots & \\ (1-i)/2 & 0 & (1+i)/2 \end{Vmatrix}. \tag{10.4.27}$$

Soit $\tilde{L}$ l'algèbre de Lie des matrices b de la forme $b = \sigma a \sigma^{-1}$, $a \in L$. Les algèbres de Lie L et $\tilde{L}$ sont isomorphes et l'on a $b \in \tilde{L}$ si et seulement si $a \in L$, i.e.

$$(\sigma^{-1} b \sigma)' = -\sigma^{-1} b \sigma. \tag{10.4.28}$$

Des calculs analogues à ceux qui ont permis de passer de (10.4.4) à (10.4.7) nous montrent que la relation (10.4.28) est équivalente

à la relation $b' = -\sigma^2 b \sigma^2$, où

$$\sigma^2 = \begin{Vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{Vmatrix}; \qquad (10.4.29)$$

d'où l'on tire immédiatement que les relations (10.4.26) et (10.4.28) sont équivalentes.

Soit H le sous-espace linéaire de $\widetilde{L}$ constitué par des matrices diagonales. Il est évident que les matrices $f_{pq} = e_{pq} - e_{-q,\,-p}$ ($p + q > 0$, p, $q = \pm 1, \ldots, \pm n$) forment une base de l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$, en outre, les matrices $f_{kk} = e_{kk} - e_{-k,\,-k}$ ($k = 1, \ldots, n$) forment une base de l'espace H, de sorte que la dimension de H est égale à n. De même que dans le cas d'un m impair, les relations (10.4.8) impliquent les égalités

$$[f_{kk}, f_{k_1k_1}] = 0 \text{ pour tous les } k,\ k_1,\ 1 \leqslant k,\ k_1 \leqslant n, \qquad (10.4.30)$$

et

$$[f_{kk}, f_{pq}] = c_{pqk} f_{pq}, \qquad (10.4.31)$$

où

$$c_{pqk} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq \pm k,\ q \neq \pm k \text{ ou } p = q = \pm k; \\ -1 \text{ si } p = -k,\ q \neq -k, \text{ ou } q = k,\ p \neq k; \\ 1 \text{ si } p = k, \quad q \neq k \quad \text{ ou } p \neq -k,\ q = -k. \end{cases} \qquad (10.4.32)$$

Il découle des relations (10.4.30) que le sous-espace H est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\widetilde{L}$. Soit $h \in H$; alors $h = \sum_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$. Posons $h_{-k} = -h_k$ pour $k = 1, \ldots, n$ et désignons par λ_k la fonctionnelle linéaire sur H, définie par la formule $\lambda_k(h) = h_k$, $k = \pm 1, \ldots, \pm n$. Alors les égalités (10.4.31) et (10.4.32) impliquent

$$[h, f_{pq}] = (\lambda_p - \lambda_q)(h) f_{pq} \qquad (10.4.33)$$

pour tous les $h \in H$. Soit Δ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur H de la forme $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $p + q > 0$. Alors pour $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_p - \lambda_q$, on tire de (10.4.33) que

$$\widetilde{L}^{\alpha} = \widetilde{L}^{\lambda_p - \lambda_q} = \mathbf{C} f_{pq}, \qquad (10.4.34)$$

puisque les fonctionnelles $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $p + q > 0$, ne peuvent être identiquement nulles sur H et sont deux à deux différentes. Notant que $(\lambda_p - \lambda_q) = -(\lambda_q - \lambda_p)$, on a $\Delta = -\Delta$; si $(\lambda_q - \lambda_p)(h) = 0$ pour tous les $p \neq q$, $p + q > 0$, on a $(\lambda_q - \lambda_n)(h) = 0$, $(\lambda_{-q} - \lambda_n)(h) = 0$ pour tous les $q \neq \pm n$, donc

$2\lambda_q(h) = (\lambda_q - \lambda_{-q})(h) = 0$ pour tous les $q \neq \pm n$, alors $\lambda_n(h) = 0$, i.e. $h_k = 0$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$, donc $h = 0$. Enfin il découle de (10.4.34) que $\widetilde{L} = H + \sum_{\alpha \in \Delta} \widetilde{L}^{\alpha}$, tandis que (10.4.8) implique que $[f_{pq}, f_{qp}] = 2(f_{pp} - f_{qq}) \neq 0$ pour $p \neq q$, donc $[L^{\alpha}, L^{-\alpha}] \neq 0$. Ainsi, d'après la proposition II de 10.2, $\widetilde{L}$ est une algèbre de Lie semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, Δ le système associé de racines non nulles.

Trouvons le schéma de Dynkine pour l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$. Soient $h, h' \in H$, et $h = \sum_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$, $h' = \sum_{k=1}^{n} h'_k f_{kk}$. D'après (9.6.1) on a

$$(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\,\alpha(h') = \sum_{\substack{p \neq q \\ p+q>0}} (h_p - h_q)(h'_p - h'_q)\,; \qquad (10.4.35)$$

des calculs analogues à (10.3.5) à (10.3.7) fournissent

$$(h, h') = (2n-2) \sum_{k=1}^{n} h_k h'_k. \qquad (10.4.36)$$

Par conséquent, $(\lambda_p - \lambda_q)(h) = (h, h'_{\lambda_p - \lambda_q})$, où

$$h'_{\lambda_p - \lambda_q} = (2n-2)^{-1}(f_{pp} - f_{qq}). \qquad (10.4.37)$$

Désignons par α_p la racine $\lambda_p - \lambda_{p+1}$, $p = 1, \ldots, n-1$, et posons $\alpha_n = (\lambda_n - \lambda_{-(n-1)}) = \lambda_{n-1} + \lambda_n$. Alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Delta$ et pour $i + j > 0$ nous avons

$$\lambda_p - \lambda_q = \alpha_p + \ldots + \alpha_{q-1} \qquad \text{si } 0 < p < q\,;$$

$$\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_{-q} - \lambda_{-p}) = \lambda_{-p} - \lambda_{-q} \qquad \text{si } 0 < q < p,\ p < q < 0 \text{ ou } q < p < 0\,;$$

$$\lambda_p - \lambda_q = (\lambda_p - \lambda_n) + (\lambda_{-q} - \lambda_{n-1}) + \alpha_n \qquad \text{si } p > 0 > q\,;$$

$$\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_q - \lambda_p) \qquad \text{si } p < 0.$$

Alors, selon la proposition I de 10.2, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est un système de racines simples de l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$. Les relations (9.2.1) et les égalités (10.4.37) impliquent que

$$(\alpha_p, \alpha_q) = \begin{cases} 2(2n-2)^{-1} & \text{si } q = p\,; \\ -(2n-2)^{-1} & \text{si } |p-q| = 1,\ p < n,\ q < n\,; \\ -(2n-2)^{-1} & \text{si } p = n-2,\ q = n \text{ ou } p = n,\ q = n-2\,; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \qquad (10.4.38)$$

Conformément aux relations (10.4.38), le schéma de Dynkine de l'algèbre de Lie $\widetilde{L}$ est de la forme

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{n-2} \quad \alpha_{n-1}, \quad \alpha_n$$

i.e. est un schéma de Dynkine du type D_n ($n \geqslant 2$). Pour $n = 2$ ce schéma n'est pas connexe et se présente sous la forme

$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$

Pour $n = 3$ nous avons $D_3 = A_3$. Pour $n \geqslant 3$ l'algèbre de Lie $\widetilde{L} \approx so\,(2n, \mathbf{C})$ est simple puisque son schéma de Dynkine est connexe.

10.5. Algèbres de Lie du type C_n ($n \geqslant 2$). Soit $L = sp\,(2n, \mathbf{C})$, $n \geqslant 2$, l'algèbre de Lie des matrices complexes d'ordre $2n$ que l'on peut représenter sous la forme

$$x = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{Vmatrix}, \tag{10.5.1}$$

où les a, b, c sont des matrices carrées complexes d'ordre n, les matrices b et c sont symétriques, et la matrice a^t est la transposée de la matrice a. Le fait que L est une algèbre de Lie se vérifie ou bien par un calcul direct, ou bien en remarquant qu'une matrice x appartient à L si et seulement si $x^t s + sx = 0$, où

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad 1_n \text{ est la matrice unité d'ordre } n. \tag{10.5.2}$$

Soit H le sous-espace linéaire de L constitué par les matrices diagonales. Soit $f_{ij} = e_{ij} - e_{j+n,\, i+n}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$,

$$g_{ij} = e_{i+n,\, j} + e_{j+n,\, i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$
$$\widetilde{g}_{ij} = e_{i,\, j+n} + e_{j,\, i+n} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Alors la famille f_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$; g_{ij}, $\widetilde{g}_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, forme une base de L, et les éléments f_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ forment une base de H. Par conséquent

$$L = H + \sum_{i \neq j} \mathbf{C} f_{ij} + \sum_{i \leqslant j} \mathbf{C} g_{ij} + \sum_{i \leqslant j} \mathbf{C} \widetilde{g}_{ij}. \tag{10 5.3}$$

Soit $h \in H$; alors $h = \sum_{i=1}^{n} h_i f_{ii}$. Soit $\lambda_i(h) = h_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Alors (10.4.8) implique

$$[h, f_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h) f_{ij}; \tag{10.5.4a}$$

$$[h, g_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j)(h) g_{ij}; \tag{10.5.4b}$$

$$[h, \tilde{g}_{ij}] = -(\lambda_i + \lambda_j)(h) \tilde{g}_{ij}. \tag{10.5.4c}$$

Soit Δ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur H de la forme $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$ et $\pm(\lambda_i + \lambda_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Il est évident que $\Delta = -\Delta$. Si $\lambda(h) = 0$ pour tous les $\lambda \in \Delta$, on a en particulier $(\lambda_i + \lambda_i)(h) = 2\lambda_i(h) = 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, n$, donc $h = 0$. Les relations (10.5.4) impliquent

$$L^{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C} f_{ij}, \quad L^{\lambda_i + \lambda_j} = \mathbf{C} g_{ij}, \quad L^{-\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C} \tilde{g}_{ij}, \tag{10.5.5}$$

tandis que des relations (10.4.8) on tire

$$[f_{ij}, f_{ji}] = f_{ii} - f_{jj}, \quad [g_{ij}, \tilde{g}_{ij}] = f_{ii} + f_{jj}, \tag{10.5.6}$$

i.e. $[L^{\alpha}, L^{-\alpha}] \neq 0$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. La relation (10.5.3) peut s'écrire sous la forme $L = H + \sum_{\alpha \in \Delta} L^{\alpha}$. Ainsi toutes les hypothèses de la proposition II de 10.2 sont vérifiées, donc L est une algèbre de Lie semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, et Δ l'ensemble des racines non nulles de L relativement à H.

Trouvons le schéma de Dynkine pour l'algèbre de Lie L. Lorsque $h = \sum_{i=1}^{n} h_i f_{ii}$, $h' = \sum_{i=1}^{n} h'_i f_{ii}$, on tire de (9.6.1) et de la définition de Δ que

$$(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h) \alpha(h') =$$

$$= \sum_{i \neq j} (h_i - h_j)(h'_i - h'_j) + 2 \sum_{i \leqslant j} (h_i + h_j)(h'_i + h'_j) =$$

$$= 8 \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i + \sum_{i \neq j} \{(h_i - h_j)(h'_i - h'_j) + (h_i + h_j)(h'_i + h'_j)\} =$$

$$= 8 \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i + 2 \sum_{i \neq j} (h_i h'_i + h_j h'_j) = (4n + 4) \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i. \tag{10.5.7}$$

Par conséquent, $(\lambda_i - \lambda_j)(h) = (h, h'_{\lambda_i - \lambda_j})$, $(\lambda_i + \lambda_j)(h) = (h, h'_{\lambda_i + \lambda_j})$, où

$$h'_{\lambda_i - \lambda_j} = (4(n+1))^{-1} (f_{ii} - f_{jj}), \quad h'_{\lambda_i + \lambda_j} = (4(n+1))^{-1} (f_{ii} + f_{jj}). \tag{10.5.8}$$

Désignons par α_i la racine $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ et posons $\alpha_n = 2\lambda_n$. Alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Delta$, et

$$\begin{aligned} &\lambda_i - \lambda_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} && \text{si } j > i; \\ &\lambda_i - \lambda_j = -(\lambda_j - \lambda_i) && \text{si } j < i; \\ &\pm(\lambda_i + \lambda_j) = \pm\{(\alpha_i + \ldots + \alpha_{n-1}) + (\alpha_j + \ldots + \alpha_n)\} && \text{si } i \leqslant j. \end{aligned} \tag{10.5.9}$$

Les relations (10.5.9) permettent de conclure que le système $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vérifie les hypothèses de la proposition I de 10.2; c'est donc le système de racines simples de l'algèbre de Lie L. Les relations (9.2.1) et les égalités (10.5.8) impliquent

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2/(4(n+1)) & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant n-1; \\ 4/(4(n+1)) & \text{si } i = j = n; \\ -1/(4(n+1)) & \text{si } |i-j| = 1,\ i < n,\ j < n; \\ -2/(4(n+1)) & \text{si } i = n,\ j = n-1, \\ & \text{ou } i = n-1,\ j = n, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{10.5.10}$$

Conformément aux relations (10.5.10), le schéma de Dynkine de l'algèbre de Lie L est de la forme

α_1 α_2 α_{n-1} α_n
O—O—• • • •—O═O ,
1 1 1 2

i.e. c'est un schéma de Dynkine du type C_n $(n \geqslant 2)$. Pour $n = 2$ nous avons $C_2 = B_2$. Comme le schéma de Dynkine de l'algèbre de Lie L est connexe, l'algèbre de Lie $L = sp\,(2n, \mathbf{C})$ est simple.

Les algèbres de Lie des types A_n, B_n, C_n, D_n sont dites *classiques.* Les algèbres de Lie des types E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 sont des algèbres *singulières*; elles sont construites, par exemple, dans le livre de N. Jacobson [1].

§ 11. Groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple

Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, et Δ le système des racines non nulles de l'algèbre de Lie L relativement à H. Pour chaque $\alpha \in \Delta$ introduisons l'élément h'_α de la sous-algèbre de Cartan H en le définissant par la condition

$$\alpha(h) = (h, h'_\alpha) \tag{11.1.1}$$

pour tous les $h \in H$ (la restriction de la forme de Killing sur la sous-algèbre de Cartan H étant non dégénérée d'après IV de 9.1, l'élément h'_α existe et s'avère défini de manière unique pour tous les $\alpha \in \Delta$).

Soit H_0 le sous-espace réel de H engendré par les vecteurs h'_α, $\alpha \in \Delta$, et soit λ une fonctionnelle linéaire sur H_0. Désignons par P_λ l'hyperplan de H_0 défini par l'équation $\lambda(h) = 0$. Soit S_λ l'application de l'espace H_0 sur lui-même qui à chaque vecteur $h \in H_0$ fait correspondre un vecteur symétrique relativement à l'hyperplan P_λ. Trouvons l'expression de l'application S_λ. L'hyperplan P_λ est donné par l'équation $\lambda(h) = 0$, i.e. par l'équation $(h, h'_\lambda) = 0$ (voir (11.1.1)). Par conséquent, le vecteur h'_λ est orthogonal à l'hyperplan P_λ. Remarquant que $(h'_\lambda, h'_\lambda) = (\lambda, \lambda)$, on a

$$S_\lambda(h) = h - 2\lambda(h)(\lambda, \lambda)^{-1}h'_\lambda \quad (h \in H_0). \tag{11.1.2}$$

Définie comme elle l'est, S_λ est une transformation orthogonale de l'espace H_0. Alors pour l'application adjointe S^*_λ de l'espace H^*_0 on a la formule

$$S^*_\lambda(\mu) = \mu - 2(\lambda, \mu)(\lambda, \lambda)^{-1}\lambda \; (\mu \in H^*_0). \tag{11.1.3}$$

En effet, on tire de (11.1.1) et (9.2.1) que $\mu(h'_\lambda) = (\lambda, \mu)$, donc

$$(\mu - 2(\lambda, \mu)(\lambda, \lambda)^{-1}\lambda)(h) = \mu(h - 2\lambda(h)(\lambda, \lambda)^{-1}h'_\lambda). \tag{11.1.4}$$

Supposons que $\lambda = \alpha$ pour un certain $\alpha \in \Delta$. Appliquons S^*_α à la racine $\beta \in \Delta$. On a

$$S^*_\alpha(\beta) = \beta - 2(\alpha, \beta)(\alpha, \alpha)^{-1}\alpha \tag{11.1.5}$$

d'après (11.1.3). Conformément à (9.5.1)

$$-2(\alpha, \beta)(\alpha, \alpha)^{-1} = p + q, \tag{11.1.6}$$

où $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, et pour tous les entiers k vérifiant l'inégalité $p \leqslant k \leqslant q$ la fonctionnelle linéaire $\beta + k\alpha$ appartient à Δ. Etant donné que $p \leqslant p + q \leqslant q$, on tire de (11.1.5) et (11.1.6) l'assertion suivante:

I. *$S^*_\alpha(\beta) \in \Delta$ pour tous les α, $\beta \in \Delta$.*

Soit W le sous-groupe du groupe des transformations orthogonales de l'espace H_0 engendré par les transformations S_α, $\alpha \in \Delta$.

II. *Le groupe W est fini.*

D é m o n s t r a t i o n. Chaque opérateur S^*_α, $\alpha \in \Delta$, dans l'espace H^*_0 applique l'ensemble fini Δ dans Δ d'après I. Par conséquent, pour chaque élément w du groupe W l'opérateur w^* applique Δ dans Δ. Si $w \in W$ et $w^*\alpha = \alpha$ pour tous les $\alpha \in \Delta$, alors l'opérateur w^* dans l'espace H^*_0 est l'identité sur l'enveloppe linéaire de l'ensemble Δ; mais cette enveloppe linéaire coïncide avec H^*_0 d'après III de 9.6, donc w^* est l'opérateur identique sur H^*_0 et w est l'identité sur H_0. Ainsi le groupe W est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble fini Δ, donc W est un groupe fini.

Le groupe W s'appelle *groupe de Weyl* de l'algèbre de Lie L. On appelle parfois groupe de Weyl le groupe W^* constitué par les adjoints des éléments du groupe W.

Soit Q l'ensemble de tous les éléments $h \in H_0$ tels que $\alpha(h) \neq 0$ quel que soit $\alpha \in \Delta$. Les sous-ensembles convexes maximaux de l'ensemble Q s'appellent *domaines fondamentaux de Weyl*, ou *chambres de Weyl*.

III. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines simples de l'algèbre de Lie L relativement à H. L'ensemble C_0 des éléments $h \in H_0$ tels que $\alpha_i(h) > 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$ est une chambre de Weyl.*

Démonstration. Lorsque $h_1, h_2 \in C_0$, on a $\alpha_i(th_1 + (1-t)h_2) = t\alpha_i(h_1) + (1-t)\alpha_i(h_2) > 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$ et tous les $t \in [0, 1]$, donc C_0 est un ensemble convexe. Montrons que C_0 est un sous-ensemble de Q. Supposons le contraire, i. e. $C_0 \not\subset Q$, alors il existerait un $h \in C_0$ tel que $\alpha(h) = 0$ pour un certain $\alpha \in \Delta$. Mais chaque racine non nulle α se met sous la forme $\alpha = \sum k_i\alpha_i$, où les entiers k_i sont de même signe et ne sont pas tous nuls; puisque $\alpha_i(h) > 0$ on a $\alpha(h) \neq 0$. La contradiction obtenue nous montre que $C_0 \subset Q$. Il est évident que C_0 est un sous-ensemble convexe *maximal* de Q.

La chambre de Weyl C_0 s'appelle *chambre de Weyl dominante*.

Soit W' le sous-groupe du groupe W engendré par les symétries déterminées par les racines simples, i.e. par les éléments $S_i = S_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

IV. *Le groupe W' (et donc le groupe W) est transitif sur l'ensemble des chambres de Weyl, i.e. pour chaque chambre de Weyl C_1 il existe un élément $w \in W'$ tel que $C_0 = wC_1$.*

Démonstration. Si C_1 est une chambre de Weyl, alors pour chaque $w \in W$ l'ensemble wC_1 est convexe. En outre, puisque w^* applique Δ dans Δ, alors w applique l'ensemble Q dans lui-même. Etant donné que $C_1 \subset Q$, on a $wC_1 \subset Q$. Par conséquent, wC_1 est un sous-ensemble convexe de Q et wC_1 est contenu dans une certaine chambre de Weyl. Pour démontrer l'inclusion $wC_1 \subset C_0$ il suffit donc de montrer qu'il existe, pour chaque élément donné $h_1 \in C_1$, un opérateur $w \in W'$ tel que $wh_1 \in C_0$. Soit h_0 un point donné de C_0. L'ensemble de points wh_1, $w \in W'$, est fini; soit w_0h_1 le point le plus proche du point h_0 parmi les points wh_1, $w \in W'$. Si w_0h_1 n'appartient pas à la chambre de Weyl C_0, on a $\alpha_i(w_0h_1) < 0$ pour une certaine racine simple α_i. Comparons la distance entre w_0h_1 et h_0 avec la distance entre $S_{\alpha_i}(w_0h_1)$ et h_0. Les projections des vecteurs $h_0 - w_0h_1$ et $h_0 - S_{\alpha_i}(w_0h_1)$ sur l'hyperplan P_{α_i} sont les mêmes, mais les projections de ces vecteurs sur la droite $\{th'_{\alpha_i}, t \in \mathbf{R}\}$ perpendi-

culaire au plan P_{α_i} sont différentes et l'on a

$$|(h_0 - w_0h_1,\ h'_{\alpha_i})| = |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0h_1)| = \\ = \alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0h_1), \qquad (11.1.7)$$

car $\alpha_i(h_0) > 0$, $\alpha_i(w_0h_1) < 0$; d'autre part,

$$|(h_0 - S_{\alpha_i}(w_0h_1),\ h'_{\alpha_i})| = |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(S_{\alpha_i}(w_0h_1))| = \\ = |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0h_1 - 2\alpha_i(w_0h_1)(\alpha_i,\ \alpha_i)^{-1}h'_{\alpha_i})| = \\ = |\alpha_i(h_0) + \alpha_i(w_0h_1)|. \qquad (11.1.8)$$

En comparant les deuxièmes membres des égalités (11.1.7) et (11.1.8), nous voyons que $|\alpha_i(h_0) + \alpha_i(w_0h_1)| < \alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0h_1)$, et donc le point $S_{\alpha_i}(w_0h_1)$ est plus proche de h_0 que w_0h_1. Par conséquent, le point w_0h_1 n'est pas le point le plus proche de h. La contradiction obtenue montre que $w_0h_1 \in C_0$. Ainsi $wC_1 \subset C_0$. Un raisonnement analogue au précédent montre que $w^{-1}C_0 \subset C_1$, donc $C_0 = w(w^{-1}C_0) \subset wC_1$ et $C_0 = wC_1$.

V. $W = W'$.

Démonstration. Nous dirons qu'un hyperplan P_α limite une chambre de Weyl C si la frontière de C contient un sous-ensemble ouvert de P_α. Il est évident que la chambre C_0 est limitée par les hyperplans P_{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, et par eux seuls. Soient $\alpha \in \Delta$ et C_1 une des chambres de Weyl limitées par l'hyperplan P_α. Il existe un opérateur $w \in W'$ tel que $C_1 = wC$. L'hyperplan P_α est l'image par cet opérateur d'un certain hyperplan qui limite la chambre C_0, i.e. d'un certain hyperplan P_{α_i}. Mais les seules racines dont l'ensemble des zéros est P_α sont $\pm\alpha$; par conséquent $w\alpha_i = \pm\alpha$. Si $w\alpha_i = -\alpha$, alors $wS_{\alpha_i}(\alpha_i) = w(-\alpha_i) = \alpha$, de sorte qu'il existe toujours un élément $w \in W'$ et une racine simple α_i tels que $w\alpha_i = \alpha$. Alors évidemment $S_\alpha = wS_{\alpha_i}w^{-1}$. Etant donné que $w \in W'$ et $S_{\alpha_i} \in W'$, on a $S_\alpha \in W'$ quel que soit $\alpha \in \Delta$, i.e. $W = W'$.

On obtient immédiatement de IV et V

VI. *Le groupe de Weyl W est engendré par les symétries S_i, $i = 1, \ldots, r$, définies par les racines simples.*

Pour les groupes de Weyl de l'algèbre de Lie des types (A_n) à (G_2) voir N. Bourbaki [1].

§ 12. Représentations linéaires des algèbres de Lie complexes semi-simples

Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, et H sa sous-algèbre de Cartan. Soit Δ le système de racines non nulles de l'algèbre de Lie L relativement à H. Supposons que l'espace vectoriel réel H_0^* est muni de l'ordre lexicographique relativement à une certaine

base de H_0, de sorte que Σ est le système des racines positives, et $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ le système des racines simples.

I. *Les espaces linéaires* $N_+ = \sum_{\alpha>0} L^\alpha$ *et* $N_- = \sum_{\alpha<0} L^\alpha$ *sont des algèbres de Lie nilpotentes, et l'espace* L *est la somme directe des sous-espaces* N_+, N_- *et* H.

Démonstration. En remarquant que $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ pour tous les α, $\beta \in \Delta$ (voir II, § 8), N_+ et N_- sont des sous-algèbres de Lie de L. Montrons que N_+ est nilpotente. Soit $\alpha = \Sigma n_i \alpha_i$ l'expression de la racine $\alpha \in \Sigma$ sous forme de combinaison linéaire de racines simples (voir III de 9.6); appelons *ordre* de la racine α le nombre $m = \Sigma m_i$. Soit n l'ordre maximal des racines $\alpha \in \Sigma$. La relation $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ implique que pour chaque $x \in N_+$ $(\mathrm{ad}\, x)^{n+1}$ appique tous les éléments de chacun des sous-espaces L^α, $\alpha \in \Sigma$, dans l'élément nul; par conséquent (voir le théorème 1 de 2.1) l'algèbre de Lie N_+ est nilpotente. On démontre de même la nilpotence de l'algèbre de Lie N_-. La décomposition $L = N_+ + H + N_-$ s'obtient de la relation $L = H + \sum_{\alpha \neq 0} L^\alpha$ (voir (8.1.6)).

La décomposition $L \dot{=} N_- + H + N_+$ s'appelle *décomposition de Cartan* de l'algèbre de Lie L.

II. *L'algèbre de Lie* N_+ (*respectivement* N_-) *est engendrée par les sous-espaces* L^{α_i} (*respectivement* $L^{-\alpha_i}$), $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration. Soit N'_+ la sous-algèbre de Lie de N_+ engendrée par les sous-espaces L^{α_i}; supposons que l'on a déjà démontré que $L^\beta \subset N'_+$ pour $0 < \beta < \alpha$. Si α est une racine simple, on a par hypothèse $L^\alpha \subset N'_+$; si $\alpha = \beta + \gamma$, où $\beta, \gamma > 0$, on a $0 < \beta < \alpha$, $0 < \gamma < \alpha$; donc, en appliquant II de 9.5, on a $L^\alpha = [L^\beta, L^\gamma] \subset [N'_+, N'_+] \subset N'_+$. On démontre d'une manière analogue l'assertion correspondante pour la sous-algèbre de Lie N_-.

Posons $h_\alpha = 2(\alpha, \alpha)^{-1} h'_\alpha$ et $h_i = h_{\alpha_i}$. Alors $\alpha(h_\alpha) = 2$ et $\alpha_i(h_j) = 2(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_j)^{-1} = -n_{ji}$, où n_{ji} est un certain nombre entier non négatif (voir III, de 9.6 et (9.6.3)). En outre, si $x \in L^\alpha$, $y \in L^{-\alpha}$, on a $[x, y] = (x, y) h'_\alpha$ (voir (9.2.3)); donc on peut choisir $x_i \in L^{\alpha_i}$, $y_i \in L^{-\alpha_i}$, de manière à avoir $[x_i, y_i] = h_i$. Puisque $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas racine, on a $[x_i, y_j] = 0$ pour $i \neq j$. Ainsi, l'algèbre de Lie L est engendrée par les éléments x_i, y_i, h_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, pour lesquels les relations suivantes sont valables (en général ce ne sont pas les seules relations qui existent entre les éléments x_i, y_i, h_i):

$$[x_i, y_j] = 0 \quad \text{si } i \neq j, \tag{12.1.1a}$$

$$[x_i, y_i] = h_i, \tag{12.1.1b}$$

$$[h_i, x_j] = -n_{ij}x_j, \quad (12.1.1c)$$

$$[h_i, y_j] = n_{ij}y_j, \quad (12.1.1d)$$

$$[h_i, h_j] = 0 \quad (12.1.1e)$$

Soit π une representation linéaire de l'algèbre de Lie L dans l'espace vectoriel V. Soit λ une fonctionnelle linéaire sur H; désignons par V_λ l'ensemble des vecteurs $v \in V$ tels que $\rho(h) v = \lambda(h) v$ pour tous les $h \in H$. Il est évident que V_λ est un sous-espace de V et $V_\lambda \subset V^\lambda$, où $V^\lambda = V(H, \lambda)$ a été défini dans 2.4. Si $V_\lambda \neq (0)$, alors la fonctionnelle λ s'appelle *poids* de la représentation π de l'algèbre de Lie L.

III. *Les sous-espaces V_λ sont linéairement indépendants.*

La proposition découle immédiatement de II 3), de 2.4, étant donné que $V_\lambda \subset V^\lambda$.

IV. *Si $W \subset V$ est un sous-espace invariant de la représentation π, alors $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) = \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$.*

Démonstration. Considérons la représentation v_λ déterminée par la représentation π dans l'espace quotient V/W. En vertu de III, la relation $\sum_\lambda v_\lambda \in W$ (où $v_\lambda \in V_\lambda$) implique $v_\lambda \in W$. Ainsi $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) \subset \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$. D'autre part, la relation $\sum_\lambda (W \cap V_\lambda) \subset$ $\subset W \cap (\sum_\lambda V_\lambda)$ est évidente.

V. *Une représentation de dimension finie π d'une algèbre de Lie semi-simple L possède au moins un poids.*

Démonstration. La restriction de la représentation π à la sous-algèbre de Cartan H est une représentation (de dimension finie) de l'algèbre de Lie H. Soit $V_1 \subset V$ un sous-espace invariant relativement à $\pi(H)$ et tel que la famille des opérateurs $\pi(H)|_{V_1}$ est irréductible. Comme H est une algèbre de Lie commutative, $\pi(H)|_{V_1}$ est une famille irréductible d'opérateurs permutables deux à deux. Alors d'après le lemme de Schur V_1 est un sous-espace unidimensionnel. Si v est un vecteur non nul de V_1, alors $\pi(h) v \in V_1$ pour tous les $h \in H$, i.e. $\pi(h) v = \lambda(h) v$ pour un certain $\lambda(h)$. La fonction λ est un poids.

VI. $\pi(L^\alpha) V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$.

Démonstration. Si $v \in V_\lambda$, $x \in L^\alpha$, alors

$$\pi(h)\pi(x)v = \pi([h, x])v + \pi(x)\pi(h)v =$$
$$= \pi(\alpha(h)x)v + \pi(x)(\lambda(h)v) = (\alpha(h) + \lambda(h))\pi(x)v, \quad (12.1.2)$$

donc $\pi(x)v \in V_{\lambda+\alpha}$.

VII. *Le sous-espace* $\sum_{\lambda} V_\lambda$ *est invariant relativement à la représentation* π.

La proposition découle immédiatement de VI.

Appelons le vecteur $v \in V$ *vecteur supérieur* de la représentation π si $v \in V_\lambda$ pour un certain poids λ, $\pi(x_i)\, v = 0$ quel que soit $i = 1, \ldots, r$ et si le plus petit sous-espace de V, invariant relativement à tous les opérateurs $\pi(x)$, $x \in L$, et contenant le vecteur v, coïncide avec V. Dans ce cas le poids λ s'appelle *poids supérieur* de la représentation π *).

La sous-algèbre de Lie N_+ étant engendrée par les éléments x_i, $i = 1, \ldots, r$, on a $\pi(x)\, v = 0$ pour tous les $x \in N_+$. Considérons le sous-espace $B = H + N_+$ dans l'algèbre de Lie L. Il est évident que B est une sous-algèbre de Lie de L et N_+ est un idéal de B, étant donné que $[H, N_+] \subset N_+$ en vertu de (12.1.1c). Remarquant que $\pi(h)\, v = \lambda(h)\, v$ pour $h \in H$ et $\pi(x)\, v = 0$ pour $x \in N_+$, le sous-espace unidimensionnel engendré par le vecteur v est invariant relativement aux opérateurs $\pi(b)$, $b \in B$.

Soient U, U_0, U_- les algèbres enveloppantes universelles des algèbres de Lie, L, B, N_- respectivement. Choisissons dans L une base de la forme $n_1^-, \ldots, n_p^-, h_1, \ldots, h_r, n_1^+, \ldots, n_p^+$, où $n_i^\pm \in N_\pm$ et $h_i \in H$. En appliquant à cette base le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (voir le théorème de 6.3), nous voyons que $\pi(U)\, v = \pi(U_-)\, v$, car $\pi(U_0)\, v$ est contenu dans le sous-espace unidimensionnel $\mathbf{C}v$ engendré par le vecteur v.

Considérons le sous-espace $\mathbf{C}v + \sum V_\mu$, où la somme s'étend à tous les poids μ tels que la différence $\lambda - \mu$ se met sous forme de combinaison linéaire des racines α_i à coefficients entiers non négatifs. Ce sous-espace contient le vecteur v et il est invariant relativement à l'algèbre de Lie N_-; en effet, pour chaque racine positive α nous avons $\pi(L^{-\alpha})\, V_\mu \subset V_{\mu-\alpha}$ et la fonctionnelle $\lambda - (\mu - \alpha) = (\lambda - \mu) + \alpha$ peut être mise sous la forme $\sum m_i \alpha_i$, où les entiers m_i sont non négatifs. Puisque $\pi(U_-)\, v = \pi(U)\, v$ et $\pi(U_-)\, v \subset \mathbf{C}v + \sum V_\mu$, on a en vertu de la définition du vecteur de poids supérieur $\mathbf{C}v + \sum V_\mu = V$. Par conséquent,

VIII. *Si* λ *est le poids supérieur de la représentation* π, *alors le sous-espace* V_λ *est unidimensionnel et chaque poids* μ *de la représenta-*

*) Cette définition diffère de la définition du vecteur supérieur et de celle du poids supérieur donnée pour les représentations des groupes (voir chapitres VI et VII), car nous exigeons ici que le vecteur supérieur soit un vecteur cyclique de la représentation. Pour les représentations irréductibles, cette condition est vérifiée automatiquement.

tion π *peut être mis sous la forme* $\mu = \lambda - \sum m_i \alpha_i$, *où les* m_i *sont des entiers non négatifs. En outre,* $V = \sum V_\mu = \pi (U_-) v$.

Il est évident que la proposition VIII implique les propositions suivantes:

IX. *Le poids supérieur* λ *se détermine uniquement par la représentation* π.

X. *Les sous-espaces de poids* V_μ *sont de dimension finie.*

Démonstration. Nous savons que $V = \pi (U_-) v$ et $y_i \in L^{-\alpha_i}$. Par conséquent, le sous-espace V_μ est linéairement engendré par les vecteurs de la forme $\pi (y_{i_1}) \ldots \pi (y_{i_p}) v$, où $i_1, \ldots, i_p$ est une famille telle que $\lambda - \alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_p} = \mu$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de familles $\{i_1, \ldots, i_p\}$ qui possèdent cette propriété, V_μ est de dimension finie.

Passons à la classification des représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie complexe semi-simple L. En vertu du théorème de réductibilité complète (voir 7.2), nous pouvons nous limiter à l'étude des représentations irréductibles.

XI. *Chaque représentation irréductible* π *de dimension finie possède un vecteur supérieur déterminé de manière unique à un coefficient près.*

Démonstration. En vertu de V la représentation π possède au moins un poids. Puisque π est une représentation de dimension finie, il découle de III que l'ensemble des poids de la représentation π est fini. Par conséquent, il existe un poids λ de la représentation π tel que $\lambda + \alpha_i$ n'est pas un poids pour tous les $i = 1, \ldots, r$. Il découle alors de VI que $\pi (x_i) v = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$ quel que soit $v \in V_\lambda$, i.e. $\pi (N_+) v = 0$. La représentation π étant irréductible, pour tout $v \neq 0$ le sous-espace de V invariant relativement aux opérateurs $\pi (x)$, $x \in L$, et contenant le vecteur v, coïncide avec V. Par conséquent, chaque vecteur $v \in V_\lambda$ non nul est un vecteur supérieur de la représentation π dans le sous-espace V_λ correspondant, qui est unidimensionnel d'après VIII.

Supposons que les $h_i \in H$ sont choisis de manière à avoir $\alpha_i (h) = (h, h_i)$ pour tous les $h \in H$ et pour toutes les racines simples α_i.

THÉORÈME 1. *La fonctionnelle linéaire* λ *est le poids supérieur d'une certaine représentation irréductible* π *de dimension finie de l'algèbre de Lie L si et seulement si tous les* $\lambda (h_i)$, $i = 1, \ldots, r$, *sont des entiers non négatifs. Chaque représentation irréductible* π *de dimension finie de l'algèbre de Lie L dans l'espace V possède un poids supérieur. V étant la somme directe des sous-espaces* V_μ; *pour chaque racine* α *et chaque poids* μ *le nombre* $\mu (h_\alpha)$ *est entier; si* μ *et* $\mu + \alpha$ *sont des poids de la représentation* π, *alors* $\pi (L^\alpha) V_\mu \neq (0)$. *Soit P l'ensemble de*

tous les poids de la représentation π. *L'ensemble* P *est alors fini et invariant relativement à la famille des opérateurs adjoints des éléments du groupe de Weyl* W *de l'algèbre de Lie* L. *Si* $\mu = \sigma^* \nu$ *pour un certain* $\sigma \in W$ *on a* $\dim V_\lambda = \dim V_\nu$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit π une représentation irréductible de l'algèbre de Lie L dans l'espace V. En vertu de XI, la représentation π possède un vecteur supérieur v. Soit λ le poids supérieur de la représentation π. D'après VIII, chaque poids μ de la représentation π est de la forme $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$, où $m_i \geqslant 0$ sont des entiers, V étant la somme directe des sous-espaces V_μ. Soit μ un poids de la représentation π; soit α une racine de l'algèbre de Lie L. Posons $\widetilde{V} = \sum_j V_{\mu + j\alpha}$. Supposons que L_α est la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L engendrée par les vecteurs e_α, $e_{-\alpha}$, h_α (voir IV de 9.3). Le sous-espace $\widetilde{V}$ est invariant relativement à $\pi(L_\alpha)$, étant donné que $\pi(L^\alpha) V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$ pour tout poids μ et $\pi(H) V_\mu \subset V_\mu$. Comme $\alpha(h_\alpha) = 2$, les différents poids de la forme $\mu + j\alpha$ prennent sur h_α des valeurs distinctes. Appliquons le théorème de 9.4 à la représentation $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de Lie L_α dans l'espace $\widetilde{V}$, définie par la formule $\widetilde{\pi}(x) \widetilde{v} = \pi(x) \widetilde{v}$ pour tous les $x \in L_\alpha$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. En vertu de ce théorème, le nombre $2\mu(h_\alpha)(\alpha(h_\alpha))^{-1}$ est entier. En outre, il existe un poids μ' de la représentation $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de Lie L_α dans l'espace $\widetilde{V}$ tel que $\mu'(h_\alpha) = -\mu(h_\alpha)$. Par conséquent, $(\mu + \mu') \times$ $\times (h_\alpha) = 0$, i.e. $(\mu + \mu', \alpha) = 0$. Mais le poids μ', comme tout poids de la représentation $\widetilde{\pi}$, est de la forme $\mu' = \mu + j\alpha$, où j est un entier. En substituant l'égalité $\mu' = \mu + j\alpha$ dans la relation $(\mu + \mu', \alpha) = 0$, nous obtenons $2(\mu, \alpha) + j(\alpha, \alpha) = 0$, i.e. $j =$ $= -2(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha)^{-1}$ et $\mu' = \mu + j\alpha = \mu - 2(\mu, \alpha), (\alpha, \alpha)^{-1}\alpha =$ $= S_\alpha^*(\mu)$. Ainsi l'ensemble des poids de la représentation π est invariant relativement au groupe de Weyl W^* engendré par les transformations S_α^*. Il découle également du théorème de 9.4 que $\dim V_\mu =$ $= \dim V_{\mu'}$; alors pour chaque poids ν obtenu de μ par une transformation du groupe de Weyl on a $\dim V_\mu = \dim V_\nu$. Enfin, si $\mu + \alpha$ est un poids et $x \in L^\alpha$, $x \neq 0$, on a en vertu de (9.4.7) la relation $\pi(x) V_\mu \neq (0)$.

Appliquons les résultats trouvés ci-dessus au poids supérieur λ. D'après ce que nous venons de démontrer la fonctionnelle $S_i^*(\lambda) =$ $= \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ est un poids. D'autre part, chaque poids est de la forme $\lambda - \sum m_k \alpha_k$, où les m_k sont des entiers non négatifs. Par conséquent, $\lambda(h_i)$ est un entier non négatif. Alors pour chaque racine positive $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ le nombre $\lambda(h_\alpha) = (\lambda, \alpha) =$ $= (\lambda, \sum n_i \alpha_i) = \sum n_i \lambda(h_i)$ est un entier non négatif.

Réciproquement, soit λ une fonctionnelle linéaire sur H. Désignons par I_λ l'idéal à gauche de l'algèbre U engendré par l'algèbre de Lie N_+ et les éléments de la forme $h - \lambda(h)e$, où $h \in H$, e étant l'élément unité de l'algèbre U. Envisageons la représentation naturelle ρ de l'algèbre de Lie L dans l'espace U/I_λ, engendrée par les opérateurs de multiplication à gauche par les éléments de l'algèbre de Lie L. Soit v l'image de l'élément unité $e \in U$ dans l'espace U/I_λ. Montrons que v est le vecteur supérieur de la représentation ρ à poids λ. En effet, on a $h - \lambda(h)e \in I_\lambda$, donc $\rho(h - \lambda(h)e)v = 0$; en outre $N_+ \subset I_\lambda$, donc $\rho(N_+)v = 0$. Enfin, chaque sous-espace de l'espace U/I_λ, invariant relativement à la représentation ρ, est invariant aussi relativement à tous les opérateurs de multiplication à gauche par tous les éléments de l'algèbre U; mais $Uv = U/I_\lambda$, i.e. le sous-espace minimal de U/I_λ, invariant relativement à la représentation ρ et contenant v, coïncide avec U/I_λ. Ainsi v est le vecteur supérieur de la représentation ρ à poids λ.

Montrons que $\rho \neq 0$, i.e. $I_\lambda \neq U$. Soit I'_λ l'idéal à gauche de l'algèbre U_0 engendré par l'algèbre de Lie N_+ et les éléments de la forme $h - \lambda(h)e$, $h \in H$. Soit ρ_0 une représentation de l'algèbre U_0 correspondant à une représentation unidimensionnelle θ (de l'algèbre de Lie B) telle que $\theta(h) = \lambda(h)1$, $\theta(n) = 0$ pour $h \in H$, $n \in N_+$ (la fonctionnelle linéaire θ étant nulle sur $[B, B] = N_+$, θ est effectivement une représentation de l'algèbre de Lie B). L'idéal I'_λ est contenu dans le noyau de la représentation ρ_0, donc $I'_\lambda \neq U_0$. En appliquant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on remarque que $U = U_-U_0$ ne coïncide pas avec $I_\lambda = U_-I'_\lambda$, i.e. ρ est une représentation non nulle de l'algèbre de Lie L (en général de dimension infinie) à poids supérieur λ.

Soit T un sous-espace invariant de l'espece $V' = U/I_\lambda$. En vertu de VIII, $V' = \sum_\mu V'_\mu$; d'après IV, on a également l'égalité $T = \sum_\mu (T \cap V'_\mu)$. Comme le sous-espace V'_λ est unidimensionnel d'après VIII, alors $T \cap V'_\lambda = (0)$ ou égal à V'_λ; dans le dernier cas T contient le vecteur supérieur, i.e. $T = V'$. Ainsi, si $T \neq V'$, alors $T \subset \sum_{\mu \neq \lambda} V'_\mu$. La somme V'' de tous les sous-espaces invariants contenus dans $\sum_{\mu \neq \lambda} V'_\mu$ est un sous-espace invariant qui ne coïncide pas avec V'. Il est évident que la représentation π de l'algèbre de Lie L dans l'espace quotient $V = V'/V''$ déterminée par la représentation ρ est une représentation irréductible à poids supérieur λ.

Soit ρ_1 une autre représentation irréductible de l'algèbre de Lie L à poids supérieur λ. Soit $I \subset U$ l'ensemble de tous les $x \in U$ tels que $\pi(x)v = 0$. Il est évident que I contient N_+ et tous les éléments de la forme $h - \lambda(h)e$, où $h \in H$. Par conséquent, $I \supset I_\lambda$, et donc la représentation ρ_1, isomorphe à la représentation naturelle

de l'algèbre de Lie L dans U/I, est également isomorphe à une représentation quotient de la représentation de l'algèbre de Lie L dans U/I_λ, i.e. ρ_1 est isomorphe à une représentation quotient de la représentation ρ. Puisque ρ_1 est irréductible, I est un idéal à gauche maximal (de l'algèbre U) contenant I_λ. Cependant, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'idéal maximal (de l'algèbre U) contenant I_λ, est déterminé uniquement. Par conséquent, ρ_1 est équivalent à π, i.e. *une représentation irréductible se détermine de manière unique par son poids supérieur.*

Supposons que $\lambda(h_i)$, $i = 1, \ldots, r$, sont des entiers non négatifs. Montrons que dans ce cas l'espace V est de dimension finie. Soit L_i la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L engendrée par les éléments x_i, y_i, h_i. Soit M_i l'enveloppe linéaire du vecteur v et des vecteurs de la forme $\pi(z_1) \ldots \pi(z_n) v$, où n est un nombre naturel quelconque, tandis que les $z_1, \ldots, z_n$ sont des éléments quelconques de l'algèbre de Lie L_i. Alors le sous-espace M_i est invariant relativement à L_i et possède v pour vecteur supérieur. D'autre part, M_i est la somme directe des espaces de poids relativement à L_i, tandis que chaque poids de l'algèbre de Lie L_i dans M_i est de la forme $\lambda - k\alpha_i$, où k est un entier non négatif, donc le sous-espace M_i est engendré par les vecteurs $(\pi(y_i))^k v$, où k sont des nombres entiers non négatifs (voir VIII). Si $j \neq i$, on a $[x_j, y_i] = 0$, donc $\pi(x_j)\pi(y_i)^k v = \pi(y_i)^k \pi(x_j) v$; mais $x_j \in N_+$, donc $\pi(x_j) v = 0$ et $\pi(x_j)\pi(y_i)^k v = 0$. Ainsi l'opérateur $\pi(x_j)$ est nul sur M_i. L'espace M_i étant la somme directe des espaces de poids et l'espace de poids supérieur étant unidimensionnel (voir VIII), chaque sous-espace $M_i' \subset M_i$ propre, invariant relativement à L_i, est contenu dans le sous-espace $\sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu$. Puisque $\pi(x_j) = 0$ sur M_i' pour $j \neq i$, le sous-espace M_i' est invariant aussi relativement à x_j pour $j \neq i$. Par conséquent, M_i' est invariant relativement à l'algèbre de Lie N_+. Notons maintenant que M_i' est invariant relativement à la sous-algèbre de Cartan H. En effet, puisque $\alpha_i(h_i) = 2$, il correspond à des poids distincts de la représentation π dans le sous-espace M_i, i.e. à des poids distincts de la forme $(\lambda - k\alpha_i)$, les différents poids de la représentation de l'algèbre de Lie L_i dans M_i; par conséquent, $M_i' = \sum_\mu (M_i' \cap V_\mu)$. Ainsi le sous-espace M_i' est invariant relativement à l'algèbre de Lie $B = H + N_+$ et $M_i' \subset \sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu$. Par conséquent, $\pi(U) M_i' = \pi(U_-)\pi(U_0) M_i' \subset \subset \pi(U_-)\left(\sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu\right) \subset \sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu$. Alors les vecteurs non nuls de M_i' ne sont pas cycliques pour la représentation π, ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de la représentation π si $\pi(U) M_i' \neq \neq (0)$. Donc $\pi(U) M_i' = (0)$ et $M_i' = (0)$, i.e. la représentation

de l'algèbre de Lie L_i dans le sous-espace M_i est irréductible. En vertu de III, 9.4, il existe une représentation irréductible de dimension finie de l'algèbre de Lie L_i à poids supérieur λ; comme nous le savons, toute représentation irréductible se détermine d'une manière unique par son poids supérieur, i.e. M_i est de dimension finie.

Soit $\mathcal{T}_i$ la famille de tous les sous-espaces de dimension finie de l'espace V, invariants relativement à l'algèbre de Lie L_i. Si M, $N \in \mathcal{T}_i$, alors la somme $M + N$ appartient également à $\mathcal{T}_i$. En outre, si $M \in \mathcal{T}_i$, alors le sous-espace $\pi(L) M$ est de dimension finie et

$$\pi(L_i)\, \pi(L)\, M \subset \pi([L, L_i])\, M + \pi(L)\, \pi(L_i)\, M \subset \pi(L)\, M, \quad (12.1.3)$$

i.e. $\pi(L) M \in \mathcal{T}_i$. Soit $\widetilde{M}_i$ la réunion de tous les sous-espaces de la famille $\mathcal{T}_i$. Comme $\pi(L) M \in \mathcal{T}_i$ pour $M \in \mathcal{T}_i$, $\widetilde{M}_i$ est invariant relativement à L. D'autre part, $M_i \in \mathcal{T}_i$ et $v \in M_i$, donc $v \in \widetilde{M}_i$ et $\widetilde{M}_i = V$.

Soit μ un poids de la représentation π; soit $v_\mu \in V_\mu$. Le sous-espace $\sum_k V_{\mu+k\alpha_i}$ est invariant relativement à l'algèbre de Lie L_i; d'après ce qui précède, il existe un sous-espace M de dimension finie, invariant relativement à L_i, contenu dans $\sum_k V_{\mu+k\alpha_i}$ et contenant le vecteur v_μ. De même que pour la représentation π de l'algèbre de Lie L_α dans l'espace $\widetilde{V}$, nous obtenons alors que $S_i^*\mu$ est un poids de la représentation π. Remarquant que le groupe de Weyl W est engendré par les transformations S_i (voir VI, § 11), l'ensemble P des poids de la représentation π est invariant relativement au groupe de Weyl W.

En vertu de X, tous les sous-espaces V_μ sont de dimension finie. Montrons que l'ensemble P est fini; on en tirera que l'espace V est de dimension finie. Soit $\mu \in P$. Choisissons dans l'ensemble fini des poids adjoints du poids μ relativement au groupe de Weyl un poids ν tel que $\sigma^*\nu - \nu$ ne soit pas une combinaison linéaire des racines α_i à coefficients entiers non négatifs pour tout $\sigma \in W \setminus \{e\}$. Pour le poids $S_i^*\nu = \nu - \nu(h_i)\,\alpha_i$ on a $S_i^*\nu - \nu = -\nu(h_i)\,\alpha_i$, le nombre $\nu(h_i)$ étant un entier non négatif en vertu des égalités $\nu = \lambda - \sum m_j\alpha_j$ et $\nu(h_i) = \lambda(h_i - \sum m_j\alpha_j(h_i)$, où $\lambda(h_i)$, m_j, $\alpha_j(h_i)$ sont des entiers. Par conséquent, $\nu(h_i) \geqslant 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$, i.e. tout poids μ est adjoint d'un poids ν tel que les $\nu(h_i)$ sont des entiers non négatifs, quel que soit $i = 1, \ldots, r$. Soit $\nu = \lambda - \sum m_i\alpha_i$. Désignons $\beta = \sum m_i\alpha_i$; alors

$$(\lambda, \lambda) = (\nu, \nu) + (\beta, \beta) + 2(\nu, \beta), \quad (12.1.4)$$

où

$$(\nu, \beta) = \sum m_i(\nu, \alpha_i) = (1/2) \sum m_i\nu(h_i)(\alpha_i, \alpha_i) \geqslant 0, \quad (12.1.5)$$

on tire donc de (12.1.4) que

$$(\lambda, \lambda) \geqslant (\nu, \nu), \tag{12.1.6}$$

i.e. le poids ν appartient à l'ensemble réticulé des éléments entiers de la forme $\lambda - \sum m_j \alpha_j$ dans l'espace H_0^* contenus dans la boule de rayon $\sqrt{(\lambda, \lambda)}$ de centre à l'origine des coordonnées. Par conséquent, le nombre des poids ν est fini. Mais chaque poids est adjoint relativement au groupe de Weyl d'un des poids ν, or le groupe de Weyl est fini; par conséquent, l'ensemble P des poids de la représentation π est fini, ce qui termine la démonstration du théorème.

§ 13. Caractères des représentations irréductibles de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple

13.1. Définition du caractère et propriétés fondamentales. Soit π une représentation linéaire irréductible de l'algèbre de Lie L dans un espace linéaire complexe V de dimension finie. La représentation π détermine uniquement la représentation de l'algèbre universelle enveloppante U de l'algèbre de Lie L dans le même espace V (voir II de 6.3). Désignons à nouveau cette représentation par π. Posons

$$\chi(x) = (\dim V)^{-1} \operatorname{tr} \pi(x) \tag{13.1.1}$$

pour tous les $x \in U$. Il est évident que la formule (13.1.1) définit une fonction linéaire χ sur l'algèbre U. Cette fonction s'appelle *caractère* *) de la représentation π.

I. *La représentation π est déterminée de manière unique par son caractère à une équivalence près.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le théorème de B u r n s i d e (voir M. N a ï m a r k [2]), les opérateurs $\pi(x)$, $x \in U$, forment l'algèbre de tous les opérateurs linéaires dans l'espace V. Supposons que $\chi(ax) = 0$ pour tous les $x \in U$; alors $\operatorname{tr} \pi(ax) = \operatorname{tr}(\pi(a)\pi(x)) = 0$ pour tous les $x \in U$. Par conséquent,

$$\operatorname{tr}(\pi(a) T) = 0 \tag{13.1.2}$$

pour tous les opérateurs linéaires T dans l'espace V. On tire de (13.1.2)

$$\pi(a) = 0. \tag{13.1.3}$$

Désignons par I l'idéal constitué par les éléments $a \in U$ tels que $\chi(ax) = 0$ pour tous les $x \in U$. Il découle de (13.1.3) que l'algèbre quotient de l'algèbre associative U par l'idéal I est isomorphe à l'algèbre $L(V)$ de tous les opérateurs linéaires dans l'espace V

*) La fonction $\chi(x)$ définie par la formule (13.1.1) est parfois appelée *caractère normalisé* de la représentation π, tandis que la fonction $\tilde{\chi}(x) = \operatorname{tr} \pi(x)$, $x \in V$, s'appelle alors *caractère* de la représentation π.

Soient π et π' des représentations de l'algèbre de Lie L dans les espaces V et V' respectivement, et supposons que les caractères des représentations π et π' sont égaux. Alors les algèbres $L(V)$ et $L(V')$ sont isomorphes, étant isomorphes à l'algèbre U/I. On sait (voir M. Naïmark [2]) que chaque isomorphisme entre $L(V)$ et $L(V')$ est engendré par un certain isomorphisme entre les espaces V et V' ; c'est cet isomorphisme entre V et V' qui établit l'équivalence des représentations π et π'.

13.2. Quelques propriétés de l'algèbre enveloppante. Montrons que chaque caractère χ est bien déterminé par sa restriction à la sous-algèbre $U(H) \subset U(L)$, i.e. à l'algèbre enveloppante universelle de la sous-algèbre de Cartan H dans L.

I. *Chaque élément $x \in U$ peut être représenté sous la forme $h + \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i]$ où $h \in U(H)$, $x_i \in L$, $y_i \in U$, de sorte que l'espace U est la somme des sous-espaces $U(H)$ et $[L, U]$.* En outre, $U = U(H) + [U, U]$.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons une algèbre symétrique S sur l'espace L (i.e. l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie abélienne, construite à partir de l'espace linéaire L en y introduisant la commutation triviale $[x, y]_1 = 0$ pour tous les $x, y \in L$). L'algèbre S est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle de T sur L par l'idéal J engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in L)$. Soit M l'espace des tenseurs symétriques sur L. En appliquant l'opération de symétrisation à un élément arbitraire de l'algèbre tensorielle T, nous remarquons que l'espace T est la somme directe des espaces J et M. Ainsi, l'application canonique de T sur $T/J = S$ est un isomorphisme, désignons-le par f, de l'espace M sur S. Identifions les espaces M et S à l'aide de cet isomorphisme.

Prolongeons la représentation adjointe de l'algèbre de Lie L à une représentation de l'algèbre de Lie L dans l'espace T en posant

$$\operatorname{ad} x (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes [x, x_i] \otimes \ldots \otimes x_n. \quad (13.2.1)$$

Il est évident que l'opérateur ad x laisse invariants les sous-espaces J et M. Par conséquent, la restriction des opérateurs ad x au sous-espace M détermine une représentation ρ de l'algèbre de Lie L dans M ; l'isomorphisme f de l'espace M sur S définit une représentation σ de l'algèbre de Lie L dans l'espace S et cette représentation est équivalente à ρ, de sorte que $\sigma = f\rho f^{-1}$.

Soit I l'idéal de l'algèbre tensorielle T engendré par les éléments de la forme $\varphi_{x,y} = x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$. La formule (13.2.1)

permet d'écrire

$$(\mathrm{ad}\, z)(\varphi_{x,y}) = [z, x] \otimes y + x \otimes [z, y] - [z, y] \otimes x - \\ - y (\otimes [z, x] - [z, [x, y]] = \varphi_{(\mathrm{ad}\, z)(x), y} + \varphi_{x (\mathrm{ad}\, z)(y)}. \quad (13.2.2)$$

La relation (13.2.2) nous montre que l'idéal I est invariant relativement à tous les opérateurs ad x, $x \in L$. Désignons par τ la représentation de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre quotient $U = T/I$ définie par la représentation $z \to \mathrm{ad}\, z$ de l'algèbre L dans T. Il découle du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que l'espace T est la somme directe du sous-espace M et de l'idéal I. L'application canonique de l'algèbre T sur $U = T/I$ détermine donc un isomorphisme des espaces M et U; il est évident que cet isomorphisme établit l'équivalence des représentations ρ et τ de l'algèbre de Lie L dans les espaces M et U respectivement. D'où l'on tire que les représentations σ et τ sont équivalentes. Il est tout aussi évident que l'isomorphisme entre les espaces U et S qui réalise l'équivalence des représentations τ et σ applique le sous-espace $U(H) \subset U$ sur le sous-espace $S(H) \subset S$, où $S(H)$ est l'algèbre symétrique sur H.

Soit R le plus petit sous-espace de l'espace S contenant $S(H)$ et invariant relativement à la représentation σ de l'algèbre de Lie L. Soit h un élément de la sous-algèbre de Lie H tel que $\alpha(h) \neq 0$ pour chaque racine α. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ une certaine famille de racines; soit $e_{\alpha_i} \in L^{\alpha_i}$; introduisons des nombres n_i de manière à avoir l'égalité $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_i}] = n_i e_{\alpha_1+\alpha_i}$. Alors on tire de (13.2.1)

$$(\mathrm{ad}\, e_{\alpha_1})(e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p+1}) = \sum n_i e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_1+\alpha_i} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p+1} - \\ - (-p+n+1)\, \alpha_1(h)\, e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p}. \quad (13.2.3)$$

Le sous-espace R contient $S(H)$, en particulier $h^{n+1} \in R$. Par récurrence sur p on obtient alors de la formule (13.2.3) que le sous-espace R (invariant relativement à ad L) contient tous les éléments de la forme $e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p}$, $p = 1, \ldots, n$, où h est choisi de manière à avoir $\alpha(h) \neq 0$ pour toutes les racines α. Mais chaque élément $h \in H$ est la différence de deux éléments h_1 et h_2 tels que $\alpha(h_i) \neq 0$ pour chaque racine non nulle α et $i = 1, 2$ (en effet, l'ensemble des éléments $h \in H$ tels que $\alpha(h) = 0$ pour une certaine racine non nulle α est une réunion finie d'hyperplans de H). Par conséquent, l'espace $S(H)$ est engendré par les puissances de tous les éléments $h \in H$ tels que $\alpha(h) \neq 0$ pour les racines α non nulles. D'où l'on obtient que le sous-espace R contient tous les éléments de la forme $e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_p} h^k$ pour tous les $h \in H$. Ainsi $R = S$. Mais chaque élément de R peut se mettre, par définition, sous la forme d'une somme d'un certain élément de $S(H)$ et d'une combinaison linéaire d'éléments de sous-espaces de la forme $\sigma(x_1)(\sigma(x_2)(\ldots$

$\ldots(\sigma(x_k)(S(H))\ldots)$, $x_1, \ldots, x_k \in L$, donc $S=R\subset S(H)+\sum_{k\geqslant 1}(\sigma(L))^k(S(H))$. Alors, en se servant de l'isomorphisme entre S et U, on obtient $U\subset U(H)+\sum_{k\geqslant 1}(\operatorname{ad} L)^k(U(H))$, i.e. $U\subset U(H)+[L, U]\subset U(H)+$ $+[U, U]\subset U$ et $U=U(H)+[L, U]=U(H)+[U, U]$.

II. *La fonction χ est définie de manière unique par sa restriction à la sous-algèbre $U(H)$.*

La proposition s'obtient immédiatement de I; en remarquant que la trace du commutateur de deux opérateurs linéaires est nulle, on a pour chaque $x\in U$

$$\chi(x)=(\dim V)^{-1}\operatorname{tr}\pi(x)=(\dim V)^{-1}\left(\operatorname{tr}\pi\left(h+\sum_{i=1}^{m}[x_i, y_i]\right)\right)=$$

$$=(\dim V)^{-1}\operatorname{tr}\left(\pi(h)+\sum_{i=1}^{m}[\pi(x_i), \pi(y_i)]\right)=(\dim V)^{-1}\operatorname{tr}\pi(h)=\chi(h),$$

si $x=h+\sum_{i=1}^{m}[x_i, y_i]$.

13.3. Quelques propositions auxiliaires. Soient V et V' des espaces vectoriels de dimension finie, en dualité relativement à la forme bilinéaire (v, v'). Soit $S^m(V)$ l'enveloppe linéaire des éléments de la forme $x_1x_2\ldots x_m$, où $x_i\in V$; l'ordre des éléments $x_1, \ldots, x_m$ dans $x_1x_2\ldots x_m$ ne joue aucun rôle. Posons

$$(v_1\ldots v_m, v'_1\ldots v'_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{i=1}^{m}(v_i, v'_{\sigma(j)}), \qquad (13.3.1)$$

où S_m est le groupe des permutations des indices $1, 2, \ldots, m$. Comme l'expression dans le deuxième membre de (13.3.1) est polylinéaire et symétrique d'une part par rapport aux v_i et d'autre part par rapport aux v'_i, la formule (13.3.1) définit effectivement une forme bilinéaire sur $S^m(V)\times S^m(V')$. On tire en particulier de (13.3.1) que

$$(v_1\ldots v_m, v'^m)=m!\prod_{i=1}^{m}(v_i, v') \qquad (13.3.2)$$

pour tous les $v_1, \ldots, v_m\in V$ et $v'\in V'$. Définissons pour chaque $v'\in V'$ la fonctionnelle linéaire $e^{v'}$ sur $S(V)$ (la somme directe des espaces $S^m(V)$), en posant

$$(v_1\ldots v_p, e^{v'})=\prod_{i=1}^{p}(v_1, v') \qquad (13.3.3)$$

pour tous les p naturels et tous les $v_1, \ldots, v_p \in V$. La formule (13.3.2) implique l'égalité formelle

$$e^{v'} = \sum_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} v'^m \tag{13.3.4}$$

dans laquelle on suppose que v'^m s'annule sur $S^n(V)$ lorsque $n \neq m$. La relation (13.3.3) permet de conclure que l'application $x \to (x, e^{v'})$ de l'algèbre $S(V)$ dans le corps des nombres complexes est un homomorphisme qui applique 1 dans 1 et v dans (v, v'). En outre, on tire de la relation (13.3.4) et de la formule du binôme que

$$e^{v'_1} e^{v'_2} = e^{v'_1 + v'_2}, \tag{13.3.5}$$

où le produit dans le premier membre doit être considéré comme le produit des homomorphismes de l'algèbre $S(V)$ dans le corps des nombres complexes, i.e. $(e^{v'_1} e^{v'_2})(x) = e^{v'_1}(x)\, e^{v'_2}(x)$ pour tous les $x \in S(V)$.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ le système des racines simples de l'algèbre de Lie L; supposons que $\alpha_i(h) = (h, h_i)$ pour tous les $h \in H$. Soit P le groupe additif des fonctionnelles linéaires λ sur H telles que $\lambda(h_i)$ sont des entiers; soit P_+ le sous-ensemble de P constitué de tous les $\lambda \in P$ tels que $\lambda(h_i) \geqslant 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$. Soit A l'algèbre des fonctions complexes sur P non nulles en un nombre fini de points, dans laquelle la multiplication est définie comme le produit de convolution

$$(f * g)(a) = \sum_{b+c=a} f(b)\, g(c). \tag{13.3.6}$$

Soit e^λ une fonction sur P égale à un au point λ et nulle aux autres points. Alors $\{e^\lambda, \lambda \in P\}$ est une base de A, et

$$e^\lambda * e^\mu = e^{\lambda+\mu}. \tag{13.3.7}$$

Cette relation permet d'identifier par la suite l'élément $e^\lambda \in A$ à la fonctionnelle e^λ sur $S(H)$ définie par la formule (13.3.4).

Soit B la sous-algèbre de A engendrée par les combinaisons linéaires des éléments e^λ, où $\lambda \in P$. Posons $x_i = e^{\lambda_i}$, où $\lambda_i(h_j) = 1$ pour $i = j$, $\lambda_i(h_j) = 0$ pour $i \neq j$.

D'après (13.3.7), chaque élément e^λ, où $\lambda \in P_+$, peut se mettre sous la forme $e^\lambda = (e^{\lambda_1})^{\lambda(h_1)} \ldots (e^{\lambda_r})^{\lambda(h_r)} = x_1^{\lambda(h_1)} \ldots x_r^{\lambda(h_r)}$, où les $\lambda(h_i)$ sont des entiers non négatifs. Puisque les éléments e^λ, $\lambda \in P_+$, forment une base de B, l'algèbre B est isomorphe à l'algèbre des polynômes des variables $x_1, \ldots, x_r$ à coefficients complexes. De même, l'algèbre A peut être identifiée à l'algèbre des polynômes des variables $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$.

Soient W le groupe de Weyl de l'algèbre de Lie L, et W^* l'ensemble des opérateurs adjoints des opérateurs du groupe W. Pour

chaque $w \in W^*$ posons

$$\tilde{w}(e^{\lambda}) = e^{w(\lambda)}, \quad \lambda \in P, \tag{13.3.8}$$

et prolongeons la transformation $\tilde{w}$ linéairement à toute l'algèbre A. Par définition, chaque élément du groupe de Weyl est un opérateur orthogonal, donc le déterminant de chaque opérateur w, $w \in W^*$, est égal à ± 1. Appelons l'élément $a \in A$ *symétrique* si $\tilde{w}(a) = a$ et *antisymétrique* si $\tilde{w}(a) = (\det w)\, a$ pour tous les $w \in W^*$.

L'élément $a \in A$ est symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si $S_i^* a = a$ (respectivement $S_i^* a = -a$) pour tous les $S_i^* = S_{\alpha_i}^*$, $i = 1, \ldots, r$. Ceci découle immédiatement de la relation $\det S_i^* = -1$, étant donné que les éléments S_i engendrent tout le groupe de Weyl W (voir § 11).

Introduisons dans l'algèbre A l'*opération d'alternation* en posant

$$\mathrm{Alt}\,(a) = \sum_{w \in W^*} (\det w)\, \tilde{w}(a). \tag{13.3.9}$$

I. *L'élément* Alt (a) *est antisymétrique pour tout $a \in A$.*

Démonstration. Lorsque $w_0 \in W$, on a

$$\tilde{w}_0(\mathrm{Alt}\,(a)) = \sum_{w \in W^*} (\det w)\, \tilde{w}_0 \tilde{w}(a) = \sum_{w \in W^*} \det(w_0^{-1} w)\, \tilde{w}(a) =$$

$$= \det(w_0^{-1}) \sum_{w \in W^*} (\det w)\, \tilde{w}(a) = \det(w_0^{-1})\, \mathrm{Alt}\,(a) = \det(w_0)\, \mathrm{Alt}\,(a).$$

Si a est un élément antisymétrique, la formule (13.3.9) implique immédiatement Alt $(a) = |W|\, a$, où $|W|$ est l'ordre du groupe de Weyl. Par conséquent, l'application $a \to |W|^{-1}$ Alt (a) est un opérateur qui projette l'algèbre A sur l'ensemble C des éléments antisymétriques de l'algèbre A. Comme C est évidemment un sous-espace linéaire de A, chaque élément $x \in C$ peut être représenté sous forme de combinaison linéaire des éléments $\mathrm{Alt}\,(e^{\lambda}) = \sum_{w \in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda)}$. Il est clair que $\mathrm{Alt}\,(e^{w(\lambda)}) = (\det w)\, \mathrm{Alt}\,(e^{\lambda})$ pour tous les $\lambda \in P$, $w \in W^*$; donc, en construisant une base de l'espace C à partir des éléments Alt (e^{λ}) on peut se limiter aux éléments e^{λ} pour des fonctionnelles linéaires λ telles que $\lambda \geqslant w(\lambda)$ pour tous les $w \in W^*$. En effet, pour chaque $\lambda \in P$ il existe, parmi le nombre fini d'éléments $w(\lambda)$, $w \in W^*$, une fonctionnelle λ_0 maximale dans cet ensemble pour l'ordre lexicographique, et Alt (e^{λ_0}) est proportionnel à Alt (e^{λ}).

Étudions les propriétés des fonctionnelles $\lambda \in P$ telles que $w(\lambda) \leqslant \lambda$ pour tous les $w \in W^*$.

II. *La symétrie S_i^* effectue une commutation des racines positives non égales à α_i; en outre, $S_i^*(\alpha_i) = -\alpha_i$.*

Démonstration. Soit $\alpha = \sum_{k=1}^{r} m_k \alpha_k$ une racine positive. Alors $S_i^* \alpha = \alpha - 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i = (m_i - 2(\alpha, \alpha_i) \times \times (\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i) + \sum_{k \neq i} m_k \alpha_k$. $\{\alpha_k\}$ est un système de racines simples, donc tous les coefficients dans la décomposition de $S_i^* \alpha$ relativement à ce système doivent être de même signe. Si $m_i < 2(\alpha, \alpha_i) \times \times (\alpha_i, \alpha_i)^{-1}$, on a $m_k \leqslant 0$ pour $k \neq i$. D'autre part, α est une racine positive, donc $m_k \geqslant 0$. Par conséquent, $m_k = 0$ pour $k \neq i$, i.e. α est proportionnelle à α_i. En vertu de III, 9.5, cela signifie que $\alpha = \alpha_i$; alors $S_i^* \alpha_i = \alpha_i - 2(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i = -\alpha_i$. Mais si $m_i \geqslant 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}$, alors tous les coefficients dans la décomposition de $S_i^*(\alpha)$ relativement au système $\{\alpha_k\}$ sont non négatifs, i.e. $S_i^*(\alpha)$ est une racine positive.

III. *Si* $\lambda \geqslant S_i^*(\lambda)$ *alors* $\lambda(h_i) \geqslant 0$.

Démonstration. $S_i^*(\lambda) = \lambda - 2(\lambda, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i$, donc la condition $\lambda \geqslant S_i^*(\lambda)$ est équivalente à la condition $(\lambda, \alpha_i) \geqslant 0$, i. e. $\lambda(h_i) \geqslant 0$.

IV. *Soit* $\lambda \in P$. *La condition* $w(\lambda) < \lambda$ *est vérifiée pour tous les* $w \in W^*$, $w \neq 1$, *si et seulement si on a* $\lambda(h_i) > 0$ *pour* $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration. Si $\lambda(h_i) \leqslant 0$, alors $S_i^*(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i \geqslant \lambda$. Réciproquement, soit $\lambda(h_i) > 0$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$. Montrons que $w(\lambda) < \lambda$ pour tous les $w \in W^*$, $w \neq 1$. Cette condition est vérifiée pour $w = S_i^*$, puisque $\lambda > S_i^*(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$. Soit $p > 1$; supposons que l'inégalité $\lambda > w(\lambda)$ est démontrée pour tous les $w \in W^*$ que l'on peut représenter sous forme de produit de $q < p$ symétries S_i^*. Soit $w = S_{i_1}^* \ldots S_{i_p}^* = w_0 S_{i_p}^*$, où $w_0 = S_{i_1}^* \ldots \ldots S_{i_{p-1}}^*$. Alors $w(\lambda) = w_0(S_{i_p}^* \lambda) = w_0(\lambda) - \lambda(h_{i_p}) w_0(\alpha_{i_p})$. Si $w_0(\alpha_{i_p})$ est une racine positive, alors $w(\lambda) < w_0(\lambda) < \lambda$. Supposons que $w_0(\alpha_{i_p})$ est une racine négative. Désignons par k le plus petit nombre tel que $S_{i_l}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$ pour tous les $l \geqslant k$. Par hypothèse, $w_0(\alpha_{i_p}) < 0$, donc, $k > 1$; d'autre part, on peut supposer que $S_{i_{p-1}}^* \neq S_{i_p}^*$ (dans le cas contraire on aurait pu simplifier l'expression pour w en se servant de l'égalité $S_{i_p}^{*2} = 1$), donc II implique $S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$, i. e. $k \leqslant p - 1$. Par définition, $S_{i_k}^* \ldots \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$ et $S_{i_{k-1}}^*(S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p})) < 0$. En vertu de II, on en tire que $S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) = \alpha_{i_{k-1}}$. En posant $w_0' = S_{i_1}^* \ldots S_{i_{k-2}}^*$, $w_0'' = S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*$, on obtient $w_0 = w_0' S_{i_{k-1}}^* w_0''$, où $w_0''(\alpha_{i_p}) = \alpha_{i_{k-1}}$. Il est évident que $w_0'' S_\alpha^* (w_0'')^{-1} = S_{w_0''(\alpha)}^*$, en particulier $w_0'' S_{i_p}^* (w_0'')^{-1} = = S_{i_{k-1}}^*$, $w_0'' S_{i_p}^* = S_{i_{k-1}}^* w_0''$ et $w = w_0 S_{i_p}^* = w_0' S_{i_{k-1}}^* w_0'' S_{i_p}^* = w_0' S_{i_{k-1}}^{*2} w_0'' = = w_0' w_0''$, i. e. w peut se mettre sous forme de produit de $p - 2$ symétries S_i^*, et l'inégalité $w(\lambda) < \lambda$ est vérifiée par récurrence.

V. *Si* $\lambda(h_i) = 0$ *pour un certain* $i = 1, \ldots, r$, *alors* Alt $(e^\lambda) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Il découle de l'hypothèse que $S_i^*(\lambda) = \lambda$. Soit W' le sous-ensemble de W qui coupe chaque classe d'équivalence wH du groupe W suivant le sous-groupe $H = \{1, S_i\}$ exactement une fois. Alors

$$\mathrm{Alt}\,(e^\lambda) = \sum_{w \in (W')^*} \{(\det w)\, e^{w(\lambda)} + \det(wS_i^*)\, e^{(wS_i^*)(\lambda)}\} = 0,$$

puisque det $S_i^* = -1$.

VI. *Chaque élément antisymétrique de l'algèbre A est une combinaison linéaire d'éléments de la forme* Alt (e^λ), *où* $\lambda(h_i) > 0$ *pour tous les* $i = 1, \ldots, r$.

D é m o n s t r a t i o n. Si $a \in \mathbf{C}$, alors a est une combinaison linéaire d'éléments de la forme Alt (e^λ) et l'on peut supposer que $\lambda \geqslant w(\lambda)$ pour $w \in W^*$. Il ne reste qu'à appliquer III, IV et V.

VII. *Soit* α *une racine non nulle,* $a \in A$, $\widetilde{S}_\alpha^* a = -a$. *Alors l'élément* a *se met sous la forme* $a = (1 - e^{-\alpha})\, b$, *où* $b \in A$.

Démonstration. Puisque $(1 - \widetilde{S}_\alpha^*)\, a = 2a$, on a en posant $a = \sum a_\lambda e^\lambda$, $a_\lambda \in \mathbf{C}$ et en appliquant (13.3.8) et (13.3.5)

$$a = (1/2)\ (1 - \widetilde{S}_\alpha^*)\, a = (1/2) \sum a_\lambda (1 - \widetilde{S}_\alpha^*)\, e^\lambda =$$
$$= \sum (a_\lambda/2)\, (e^\lambda - e^{\lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha}) = \sum (a_\lambda/2)\, e^\lambda \{1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(h_\alpha)}\},$$

où les $\lambda(h_\alpha)$ sont des entiers. Puisque $1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(h_\alpha)} = (1 - e^{-\alpha})\, b_\lambda$ pour un certain $b_\lambda \in A$ on a $a = (1 - e^{-\alpha}) \sum (a_\lambda/2)\, e^\lambda b_\lambda$.

Désignons par ρ la demi-somme de toutes les racines positives de l'algèbre de Lie L.

VIII. *Si* $a \in \mathbf{C}$, *alors* $a = Db$, *où* $b \in A$, *tandis que*

$$D = e^\rho \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}). \qquad (13.3.10)$$

D é m o n s t r a t i o n. Rappelons que l'algèbre A est isomorphe à l'algèbre des polynômes en les variables $x_1, \ldots, x_r$, $x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$. Les éléments e^α correspondent à certains monômes de l'algèbre A. Les éléments $x_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$, appartiennent à l'algèbre des polynômes en $x_1, \ldots, x_r$ et, évidemment, sont des éléments irréductibles *) de cette algèbre. Pour chaque $\alpha > 0$ l'élément e^α est appliqué dans e^{α_i} par une certaine transformation w appartenant au groupe de Weyl, donc les éléments de l'algèbre des

*) Rappelons qu'un élément x d'une algèbre commutative A est dit *irréductible*, ou *simple*, si dans une décomposition quelconque $x = x_1x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, un au moins des éléments x_1 et x_2 se réduit à A.

polynômes en $x_1, \ldots, x_r$ qui correspondent aux éléments $e^\alpha - 1$ de la sous-algèbre $B \subset A$ sont des éléments irréductibles de l'algèbre A. En effet, si $e^\alpha - 1 = a_1 a_2$, où $a_1, a_2 \in A$, on a $e^{\alpha_i} - 1 = b_1 b_2$, où $b_1 = \tilde{w}(a_1)$, $b_2 = \tilde{w}(a_2)$, donc $x_1 - 1 = f_1(x) f_2(x)$, où f_1, f_2 sont les polynômes en $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$. En multipliant la dernière égalité par une puissance suffisamment grande du monôme $x_1, \ldots, x_r$, on obtient $x_1^{2N} \ldots x_r^{2N}(x_i - 1) = P_1(x) P_2(x)$, où $P_i = x_1^N \ldots x_r^N f_i(r)$, $i = 1, 2$, sont des polynômes en $x_1, \ldots, x_r$. Il découle de l'unicité de la décomposition en facteurs simples dans l'anneau des polynômes de n variables (voir A. Kouroch [1]) que l'un des polynômes P_1 ou P_2 est un monôme en $x_1, \ldots, x_r$; par conséquent, soit f_1, soit f_2 est un monôme en $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$, i.e. est un élément inversible de l'algèbre A.

Soit $a \in \mathbf{C}$; puisque det $S_\alpha^* = -1$, on a $S_\alpha^* a = -a$ pour tous les $\alpha > 0$. En vertu de VII, on en tire que l'élément a se représente sous la forme $(1 - e^{-\alpha}) b_\alpha$, où $b_\alpha \in A$ pour tous les $\alpha > 0$. Les éléments $(1 - e^{-\alpha}) = e^{-\alpha}(e^\alpha - 1)$ sont simples entre eux pour des $\alpha > 0$ distincts, alors d'après le théorème de la décomposition en facteurs simples dans l'anneau des polynômes de n variables l'élément $a \in \mathbf{C}$ se met sous la forme $a = \prod\limits_{\alpha>0} (1 - e^{-\alpha}) b_1 = e^\rho \prod\limits_{\alpha \geqslant 0} (1 - e^{-\alpha})(e^{-\rho} b_1) = Db$, où $b_1, b \in A$. La proposition VIII est démontrée.

Trouvons $S_i^* D$. Les facteurs de D différents de $e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2}$ sont deux à deux permutables d'après II, tandis que $e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2}$ a pour image $e^{-\alpha_i/2} - e^{\alpha_i/2} = -(e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2})$. Par conséquent, $S_i^* D = -D$ pour tous les $i = 1, \ldots, r$, donc $D \in \mathbf{C}$.

IX. $D = \mathrm{Alt}\,(e^\rho)$.

Démonstration. En vertu de la formule (13.3.10) l'élément D est une combinaison linéaire des éléments e^λ tels que $\rho \geqslant \lambda \geqslant -\rho$. Par conséquent, si $D = \sum c_\lambda \mathrm{Alt}\,(e^\lambda)$, on peut supposer que la somme dans le deuxième membre s'étend seulement à des λ tels que $\rho \geqslant w(\lambda) \geqslant -\rho$ pour tous les $w \in W^*$. En effet, s'il existe un $\lambda \in P$ et un $w \in W^*$ tels que $c_\lambda \neq 0$, tandis que la relation $\rho \geqslant w(\lambda) \geqslant -\rho$ n'est pas vérifiée, alors les relations $\mathrm{Alt}\,(e^\lambda) = \sum\limits_{w \in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda)}$ et $c_\lambda \neq 0$ impliquent que la décomposition de l'élément $D \in A$ relativement à la base $\{e^\lambda\}$ contient un élément e^μ dont l'exposant $\mu = w(\lambda)$ ne vérifie pas l'inégalité $\rho \geqslant \mu \geqslant -\rho$. D'autre part, les éléments $\mathrm{Alt}\,(e^\lambda)$ sont antisymétriques, et d'après VIII $\mathrm{Alt}\,(e^\lambda) = Db_\lambda$, où $b_\lambda \in A$.

Comparons les termes supérieurs et inférieurs du premier et du deuxième membre de l'égalité $\mathrm{Alt}\,(e^\lambda) = Db_\lambda$. Le terme supérieur e^μ du produit Db_λ est égal au produit des termes supérieurs de D et

de b_λ, i.e. $\mu \geqslant \rho$; de même, le terme inférieur e^ν du produit Db_λ est égal au produit des termes inférieurs de D et de b_λ, i.e. $\nu \leqslant -\rho$; d'autre part, les exposants des termes supérieur et inférieur de l'expression Alt (e^λ) sont compris par définition entre ρ et $-\rho$. On en tire que les termes supérieur et inférieur de b_λ sont des constantes, i.e. b_λ est une constante, et, λ s'obtenant de ρ par une transformation appartenant au groupe de Weyl, on peut supposer que $\lambda = \rho$. Ainsi, D et Alt (e^ρ) sont proportionnels; puisque les termes supérieurs de D et Alt (e^ρ) sont égaux à e^ρ, on a $D =$ Alt (e^ρ).

X. $\rho(h_i) = 1$.

Démonstration. D'une part

$$S_i^*\rho = \rho - \rho(h_i)\,\alpha_i; \qquad (13.3.11)$$

et d'autre part il découle immédiatement de II que

$$S_i^*\rho = S_i^*\left((1/2)\sum\alpha_j\right) = (1/2)\,S_i^*\left(\sum\alpha_j\right) = (1/2)\left(\sum\alpha_j - 2\alpha_i\right) = \rho - \alpha_i. \qquad (13.3.12)$$

En comparant les deuxièmes membres des égalités (13.3.11) et (13.3.12) nous obtenons $\rho(h_i) = 1$.

XI. *Soit a un élément symétrique de l'algèbre A. Alors a est une combinaison linéaire d'éléments de la forme* Alt $(e^{\lambda+\rho})$/Alt (e^ρ), $\lambda \in P_+$.

Démonstration. L'élément aD est un élément antisymétrique de l'algèbre A; d'après VI, il se met sous la forme $aD = \sum c_\mu$ Alt (e^μ), où les $\mu(h_i) > 0$ sont des entiers positifs pour tous les $i = 1, \ldots, r$. Posons $\mu = \lambda + \rho$. En vertu de X $\lambda(h_i) = \mu(h_i) - \rho(h_i) = \mu(h_i) - 1 \geqslant 0$; ainsi, $\lambda \in P_+$ et $aD = \sum c_{\lambda+\rho}$ Alt $(e^{\lambda+\rho})$, où $\lambda \in P_+$. Les éléments Alt $(e^{\lambda+\rho})$ sont antisymétriques (voir I); conformément aux propositions VIII et IX, on a l'égalité Alt $(e^{\lambda+\rho}) = a_\lambda D = a_\lambda$ Alt (e^ρ), où a_λ est un élément de l'algèbre A. Ainsi, $aD = \sum c_{\lambda+\rho}a_\lambda D$, i.e. $a = \sum c_{\lambda+\rho}a_\lambda$, où $a_\lambda =$ Alt $(e^{\lambda+\rho})$/Alt (e^ρ).

13.4. Formule de Weyl pour les caractères. Passons maintenant au calcul du caractère d'une représentation linéaire irréductible π de l'algèbre de Lie L dans un espace vectoriel V de dimension finie. Il est évident que $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ possède une trace nulle pour tous les $x, y \in U(L) = U$. Par conséquent, selon la proposition II de 12.2, pour trouver le caractère d'une représentation il suffit de calculer tr $\pi(h)$ lorsque $h \in U(H)$.

Soit λ le poids supérieur de la représentation π. Désignons par n_μ la multiplicité du poids μ dans la représentation π, i.e. la dimension de l'espace V_μ. Soit $h \in U(H) \subset U(L)$; alors l'opérateur $\pi(h)$ agit dans le sous-espace V_μ comme un opérateur scalaire. La

valeur propre de l'opérateur $\pi(h)$ sur le sous-espace V_μ définit un homomorphisme de l'algèbre $U(H)$ sur le corps **C**. Comme H est une algèbre de Lie abélienne, $U(H)$ et $S(H)$ sont canoniquement isomorphes; l'homomorphisme de l'algèbre $S(H)$ dans **C** qui applique 1 dans 1 et les éléments $h \in H$ dans $\mu(h)$, est l'homomorphisme $e^\mu = \sum_{m \geqslant 0} (m\,!)^{-1} \mu^m$. Ainsi la valeur propre de l'opérateur $\pi(h)$ dans le sous-espace V_μ est égale à (h, e^μ), donc

$$\operatorname{tr} \pi(h) = \sum_\mu n_\mu (h, e^\mu) = \Big(h, \sum_\mu n_\mu e^\mu\Big), \qquad (13.4.1)$$

et $\dim V = \sum_\mu n_\mu$.

Considérons l'élément

$$\varphi_\lambda = \sum_\mu n_\mu e^\mu \qquad (13.4.2)$$

de l'algèbre A. Si μ_1 et μ_2 sont adjoints relativement au groupe de Weyl, on a $n_{\mu_1} = n_{\mu_2}$ en vertu du théorème 1 du § 12. On en déduit que φ_λ est un élément symétrique. Il découle alors de X, 12.3, que φ_λ est une combinaison linéaire des éléments de la forme $\operatorname{Alt}(e^{(\mu+\rho)})/\operatorname{Alt}(e^\rho)$.

I. *Supposons que* $e_\alpha \in L^\alpha$ *pour tous les* $\alpha \neq 0$, *et* $t(\mu, \alpha)$ *est la trace de la restriction de l'opérateur* $\pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})$ *au sous-espace* V_μ. *Si* $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$, *alors*

$$t(\mu, \alpha) - t(\mu + \alpha, \alpha) = n_\mu (\mu, \alpha). \qquad (13.4.3)$$

Démonstration. Soit E la somme des sous-espaces V_λ et $V_{\lambda+\alpha}$. Introduisons les opérateurs linéaires P_+, P_- dans E en posant $P_+x = \pi(e_\alpha)\,x$, $P_+y = 0$; $P_-x = 0$, $P_-y = \pi(e_{-\alpha})\,y$ pour tous les $x \in V_\lambda$, $y \in V_{\lambda+\alpha}$. Alors $[P_+, P_-]\,x = -\pi(e_{-\alpha})\,\pi(e_\alpha)(x) = (\lambda, \alpha)\,x - \pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})\,x$; $[P_+, P_-]\,y = \pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})\,y$, donc la trace de l'opérateur $[P_+, P_-]$ est nulle; d'autre part elle est égale à $n_\mu(\lambda, \alpha) - t(\mu, \alpha) + t(\mu + \alpha, \alpha)$, d'où l'on tire la formule (13.4.3).

Supposons que les $k_i \in H$ sont choisis de manière à avoir $(h_i, k_l) = \delta_{ij}$, où $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. En vertu de (6.4.2), l'élément $z = \sum_\alpha e_\alpha e_{-\alpha} + \sum_i h_i k_i$ est l'élément de Casimir associé à la représentation adjointe de l'algèbre de Lie L. L'élément z appartient au centre de l'algèbre $U = U(L)$. Il découle donc de l'irréductibilité de la représentation π et du lemme de Schur que l'opérateur $\pi(z)$ est scalaire, i.e. $\pi(z) = c \cdot 1$. Calculons la trace de l'opérateur $\pi(z)$ dans le sous-espace V_μ, il vient

$$c n_\mu = \operatorname{tr}_{V_\mu} \pi(z) = \sum \operatorname{tr}_{V_\mu} (\pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})) + \sum \operatorname{tr}_{V_\mu} (\pi(h_i)\,\pi(k_i)) =$$
$$= \sum_\alpha t(\mu, \alpha) + \sum_i n_\mu \mu(h_i)\,\mu(k_i). \qquad (13.4.4)$$

La condition $(h_i, k_j) = \delta_{ij}$ implique $\sum_i \mu(h_i)\mu(k_i) = (\mu, \mu)$, alors (13.4.4) donne

$$cn_\mu = \sum_\alpha t(\mu, \alpha) + n_\mu(\mu, \mu),$$

i.e.

$$\sum_\alpha t(\mu, \alpha) = n_\mu(c - (\mu, \mu)). \tag{13.4.5}$$

Soit Q le produit tensoriel $A \otimes H^*$. Introduisons dans Q un « produit scalaire » à valeurs dans A en posant

$$(a \otimes \lambda, b \otimes \mu) = ab(\lambda, \mu), \tag{13.4.6}$$

et prolongeons-le par linéarité à tout l'espace Q. Mettons également

$$a(b \otimes \lambda) = (ab) \otimes \lambda; \tag{13.4.7}$$

cette loi, étendue à tout l'espace Q, détermine une représentation de l'algèbre A dans l'espace Q. Posons

$$\Delta(e^\lambda) = (\lambda, \lambda)e^\lambda, \tag{13.4.8}$$

$$g(e^\lambda) = e^\lambda \otimes \lambda \tag{13.4.9}$$

pour tous les $e^\lambda \in A$ et prolongeons les applications Δ et g par linéarité à des opérateurs linéaires de l'espace A dans l'espace A et Q respectivement. Comme on le vérifie aisément,

$$g(ab) = bg(a) + ag(b), \tag{13.4.10}$$

$$\Delta(ab) = a\Delta(b) + 2(g(a), g(b)) + \Delta(a)b \tag{13.4.11}$$

(il suffit de vérifier ces relations pour $a = e^\lambda$, $b = e^\mu$; alors la relation (13.4.10) s'obtient immédiatement de (13.4.7) et (13.4.9) tandis que la formule (13.4.11) se trouve à l'aide de l'égalité $(\lambda + \mu, \lambda + \mu) = (\lambda, \lambda) + 2(\lambda, \mu) + (\mu, \mu)$.

Considérons maintenant l'élément

$$R = \prod_{\alpha \neq 0}(e^\alpha - 1) = \prod_{\alpha > 0}(e^\alpha - 1)(e^{-\alpha} - 1) = -D^2 \tag{13.4.12}$$

et trouvons le produit

$$R(c\varphi_\lambda - \Delta\varphi_\lambda) = T. \tag{13.4.13}$$

En vertu de (13.4.2) on a

$$T = \prod_{\beta \neq 0}(e^\beta - 1)\left(c \sum n_\mu e^\mu - \Delta\left(\sum n_\mu e^\mu\right)\right) =$$

$$= \prod_{\beta \neq 0}(e^\beta - 1)\sum_\mu n_\mu e^\mu(c - (\mu, \mu)). \tag{13.4.14}$$

On tire alors des relations (13.4.5) que

$$T = \prod_{\beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} e^{\mu} \sum_{\alpha} t(\mu, \alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha} \Big(\prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \Big) (e^{\alpha} - 1) \sum_{\mu} t(\mu, \alpha) e^{\mu} =$$

$$= \sum_{\alpha} \Big(\prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \Big) \sum_{\mu} t(\mu, \alpha) (e^{\mu + \alpha} - e^{\mu}). \qquad (13.4.15)$$

En changeant l'ordre de sommation, on obtient

$$T = \sum_{\alpha} \prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} e^{\mu + \alpha} (t(\mu, \alpha) - t(\mu + \alpha, \alpha)).$$

Ensuite, la proposition I et la relation (13.4.6) impliquent

$$T = \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} n_{\mu} (\mu, \alpha) e^{\mu + \alpha} =$$

$$= \Big(\sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) (e^{\alpha} \otimes \alpha), \ \sum_{\mu} n_{\mu} (e^{\mu} \otimes \mu) \Big). \qquad (13.4.16)$$

En vertu de (13.4.12) on a $R = \prod_{\alpha \neq 0} (e^{\mu} - 1)$, donc (13.4.10) et (13.4.9) entraînent l'égalité

$$g(R) = \sum_{\alpha \neq 0} \Big(\prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \Big) (e^{\alpha} \otimes \alpha). \qquad (13.4.17)$$

D'autre part, on trouve en utilisant (13.4.2) $\sum_{\mu} n_{\mu} (e^{\mu} \otimes \mu) = g(\sum n_{\mu} e^{\mu}) = g(\varphi_{\lambda})$, d'où l'on obtient, en se servant de (13.4.7) et en substituant dans (13.4.16)

$$T = (g(R), \ g(\varphi_{\lambda})). \qquad (13.4.18)$$

En portant (13.4.18) dans (13.4.13), on trouve $R(c\varphi_{\lambda} - \Delta\varphi_{\lambda}) = (g(R), g(\varphi_{\lambda}))$. Divisons cette égalité par $(-D)$ en remarquant que $g(R) = g(-D^2) = -2Dg(D)$ (en vertu de (13.4.10)); il vient

$$D(c\varphi_{\lambda} - \Delta\varphi_{\lambda}) = 2(g(D), \ g(\varphi_{\lambda})). \qquad (13.4.19)$$

Par conséquent

$$c(D\varphi_{\lambda}) = D\Delta(\varphi_{\lambda}) + 2(g(D), \ g(\varphi_{\lambda})),$$

et, à l'aide de l'égalité (13.4.11), on trouve

$$c(D\varphi_{\lambda}) = \Delta(D\varphi_{\lambda}) - \Delta(D)\varphi_{\lambda}. \qquad (13.4.20)$$

Envisageons l'expression $\Delta(D) = \Delta(\mathrm{Alt}(e^{\rho}))$. Pour chaque $w \in W^*$ on a $(w(\rho), w(\rho)) = (\rho, \rho)$, étant donné que la transformation w est orthogonale. Il découle alors de (13.4.8) que $\Delta(D) = (\rho, \rho) D$,

i.e. en vertu de (13.4.20)

$$\Delta (D\varphi_\lambda) = (c + (\rho, \rho)) (D\varphi_\lambda), \qquad (13.4.21)$$

et $D\varphi_\lambda$ est un vecteur propre de l'opérateur Δ. Trouvons la valeur propre correspondante. Remarquons que le terme supérieur du produit $D\varphi_\lambda$ est égal à $e^\rho e^\lambda = e^{\rho+\lambda}$; lorsqu'on applique l'opérateur Δ, ce terme est multiplié par $(\lambda + \rho, \lambda + \rho)$, donc

$$\Delta (D\varphi_\lambda) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) (D\varphi_\lambda). \qquad (13.4.22)$$

D'autre part, l'élément $D\varphi_\lambda$ est antisymétrique, d'où l'on tire l'égalité

$$|W| D\varphi_\lambda = \text{Alt}(D\varphi_\lambda) = \sum_{w \in W^*} \sum_\mu (\det w)\, n_\mu \text{Alt}(e^{\mu+w\rho}). \qquad (13.4.23)$$

Le terme de cette somme qui correspond à $w \in W^*$ est un vecteur propre de l'opérateur Δ à valeur propre $(\mu + w\rho, \mu + w\rho)$; on peut donc se limiter aux seuls termes pour lesquels $(\mu + w\rho, \mu + w\rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$. Trouvons ces termes.

II. *Si* μ *est un poids de la représentation* π *différent de* λ, *on a* $(\mu + w\rho, \mu + w\rho) < (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du théorème 1 du § 12 (voir (12.1.6)), chaque poids μ est conjugué relativement au groupe de Weyl d'un poids ν tel que $\nu(h_i) \geqslant 0$ et $(\nu, \nu) \leqslant (\lambda, \lambda)$, et l'on a $(\mu, \mu) = (\nu, \nu)$. D'autre part $w^{-1}(\mu)$ est le poids de la représentation π, donc $w^{-1}(\mu) = \lambda - \sum m_i \alpha_i$, où les m_i sont des entiers non négatifs. Par conséquent,

$$(\mu, w\rho) = (w^{-1}(\mu), \rho) = (\lambda, \rho) - \sum_i m_i (\rho, \alpha_i), \qquad (13.4.24)$$

$$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + w\rho, \mu + w\rho) =$$
$$= (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) + 2 \sum_i m_i (\rho, \alpha_i). \qquad (13.4.25)$$

En vertu de IX, 13.3, $\rho(h_i) = 2(\rho, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1} = 1$, de sorte que

$$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + w\rho, \mu + w\rho) =$$
$$= (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) + \sum_i m_i (\alpha_i, \alpha_i) \geqslant 0, \qquad (13.4.26)$$

l'égalité ayant lieu seulement dans le cas où tous les m_i sont nuls, i.e. $w^{-1}(\mu) = \lambda$.

En vertu de la proposition II, tous les termes de la somme sur μ dans le deuxième membre de la formule (13.4.23) sont nuls sauf le terme où $\mu = \lambda$, donc

$$D\varphi_\lambda = |W|^{-1} \sum_{w \in W^*} (\det w)^2 n_\lambda \text{Alt}(e^{\lambda+\rho}) = n_\lambda \text{Alt}(e^{\lambda+\rho}),$$

i.e.

$$\varphi_\lambda = \mathrm{Alt}\,(e^{\lambda+\rho})/\mathrm{Alt}\,(e^{\rho}), \tag{13.4.27}$$

de sorte que $n_\lambda = 1$.

En réunissant les relations (13.4.1), (13.4.2) et (13.4.27), nous voyons que nous avons démontré le

THÉORÈME 1. *Le caractère d'une représentation irréductible* π *de dimension finie d'une algèbre de Lie complexe semi-simple L se calcule suivant la formule*

$$\mathrm{tr}\,\pi\,(h) = \left(h,\ \frac{\sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\rho)}}\right) \tag{13.4.28}$$

pour tous les $h \in U\,(H)$, *où* λ *est le poids supérieur de la représentation* π, *H la sous-algèbre de Cartan de L,* W^* *le groupe de Weyl correspondant, et enfin* ρ *est la demi-somme des racines positives.*

La formule (13.4.28) s'appelle *formule de Weyl pour les caractères.*

Trouvons maintenant la dimension de la représentation π.

THÉORÈME 2. *La dimension d'une représentation irréductible* π *de dimension finie d'une algèbre de Lie L complexe semi-simple peut être calculée suivant la formule*

$$\dim \pi = \frac{\prod\limits_{\alpha>0} (\lambda+\rho,\ \alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0} (\rho,\ \alpha)}. \tag{13.4.29}$$

D é m o n s t r a t i o n. Considérons l'homomorphisme de l'algèbre A dans le corps C qui applique tous les éléments e^{λ}, $\lambda \in P$, dans 1. Cet homomorphisme se réduit à une composition de deux homomorphismes: le premier fait correspondre à l'élément e^{λ} la série de puissances $e^{x(\lambda,\rho)}$ relativement à la variable x et le deuxième consiste à prendre le terme de degré nul des séries obtenues. Supposons que ψ_μ est l'homomorphisme qui applique e^{λ} dans $e^{x(\lambda,\mu)}$ Alors

$$\psi_\mu\,(\mathrm{Alt}\,(e^{\lambda})) = \sum_w (\det w)\, e^{x(w\lambda,\ \mu)} = \sum_w (\det w)\, e^{x(\lambda,\ w^{-1}\mu)} = \psi_\lambda\,(\mathrm{Alt}\,(e^{\mu})), \tag{13.4.30}$$

donc

$$\psi_\rho\,(\mathrm{Alt}\,(e^{\lambda})) = \psi_\lambda\,(\mathrm{Alt}\,(e^{\rho})) = \prod_{\alpha>0} (e^{x(\alpha,\ \lambda)/2} - e^{-x(\alpha,\ \lambda)/2}). \tag{13.4.31}$$

Le terme de moindre degré de cette série est égal à $\prod_{\alpha>0} x(\alpha, \lambda)$; par conséquent le terme constant de la série $\psi_\rho(\mathrm{Alt}(e^{\lambda+\rho}))/\psi_\rho(\mathrm{Alt}(e^\rho))$ est égal à $\prod_{\alpha>0}(\lambda+\rho, \alpha)/\prod_{\alpha>0}(\rho, \alpha)$. Ainsi, $\dim \pi = \prod_{\alpha>0}(\lambda+\rho, \alpha)/\prod_{\alpha>0}(\rho, \alpha)$, ce qui démontre la formule (13.4.29).

Indiquons quelques corollaires de la formule de Weyl (13.4.28).

En multipliant les deux membres de la formule $\varphi_\lambda = \mathrm{Alt}(e^{\lambda+\rho})/D$ par le dénominateur D, on obtient

$$\sum_w \sum_\mu n_\mu (\det w)\, e^{\mu+w\rho} = \sum_w (\det w)\, e^{w(\lambda+\rho)}. \tag{13.4.32}$$

Soit μ un poids non égal à λ. En vertu de II, on a $(\mu+\rho, \mu+\rho) < (\lambda+\rho, \lambda+\rho)$, donc $\mu+\rho$ ne coïncide avec aucune des fonctionnelles de la forme $w(\lambda+\rho)$. Par conséquent, le coefficient total auprès de $e^{\mu+\rho}$ dans le premier membre de l'égalité (13.4.32) est nul. Ce coefficient s'obtient en prenant la somme sur tous les poids μ' tels que $\mu' + w\rho = \mu + \rho$; ainsi

$$\sum_{w\in W} n_{\mu+\rho-w\rho} (\det w) = 0. \tag{13.4.33}$$

D'après IV et X de 13.3, $\rho - w\rho > 0$ pour $w \neq 1$, donc la formule (13.4.33) est une formule récurrente que l'on peut utiliser pour calculer les multiplicités n_μ. On peut l'écrire comme suit:

$$n_\mu = -\sum_{w\neq 1} (\det w)\, n_{\mu+\rho-w\rho}. \tag{13.4.34}$$

Indiquons sans démonstration deux autres formules récurrentes pour la multiplicité du poids *)

1) Formule de Freudentahl:

$$n_\mu = 2\left((\lambda+\rho, \lambda+\rho) - (\mu+\rho, \mu+\rho)\right)^{-1} \sum_{\alpha>0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{\mu+k\alpha} (\mu + k\alpha, \alpha). \tag{13.4.35}$$

2) Formule de Constant

$$n_\mu = \sum_{w\in W^*} (\det w)\, P(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)), \tag{13.4.36}$$

où $P(0) = 0$ tandis que pour $\mu \neq 0$ le nombre $P(\mu)$ est égal au nombre des représentations distinctes du vecteur μ sous forme d'une somme de racines positives.

Pour la démonstration de ces formules voir, par exemple, le livre de D. Jélobenko [1] ainsi que l'article de P. Cartier [1*].

) Les formules connues concernant la multiplicité du poids ne se réduisent pas à celles indiquées ici; cf., par exemple, A. Klimyk [1].

13.5. Représentations de l'algèbre de Lie $sl(n+1, C)$. Soit L une algèbre de Lie simple du type (A_n); par exemple, $L = sl(n+1, C)$ (voir 10.3; nous nous servons ici des notations qui y sont introduites). Soit H la sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie L constituée des matrices diagonales. Définissons les fonctionnelles linéaires λ_i sur H par la formule

$$\lambda_i(h) = h_i \text{ si } h = \begin{Vmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{n+1} \end{Vmatrix}. \tag{13.5.1}$$

Il est évident que

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0, \tag{13.5.2}$$

les fonctionnelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ formant une base de l'espace H^* adjoint de H.

L'ensemble Δ des racines de l'algèbre de Lie L relativement à H est constitué par les fonctionnelles linéaires de la forme

$$\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots, n+1. \tag{13.5.3}$$

Munissons le sous-espace H_0 des matrices diagonales réelles de l'ordre lexicographique naturel (voir II de 9.6 et 10.3). L'ensemble Δ^+ des racines positives de l'algèbre de Lie L relativement à H est alors constitué par les racines

$$\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+1. \tag{13.5.4}$$

Les racines

$$\omega_{i,\,i+1} = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.5.5}$$

forment le système de racines simples. L'algèbre de Lie nilpotente $\sum_{\alpha>0} L^\alpha$ coïncide avec la sous-algèbre de Lie $N^+ \subset L$ constituée par les matrices triangulaires supérieures à diagonale principale nulle. D'une manière analogue, $N^- = \sum_{\alpha<0} L^\alpha$ est la sous-algèbre de Lie des matrices triangulaires inférieures nilpotentes.

Introduisons $h'_{\omega_{ij}} \in H_0$ en posant $h'_{\omega_{ij}} = (2(n+1))^{-1}(e_{ii} - e_{jj})$, où e_{ij} est la matrice dont le seul élément non nul, situé à l'intersection de la j-ième colonne et de la i-ième ligne est égal à 1. Alors

$$\omega_{ij}(h) = (h, h'_{\omega_{ij}}) \tag{13.5.6}$$

pour tous les $h \in H$, où $(.,.)$ est la forme de Cartan-Killing sur H:

$$(h, \tilde{h}) = (2n+1) \sum_{i=1}^{n+1} h_i \tilde{h}_i. \tag{13.5.7}$$

Soit

$$h_{\omega_{ij}} = 2(\omega_{ij}(h'_{\omega_{ij}}))^{-1} h'_{\omega_{ij}} = e_{ii} - e_{jj}. \tag{13.5.8}$$

Trouvons les représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre de Lie $L = sl(n + 1, C)$ et les caractères de ces représentations.

I. *La fonctionnelle linéaire* λ *sur* H *est le poids supérieur d'une représentation irréductible* π *de l'algèbre de Lie* L *si et seulement si*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n, \tag{13.5.9}$$

où tous les m_i *sont des entiers non négatifs, et l'on a* $m_k \geqslant m_{k+1}$ *pour tous les* $k = 1, \ldots, n - 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Chaque élément $\lambda \in H^*$ se met sous la forme (13.5.9); on tire de (13.5.8) que

$$\lambda(h_{\omega_{i,\,i+1}}) = \lambda(e_{ii} - e_{i+1,\,i+1}) = m_i - m_{i+1}, \tag{13.5.10}$$

où l'on a posé $m_{n+1} = 0$. En vertu du théorème 1 du § 12, la fonctionnelle λ est le poids supérieur d'une représentation irréductible de dimension finie si et seulement si les $\lambda(h_{\omega_{i,i+1}})$ sont des entiers non négatifs pour tous les $i = 1, \ldots, n$. D'où l'on tire I, à l'aide de (13.5.10).

Construisons la représentation à poids supérieur $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots$ $\ldots + m_n\lambda_n$. Soit π la représentation identique de l'algèbre de Lie L dans l'espace $V = C^{n+1}$. Alors les poids de la représentation π sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ $(\lambda_{n+1} = -\lambda_1 - \ldots - \lambda_n)$ et donc le poids supérieur de la représentation π est égal à λ_1.

II. *Soit* k *un des nombres* 1, 2, ..., n. *Désignons par* V_k *le produit extérieur de* k *copies de l'espace* V. *Soit* $\bigotimes_{i=1}^{k} \pi$ *le produit tensoriel de* k *copies de la représentation* π *de l'algèbre de Lie* L. *Alors l'espace* V_k *est invariant relativement à la représentation* $\bigotimes_{i=1}^{k} \pi$; *la représentation* π_k *définie par la restriction de la représentation* $\bigotimes_{i=1}^{k} \pi$ *à* V_k *est irréductible, et le poids supérieur de la représentation* π_k *est égal à* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

D é m o n s t r a t i o n. L'espace V_k est l'enveloppe linéaire des éléments de la forme $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}$ où $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant$ $\leqslant n + 1$, tandis que $f_1, \ldots, f_{n+1}$ est une base canonique de $V =$ $= C^{n+1}$; en outre $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign}\,\sigma) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots$ $\ldots \otimes f_{i_{\sigma(k)}}$, où S_k est le groupe des permutations σ tandis que si sign $\sigma = 1$ pour les permutations paires et sign $\sigma = -1$ pour

les permutations impaires. En utilisant la formule (1.2.2) on trouve

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{k}\pi\right)(x)(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k})=$$
$$=\pi(x)f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k}+\ldots+f_{i_1}\wedge\ldots\wedge\pi(x)f_{i_k},\qquad(13.5.11)$$

d'où l'on tire en premier lieu l'invariance du sous-espace $V_k\subset\bigotimes_{i=1}^{n}V$ relativement à la représentation $\bigotimes_{i=1}^{k}\pi$. Désignons par π_k la restriction de la représentation $\bigotimes_{i=1}^{k}\pi$ à V_k. Alors la formule (13.5.11) nous donne

$$\pi_k(h)(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k})=$$
$$=\pi(h)f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k}+\ldots+f_{i_1}\wedge\ldots\wedge\pi(h)f_{i_k}=$$
$$=(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_k})(h)(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k}).\qquad(13.5.12)$$

On tire de (13.5.12) que les fonctionnelles linéaires $\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_k}$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k=n+1$, forment une famille complète des poids de la représentation π_k.

Montrons que le vecteur $f_1\wedge\ldots\wedge f_k$ est le vecteur supérieur de la représentation π_k. Puisque pour chaque $i=1,\ldots,n+1$ le sous-espace $\pi(N^+)f_i$ est contenu dans l'enveloppe linéaire du vecteur $f_1,\ldots,f_{i-1}$, la relation (13.5.11) implique $\pi_k(N^+)(f_1\wedge\ldots\wedge f_k)=0$. Pour démontrer que $f_1\wedge\ldots\wedge f_k$ est le vecteur supérieur, il suffit de montrer qu'un sous-espace de V_k, $\pi_k(N^-)$-invariant et contenant le vecteur $f_1\wedge\ldots\wedge f_k$, coïncide avec V_k. Remarquons que

$$\pi(e_{i+1,\,i})f_k=\begin{cases}0 & \text{si}\quad k\neq i,\\ f_{k+1} & \text{si}\quad k=i.\end{cases}\qquad(13.5.13)$$

Il découle de (13.5.11) et (13.5.13) que

$$\pi_k(e_{i_j+1,\,i_j})(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k})=$$
$$=f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_{j+1}}\wedge\ldots f_{i_k}.\qquad(13.5.14)$$

De la formule (13.5.14) on obtient par récurrence qu'un sous-espace $\pi_k(N^-)$-invariant contenant $f_1\wedge\ldots\wedge f_k$, contient tous les vecteurs $f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_k}$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n+1$, i.e. coïncide avec V_k. Par conséquent, $f_1\wedge\ldots\wedge f_k$ est le vecteur supérieur de la représentation π_k et le poids supérieur correspondant est égal à $\lambda_1+\ldots+\lambda_k$. Puisque la représentation π_k possède un vecteur supérieur, elle est irréductible.

La proposition suivante se rapporte à une algèbre de Lie complexe semi-simple arbitraire.

III. *Soient* ρ_1, ρ_2 *des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie* L *dans les espaces* E_1, E_2; *soient* μ_1, μ_2 *leurs poids supérieurs et* f_1, f_2 *leurs vecteurs supérieurs. Soit* ρ *la représentation de la représentation* $\rho_1 \otimes \rho_2$ *dans le plus petit sous-espace* $\rho_1 \otimes \rho_2$*-invariant de l'espace* $E_1 \otimes E_2$ *contenant le vecteur* $f_1 \otimes f_2$. *Alors* ρ *est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie* L *dont le vecteur supérieur est égal à* $f_1 \otimes f_2$ *tandis que le poids supérieur est égal à* $\mu_1 + \mu_2$.

Démonstration. Par définition

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(x)(f_1 \otimes f_2) = \rho_1(x) f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes \rho_2(x) f_2 \qquad (13.5.15)$$

pour tous les $x \in L$. Par conséquent, $(\rho_1 \otimes \rho_2)(L^\alpha)(f_1 \otimes f_2) = 0$ pour $\alpha > 0$, tandis que $f_1 \otimes f_2$ est un vecteur propre relativement à $(\rho_1 \otimes \rho_2)(h)$, $h \in H$, à valeur propre $\mu_1(h) + \mu_2(h)$. D'où l'on tire que le plus petit sous-espace $\rho_1 \otimes \rho_2$-invariant $E \subset E_1 \otimes E_2$ contenant $f_1 \otimes f_2$ coïncide avec l'enveloppe linéaire des vecteurs de la forme $(\rho_1 \otimes \rho_2)(x_1) \ldots (\rho_1 \otimes \rho_2)(x_k)(f_1 \otimes f_2)$, où $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k \in \sum_{\alpha<0} L^\alpha$. Soit ρ la restriction de la sous-représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$ au sous-espace E. Le raisonnement précédent montre que ρ est une représentation à poids supérieur $f_1 \otimes f_2$; par conséquent, ρ est irréductible. Le poids supérieur de la représentation ρ est égal à $\mu_1 + \mu_2$.

IV. *Chaque représentation irréductible de l'algèbre de Lie* $L = sl(n+1, \mathbf{C})$ *est une sous-représentation d'une puissance tensorielle de la représentation identique de l'algèbre de Lie* L.

Démonstration. Soit $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$ le poids supérieur de la représentation π (voir I). Alors

$$\lambda = (m_1 - m_2)\lambda_1 + (m_2 - m_3)(\lambda_1 + \lambda_2) + \ldots$$
$$\ldots + m_n(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n), \qquad (13.5.16)$$

où $m_1 - m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers non négatifs. Les poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ sont les poids supérieurs des représentations $\pi_1, \ldots, \pi_n$ (voir II), qui sont des sous-représentations des puissances tensorielles de la représentation identique. Compte tenu de (13.5.16), la proposition IV s'obtient de la proposition III.

Trouvons le caractère de la représentation irréductible π de l'algèbre de Lie L à poids supérieur $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$. Pour appliquer la formule (13.4.28), nous devons trouver la demi-somme ρ des racines positives et décrire le groupe de Weyl W^*.

Remarquons tout d'abord que les relations (13.5.2) et (13.5.4) fournissent:

$$2\rho = (n+1)\lambda_1 + ((n+1)-2)\lambda_2 + \ldots + (-(n+1))\lambda_{n+1} = \\ = 2(n+1)\lambda_1 + 2n\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{n+1},$$

donc

$$\rho = (n+1)\lambda_1 + n\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = \\ = n\lambda_1 + (n-1)\lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \qquad (13.5.17)$$

En outre, pour chaque racine simple $\omega_{i,\,i+1}$ la symétrie correspondante $S_i^* \in W^*$ est de la forme

$$S_i^*(\mu) = \mu - 2(\mu, \omega_{i,\,i+1})(\omega_{i,\,i+1}, \omega_{i,\,i+1})^{-1}\omega_{i,\,i+1} = \\ = \mu - \mu(e_{ii} - e_{i+1,\,i+1})\,\omega_{i,\,i+1} \qquad (13.5.18)$$

pour tous les $\mu \in H_0^*$. En remplaçant dans (13.5.18) μ par la racine ω_{kl}, $k \neq l$ nous voyons que S_i^* agit par transposition de i et $i+1$ dans les indices des racines ω_{kl} (les indices autres que i et $i+1$ restent en place). D'où l'on tire immédiatement que le groupe de Weyl W^* est isomorphe au groupe S_{n+1} des permutations des indices $(1, \ldots, n+1)$. En appliquant la formule (13.4.28), on trouve pour chaque $h \in U(H)$ l'égalité

$$\operatorname{tr}\pi(h) = \left(h, \frac{\sum\limits_{\sigma\in S_{n+1}} (\operatorname{sgn}(\sigma)\, e^{(m_1+n)\lambda_{\sigma(1)} + \ldots + (m_n+1)\lambda_{\sigma(n)}}}{\sum\limits_{\sigma\in S_{n+1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, e^{n\lambda_{\sigma(1)} + \ldots + \lambda_{\sigma(n)}}} \right). \qquad (13.5.19)$$

A l'aide de (13.3.35) la formule (13.5.19) peut s'écrire sous la forme

$$\operatorname{tr}\pi(h) = \frac{\begin{vmatrix} e^{(m_1+n)\lambda_1}(h) & \ldots & e^{(m_1+n)\lambda_{n+1}}(h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ e^{(m_n+1)\lambda_1}(h) & \ldots & e^{(m_n+1)\lambda_{n+1}}(h) \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{n\lambda_1}(h) & \ldots & e^{n\lambda_{n+1}}(h) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ e^{\lambda_1}(h) & \ldots & e^{\lambda_{n+1}}(h) \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}} \qquad (13.5.20)$$

pour tous les $h \in U(H)$.

Trouvons maintenant une formule pour calculer la dimension de la représentation π. (13.4.29) permet d'écrire

$$\dim\pi = \frac{\prod\limits_{\alpha>0}(\lambda+\rho, \alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0}(\rho, \alpha)} = \frac{\prod\limits_{i<j}(\lambda+\rho, \omega_{ij})}{\prod\limits_{i<j}(\rho, \omega_{ij})} = \frac{\prod\limits_{i<j}(m_i - m_j + j - i)}{\prod\limits_{i<j}(j-i)}. \qquad (13.5.21)$$

Notons un corollaire utile pour la suite de la formule (13.5.21). On obtient directement de (13.5.21) que $\dim\pi$ est une fonction strictement croissante de $m_i - m_j$, $i < j$. Par conséquent, lorsque

$m_k - m_{k+1} > 0$, la dimension de la représentation π est non inférieure à celle de la représentation π_k. Supposons que $\dim \pi = n + 1$. Puisque $\dim \pi_k = C_{n+1}^k$, on a $\dim \pi_k > n + 1$ pour $1 < k < n$. Par conséquent,

V. *Si π est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $L = sl(n + 1, \mathbf{C})$ de dimension $n + 1$ on a soit $\pi \approx \pi_1$, soit $\pi \approx \pi_n$.*

Il est évident que l'application

$$\tilde{\pi}(x) = -x' \qquad (13.5.22)$$

(x' est la transposée de x) est une représentation irréductible de dimension $n + 1$ de l'algèbre de Lie L à poids $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$, $-\lambda_{n+1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$. Il découle donc de V

VI. *Les représentations $\tilde{\pi}$ et π_n sont équivalentes.*

Nous proposons au lecteur de comparer les résultats du présent sous-paragraphe avec ceux des sous-paragraphes 3.3, 3.4, chapitre VI.

§ 14. Formes réelles des algèbres de Lie complexes semi-simples

14.1. Formes réelles. Soient L une algèbre de Lie complexe, L_0 une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie L (envisagée comme une algèbre de Lie réelle). L'algèbre de Lie L_0 s'appelle *forme réelle* de l'algèbre de Lie L si l'application canonique de complexification $(L_0)_{\mathbf{C}}$ de l'algèbre de Lie L_0 dans l'algèbre de Lie L (définie comme le prolongement à $(L_0)_{\mathbf{C}}$ de l'homomorphisme d'inclusion de l'algèbre de Lie L_0 dans L) est un isomorphisme des algèbres de Lie complexes $(L_0)_{\mathbf{C}}$ et L. Il est évident que dans ce cas on a $\dim_{\mathbf{R}} L_0 = \dim_{\mathbf{C}} L$.

Si L_0 est une forme réelle de l'algèbre de Lie L, alors chaque élément $z \in L$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$z = x + iy; \quad x, y \in L_0. \qquad (14.1.1)$$

Envisageons l'application θ de l'algèbre de Lie L dans elle-même définie par la formule

$$\theta(x + iy) = x - iy \text{ pour tous les } x, y \in L_0. \qquad (14.1.2)$$

De la définion de θ on tire directement à l'aide de la formule (14.1.2) que

$$\theta(\theta(x)) = z \text{ pour tous les } z \in L, \qquad (14.1.3)$$

i.e. θ est une application *involutive* de L *sur* L; en outre, la formule (14.1.2) implique

$$\theta(z + w) = \theta(z) + \theta(w), \qquad (14.1.4)$$

$$\theta(\lambda z) = \bar{\lambda}\theta(z), \qquad (14.1.5)$$

$$\theta([z, w]) = [\theta(z), \theta(w)] \qquad (14.1.6)$$

pour tous les z, $w \in L$ et tous les $\lambda \in \mathbf{C}$. L'application θ est bien définie par la sous-algèbre de Lie L_0 ; nous appellerons l'application θ *involution définie par la forme réelle* L_0 *de l'algèbre de Lie* L.

Réciproquement, soit θ une application de l'algèbre de Lie L dans elle-même qui vérifie les conditions (14.1.3) à (14.1.6). Désignons par L_0 l'ensemble des éléments $z \in L$ tels que $\theta(z) = z$. Soit $z, w \in L_0$, λ un nombre entier; alors les égalités (14.1.4) à (14.1.6) impliquent que $z + w$, λz et $[z, w]$ sont situés dans L_0, i.e. L_0 est une algèbre de Lie réelle.

I. *Chaque élément* $z \in L$ *se met d'une manière et d'une seule sous la forme* $z = x + iy$, *où* $x, y \in L_0$.

Démonstration. De (14.1.3) et (14.1.5) on obtient

$$z + \theta(z) \in L_0 \quad \text{et} \quad (-i)(z - \theta(z)) \in L_0.$$

D'autre part

$$z = (1/2)(z + \theta(z)) + i(-i/2)(z - \theta(z)) = x + iy, \qquad (14.1.7)$$

où $x = (z + \theta(z))/2 \in L_0$, $y = (z - \theta(z))/2i \in L_0$. Réciproquement, si $z = x + iy$, où $x, y \in L_0$, alors $\theta(z) = x - iy$, donc $x = (1/2)(z + \theta(z))$, $y = (1/2i)(z - \theta(z))$, de sorte que la représentation de $z \in L$ sous la forme (14.1.7) est unique.

La proposition I signifie que L_0 est une forme réelle de l'algèbre de Lie L. Ainsi, il existe une bijection entre l'ensemble des formes réelles d'une algèbre de Lie complexe L donnée et l'ensemble des involutions de L vérifiant les relations (14.1.4) à (14.1.6).

II. *La forme de Killing de l'algèbre de Lie* L_0 *coïncide avec la restriction à* L_0 *de la forme de Killing de l'algèbre de Lie* L.

Démonstration. Soient $x, y \in L_0$; considérons l'opérateur linéaire $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$ dans l'espace L. Puisque L_0 est une algèbre de Lie réelle, on a $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)(z) = [x, [y, z]] \in L_0$ pour $z \in L_0$; par conséquent, le sous-espace réel $L_0 \subset L$ est invariant relativement à l'opérateur $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de l'espace linéaire L_0. Il découle de la proposition I que $e_1, \ldots, e_n$ est une base de l'espace linéaire complexe L. Soit $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)\, e_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} e_i$ la décomposition de l'élément $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)\, e_k$ dans l'espace L_0, alors la même formule définit une décomposition de l'élément $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)\, e_k$ relativement à la base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace L. Par conséquent, la trace de l'opérateur $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$ dans l'espace réel L_0 est égale à la trace de l'opérateur $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$ dans l'espace complexe linéaire L, i.e.

$$(x, y)_{L_0} = \operatorname{tr}_{L_0}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y) = \operatorname{tr}_L(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y) = (x, y)_L. \qquad (14.1.8)$$

III. *La forme* $(x, y)_L$ *prend sur l'algèbre de Lie* L_0 *des valeurs réelles.*

La proposition découle immédiatement des formules (14.1.8), puisque $(x, y)_{L_0}$ ne prend que des valeurs réelles.

IV. *L'égalité*

$$(x, y)_L = \overline{(\theta(x), \theta(y))_L} \qquad (14.1.9)$$

est valable pour tous les $x, y \in L$.

Démonstration. Si $x, y \in L_0$, alors $\theta(x) = x$, $\theta(y) = y$ et le nombre $(x, y)_L$ est réel (voir III). Par conséquent, l'égalité (14.1.9) est vérifiée pour tous les $x, y \in L_0$. D'autre part, on tire de (14.1.4) et (14.1.5) que $\overline{(\theta(x), \theta(y))}$ est une forme complexe bilinéaire sur L. Mais la proposition I implique que les formes complexes bilinéaires qui coïncident sur L_0 coïncident également sur L.

Une algèbre de Lie réelle M est dite *compacte* si la forme de Killing sur M est définie négative, i.e. $(x, x)_M < 0$ pour tous les $x \neq 0$, $x \in M$. Soit L_0 une forme réelle de l'algèbre de Lie complexe L; si l'algèbre de Lie réelle L_0 est compacte, alors la sous-algèbre réelle de Lie $L_0 \subset L$ est appelée *forme réelle compacte* de l'algèbre de Lie L.

V. *La forme réelle L_0 de l'algèbre de Lie complexe L est compacte si et seulement si la forme hermitienne $\{x, y\} = (x, \theta(y))$ sur l'algèbre de Lie L est définie négative.*

Démonstration. Soit L_0 une forme réelle compacte de l'algèbre de Lie L; soient $z \in L$ et $z = x + iy$, où $x, y \in L_0$; alors pour $z \neq 0$ au moins un des éléments x et y n'est pas nul et l'on a

$$(z, \theta(z)) = (x + iy, x - iy) = (x, x) + (y, y) < 0.$$

Réciproquement, si la forme hermitienne $(x, \theta(y))$ est définie négative, on a $\theta(x) = x$ pour $x \in L_0$, $x \neq 0$, donc $(x, x) = (x, \theta(x)) < 0$.

Passons à l'étude des involutions θ dans une algèbre de Lie *semi-simple complexe* L qui vérifient les conditions (14.1.4) à (14.1.6), autrement dit, à l'étude des formes réelles L_0 de l'algèbre de Lie L. Nous aurons besoin de deux propositions auxiliaires.

VI. *Soit H un sous-espace linéaire complexe de l'algèbre de Lie L. Le sous-espace H est invariant relativement à l'involution θ si et seulement si chaque élément $z \in H$ peut se mettre sous la forme $z = x + iy$, où $x, y \in H_0 = L_0 \cap H$.*

Démonstration. Soit $\theta(H) = H$. Si $z \in H$, $x = (1/2) \times (z + \theta(z))$ appartient à la fois à H et à L_0; de même, $y = (1/2i) \times (z - \theta(z)) \in L_0 \cap H = H_0$ tandis que $z = x + iy$. Réciproquement, supposons que chaque élément $z \in H$ peut se mettre sous la forme $z = x + iy$, où $x, y \in H_0 = L_0 \cap H$; alors $\theta(z) = x - iy \in H$, i.e. $\theta(H) \subset H$. Enfin, en se souvenant que $\theta^2 = 1$, on obtient $\theta(H) = H$.

33—0883

VII. *Soient* τ, θ *deux involutions de l'algèbre de Lie* L *qui vérifient les conditions* (14.1.4) *à* (14.1.6). *Supposons que* $\tau\theta = \theta\tau$. *Désignons par* L_u *l'ensemble des points fixes de l'involution* τ, *et par* L_u^+ (*respectivement* L_u^-) *l'ensemble de tous les points* $z \in L_u$ *pour lesquels* $\theta(z) = z$ (*respectivement* $\theta(z) = -z$). *Alors l'espace* L_u *est la somme directe de* L_u^+ *et* L_u^-, *tandis que l'espace* L_0 *des points fixes de l'involution* θ *est la somme directe des espaces* L_u^+ *et* iL_u^-.

Démonstration. Si $z \in L_u$, alors $\tau\theta(z) = \theta(\tau z) = \theta(z)$, donc $\theta(z) \in L_u$ pour tous les $z \in L_u$. Ceci veut dire que l'opérateur θ laisse l'espace L_u invariant. La restriction σ de l'opérateur θ au sous-espace L_u est une application linéaire réelle de L_u sur L_u, et $\sigma^2 = 1$. Il est évident que $L_u^+ \cap L_u^- = (0)$. En outre, $z + \sigma(z) \in \in L_u^+$ et $z - \sigma(z) \in L_u^-$ pour chaque $z \in L_u$, donc la relation

$$z = (1/2)(z + \sigma(z)) + (1/2)(z - \sigma(z))$$

signifie que $L_u = L_u^+ \dot{+} L_u^-$.

L'espace L est la somme directe des espaces L_u et iL_u, donc $L = L_u^+ \dot{+} L_u^- \dot{+} iL_u^+ \dot{+} iL_u^-$. L'application θ est l'identité sur L_u^+ et se réduit à la multiplication par -1 dans le sous-espace L_u^-. Comme $\theta(iz) = -i\theta(z)$ pour tous les $z \in L$, l'application θ se réduit à la multiplication par -1 dans le sous-espace iL_u^+; elle est identique sur iL_u^-. D'où l'on tire que L_0 est la somme directe de L_u^+ et iL_u^-.

VIII. *Soient* L_0 *une forme réelle de l'algèbre de Lie complexe semi-simple* L, θ *l'involution correspondante dans* L. *Il existe alors une sous-algèbre de Cartan* H *de l'algèbre de Lie* L, *invariante relativement à* θ. *Si* H_0 *est le sous-espace réel de* H *engendré par les vecteurs* h'_α, $\alpha \in \Delta$, *alors* $\theta(H_0) = H_0$. *Si* θ^* *est l'application dans l'espace* H^* *adjointe de* θ, *on a* $\theta^*\Delta = \Delta$.

Démonstration. Soit M_x le sous-espace de L constitué par les éléments $y \in L$ tels que $(\text{ad } x)^q y = 0$ pour un certain entier naturel q. Il est évident que M_x est invariant relativement à ad x. En mettant l'opérateur ad x dans L sous sa forme normale de Jordan, nous voyons que M_x est l'espace des racines de l'opérateur ad x correspondant à la racine nulle. Par conséquent, la dimension de l'espace M_x est égale à la multiplicité de la racine nulle du polynôme caractéristique. Soit

$$\det(\text{ad } x - \lambda 1) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \ldots + (-\lambda)^k \varphi_k(x).$$

Si $\varphi_k(x) \not\equiv 0$ sur L, alors, en faisant varier $x \in L$, on trouvera que la dimension minimale de l'espace M_x est égale à k; ainsi, si $\varphi_k(x_0) \neq \neq 0$, x_0 est un élément régulier de L.

Supposons que k a été choisi de manière à avoir $\varphi_k(x) \not\equiv 0$ sur L. La fonction $\varphi_k(x)$ est un polynôme des éléments de la matrice de l'opérateur ad x dans une certaine base. En nous servant, par exem-

ple, de la formule de Taylor pour les polynômes, nous voyons que l'égalité $\varphi_k(x) \equiv 0$ sur L_0 implique $\varphi_k(x) \equiv 0$ sur L. Par conséquent, il existe un élément $x_0 \in L_0$ tel que $\varphi_k(x_0) \neq 0$. Ainsi, l'algèbre de Lie L_0 contient un élément régulier x_0. Conformément à IV du § 8, l'ensemble H des éléments $y \in L$ tels que $[y, x_0] = 0$ est une sous-algèbre de Cartan de L. Soit $h \in H$; alors (14.1.6) fournit

$$[\theta(h), x_0] = \theta([h, \theta(x_0)]) = \theta([h, x_0]) = \theta(0) = 0. \quad (14.1.10)$$

L'égalité (14.1.10) signifie que $\theta(h) \in H$. Par conséquent, le sous-espace H est invariant relativement à θ. Puisque $\theta^2 = 1$, on tire de la relation $\theta H \subset H$ que $\theta H = H$.

Soit $\alpha \neq 0$ une racine de l'algèbre de Lie L relativement à la sous-algèbre de Cartan H. Soit $\bar{\alpha}$ la fonctionnelle linéaire sur H définie par la formule

$$\bar{\alpha}(h) = \overline{\alpha(\theta h)} \text{ pour tous les } h \in H. \quad (14.1.11)$$

Soit $y \in L^{\alpha}$; alors $[h, y] = \alpha(h) y$ et $[\theta(h), \theta(y)] = \theta[h, y)] = = \theta(\alpha(h) y) = \overline{\alpha(h)}\, \theta(y) = \bar{\alpha}(\theta h)\, \theta(y)$. Puisque $\theta H = H$, on a

$$[h, \theta(y)] = \bar{\alpha}(h)\, \theta(y) \quad (14.1.12)$$

pour tous les $h \in H$. La relation (14.1.12) signifie que $\bar{\alpha}$ est une racine de l'algèbre de Lie L relativement à H, i.e $\theta^*\Delta \subset \Delta$ avec en outre $\theta(y) \in L^{\bar{\alpha}}$ pour tous les $y \in L^{\alpha}$, i.e. $\theta L^{\alpha} \subset L^{\bar{\alpha}}$. En outre, en nous servant de la proposition IV, nous obtenons

$$(\theta(h'_{\alpha}), h) = \overline{(h'_{\alpha}, \theta(h))} = \overline{\alpha(\theta(h))} = \bar{\alpha}(h) = (h'_{\bar{\alpha}}, h), \quad (14.1.13)$$

donc $\theta h'_{\alpha} = h'_{\bar{\alpha}}$. Par conséquent, θ laisse invariant le sous-espace réel $H_0 \subset H$.

Ainsi, $\theta H \subset H$, $\theta^*\Delta \subset \Delta$, $\theta H_0 \subset H_0$. Puisque $\theta^2 = 1$, on a $\theta H = = H$, $\theta^*\Delta = \Delta$, $\theta H_0 = H_0$.

IX. *Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, L_0 sa forme réelle, θ l'involution correspondante, et H la sous-algèbre de Cartan de L vérifiant les conditions de la proposition* VIII. *Supposons que les vecteurs $e_{\alpha} \in L^{\alpha}$, $\alpha \in \Delta$, ont été choisis de manière à avoir $(e_{\alpha}, e_{-\alpha}) = = -1$. Il existe des nombres complexes C_{α} tels que $\theta e_{\alpha} = C_{\alpha} e_{\bar{\alpha}}$, et*

$$\bar{C}_{\alpha} C_{\bar{\alpha}} = 1, \; C_{\alpha} C_{-\alpha} = 1, \; C_{\alpha+\beta} \bar{N}_{\alpha, \beta} = C_{\alpha} C_{\beta} N_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \quad (14.1.14)$$

pour tous les α, $\beta \in \Delta$.

Démonstration. En vertu de (14.1.12), $\theta(e_{\alpha}) \in L^{\bar{\alpha}}$. Tous les espaces L^{α}, $\alpha \in \Delta$, étant de dimension 1, on a $\theta(e_{\alpha}) = = C_{\alpha} e_{\bar{\alpha}}$ pour certains nombres complexes C_{α}. Comme $\theta^2 h = h$ pour $h \in H_0$ et $\theta^2 e_{\alpha} = \theta(C_{\alpha} e_{\alpha}) = \bar{C}_{\alpha} \theta e_{\bar{\alpha}} = \bar{C}_{\alpha} C_{\bar{\alpha}} e_{\bar{\bar{\alpha}}}$ on a $\bar{C}_{\alpha} C_{\bar{\alpha}} e_{\bar{\bar{\alpha}}} = e_{\alpha}$.

D'autre part, (14.1.11) implique immédiatement l'égalité $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, donc $\bar{C}_\alpha C_{\bar{\alpha}} = 1$, ce qui démontre la première des égalités (14.1.14).

Servons-nous maintenant de la condition (14.1.5). Il découle de la relation $\theta([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_{-\alpha})]$ et de l'égalité $\theta h'_\alpha = h'_{\bar{\alpha}}$ que $\theta(-h'_\alpha) = [C_\alpha e_{\bar{\alpha}}, C_{-\alpha} e_{\bar{\alpha}}] = C_\alpha C_{-\alpha}(-h'_{\bar{\alpha}})$, mais $\theta h'_\alpha = h'_{\bar{\alpha}}$, donc $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$ pour tous les $\alpha \in \Delta$.

Enfin on obtient de la relation $\theta([e_\alpha, e_\beta]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_\beta)]$ que $\bar{N}_{\alpha, \beta} C_{\alpha+\beta} e_{\bar{\alpha}+\bar{\beta}} = C_\alpha C_\beta N_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} e_{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$, d'où l'on tire la dernière des relations (14.1.14).

X. *Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, H sa sous-algèbre de Cartan, H_0 le sous-espace linéaire de H engendré par les vecteurs h'_α lorsque α parcourt l'ensemble des racines non nulles de l'algèbre de Lie L relativement à H. Soit φ un isomorphisme linéaire réel de l'espace H_0 sur lui-même. Supposons que $\varphi^2 = 1$ et que pour chaque $\alpha \in \Delta$ la fonctionnelle linéaire complexe $\bar{\alpha}$ sur H qui vérifie la condition $\bar{\alpha}(h) = \alpha(\varphi(h))$ pour tous les $h \in H_0$, est une racine de l'algèbre de Lie L relativement à H. Supposons que $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. Alors pour que l'application φ puisse être prolongée à une involution τ de l'algèbre de Lie L vérifiant les conditions* (14.1.4) *à* (14.1.6) *et la condition $\tau(e_\alpha) = C_\alpha e_{\bar{\alpha}}$, il faut et il suffit que les nombres complexes C_α vérifient les conditions* (14.1.14).

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité (14.1.13) (θ étant remplacé par φ) est valable en vertu de la définition de $\bar{\alpha}$, donc $\varphi(h'_\alpha) = h'_{\bar{\alpha}}$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. L'espace linéaire complexe L étant engendré par l'espace H_0 et le vecteur e_α, $\alpha \in \Delta$, il existe une application τ et une seule qui envoie l'espace L dans lui-même et qui vérifie les conditions $\tau(h_0) = \varphi(h_0)$ pour $h_0 \in H_0$, $\tau(e_\alpha) = C_\alpha e_{\bar{\alpha}}$ et les conditions (14.1.4) et (14.1.5).

Voyons quelle condition doit être imposée aux nombres C_σ pour que l'application τ vérifie (14.1.3) et (14.1.6). De la définition de la racine $\bar{\alpha}$ et de l'égalité $\varphi^2 = 1$, on tire $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$. D'autre part, $\tau(h'_\alpha) = \varphi(h'_\alpha) = h'_{\bar{\alpha}}$, $\tau(ih'_\alpha) = -\tau(h'_\alpha) = -h'_{\bar{\alpha}}$, donc $\tau^2 = 1$ sur la sous-algèbre de Cartan H. En outre, $\tau^2(e_\alpha) = \tau(C_\alpha e_{\bar{\alpha}}) = \bar{C}_\alpha C_{\bar{\alpha}} e_{\bar{\bar{\alpha}}} = \bar{C}_\alpha C_{\bar{\alpha}} e_\alpha$, donc la première des conditions (14.1.14) est nécessaire et suffisante pour qu'on ait la condition (14.1.3).

Trouvons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait (14.1.6). La condition (14.1.6) est équivalente aux conditions

$$\begin{aligned} \tau([e_\alpha, e_{-\alpha}]) &= [\tau(e_\alpha), \tau(e_{-\alpha})], \\ \tau([h, e_\alpha]) &= [\tau(h), \tau(e_\alpha)], \\ \tau([e_\alpha, e_\beta]) &= [\tau(e_\alpha), \tau(e_\beta)] \end{aligned} \tag{14.1.15}$$

pour tous les α, $\beta \in \Delta$ et $h \in H$, car la condition $\tau([h_1, h_2]) = [\tau(h_1), \tau(h_2)]$ est satisfaite automatiquement grâce au fait que l'algèbre de Lie H est abélienne. Mais l'on tire de la démonstration de la proposition IX que la première et la troisième des relations (14.1.15) sont équivalentes respectivement à la deuxième et à la troisième des relations (14.1.14). Enfin, la deuxième relation (14.1.15) est équivalente à la condition $\tau(\alpha(h) e_\alpha) = [\tau(h), C_\alpha e_{\bar{\alpha}}] = C_\alpha \bar{\alpha}(\tau(h)) e_\alpha$, i.e. à la condition $\overline{\alpha(h)}\, C_\alpha e_{\bar{\alpha}} = C_\alpha \bar{\alpha}(\tau(h))\, e_{\bar{\alpha}}$, i.e. équivalente à la définition de la fonctionnelle $\bar{\alpha}$.

XI. *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* VIII. *Si L_0 est une forme réelle compacte de l'algèbre de Lie L, alors on a $\theta(h) = -h$ pour tous les $h \in H_0$ et il existe une base de Weyl de l'algèbre de Lie L telle que $\theta(e_\alpha) = e_{-\alpha}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'algèbre de Lie L_0 est compacte. D'après la proposition V, il en découle que $(x, \theta(x)) < 0$ pour tous les $x \in L$, $x \neq 0$. En vertu de VIII, $\theta H_0 = H_0$, alors l'opérateur θ définit par restriction à H_0 une application linéaire réelle σ de l'espace H_0 sur lui-même telle que $\sigma^2 = 1$. Par conséquent, l'espace H_0 est une somme directe des sous-espaces H_0^+ et H_0^- constitués par les vecteurs $h \in H_0$ pour lesquels $\sigma h = h$ et $\sigma h = -h$ respectivement. Si $h \in H_0^+$, on a $(h, \theta(h)) = (h, \sigma(h)) = (h, h) = \sum_{\alpha \in \Delta} (\alpha(h))^2 \geqslant 0$; d'autre part, si $h \neq 0$, alors $(h, \theta(h)) < 0$. Par conséquent, $h = 0$, i.e. $H_0^+ = (0)$ et $H_0^- = H_0$. Ainsi l'opérateur θ agit sur H_0 comme opérateur de multiplication par -1, en particulier

$$\theta(h'_\alpha) = -h'_\alpha. \tag{14.1.16}$$

Par conséquent, $h'_{\bar{\alpha}} = -h'_\alpha$ et $\bar{\alpha} = -\alpha$. Supposons que l'on a choisi une base de Weyl dans L. Alors, en particulier,

$$N_{\alpha, \beta} = \bar{N}_{\alpha, \beta} = N_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}. \tag{14.1.17}$$

Si $\theta e_\alpha = C_\alpha e_{-\alpha}$, alors les nombres C_α doivent vérifier les relations (14.1.14) que l'on peut mettre sous la forme

$$\bar{C}_\alpha C_{-\alpha} = C_\alpha C_{-\alpha} = 1, \qquad C_{\alpha+\beta} = C_\alpha C_\beta \tag{14.1.18}$$

à l'aide des conditions (14.1.16) et (14.1.17). Notons que $(e_\alpha, \theta(e_\alpha)) = C_\alpha (e_\alpha, e_{-\alpha}) = -C_\alpha < 0$, donc $C_\alpha > 0$. Posons $\delta_\alpha = (C_\alpha)^{-1/2}$ et $e'_\alpha = \delta_\alpha e_\alpha$. Alors il découle des égalités (14.1.18) que $(e'_\alpha, e'_{-\alpha}) = -\delta_\alpha \delta_{-\alpha} = -1$ et $\theta(e'_\alpha) = C_\alpha \delta_\alpha e_{-\alpha} = (\delta_\alpha)^{-1} e_{-\alpha} = \delta_{-\alpha} e_{-\alpha} = e'_{-\alpha}$. Enfin, introduisons les nombres $N'_{\alpha, \beta}$ tels que $[e'_\alpha, e'_\beta] = N'_{\alpha, \beta} e'_{\alpha+\beta}$; alors les égalités (14.1.16) et (14.1.17) nous donnent $N'_{\alpha, \beta} = N'_{-\alpha, -\beta}$. Par conséquent, $\{e'_\alpha\}$ est la base de Weyl cherchée.

XII. *Soit L_0 une forme réelle de l'algèbre de Lie complexe semi-simple L; soit $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ une base de Weyl de l'algèbre de Lie L. Soit θ une application antilinéaire de l'algèbre de Lie L dans elle-même, définie de manière unique par les conditions*

$$\theta(h) = -h \quad pour\ tous\ les\ h \in H_0, \tag{14.1.19}$$

$$\theta(e_\alpha) = e_{-\alpha} \quad pour\ tous\ les\ \alpha \in \Delta. \tag{14.1.20}$$

Alors θ est une involution de L qui vérifie les conditions (14.1.4) *à* (14.1.6) *et la forme réelle L_0 de l'algèbre de Lie liée à l'involution θ est compacte.*

Démonstration. Soit $\bar{\alpha} = -\alpha$, $C_\alpha = 1$. Alors l'application involutive θ définie par la formule

$$\theta\left(h_0 + i\tilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} \xi_\alpha e_\alpha\right) = -h_0 + i\tilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} \bar{\xi}_\alpha e_{-\alpha},$$

où $h_0,\ \tilde{h}_0 \in H_0$, $\xi_\alpha \in \mathbf{C}$ est une application antilinéaire de L dans L qui satisfait les conditions (14.1.3) à (14.1.5) et (14.1.19), (14.1.20). Vérifions que $[\theta(x),\ \theta(y)] = \theta([x,\ y])$ pour tous les $x,\ y \in L$. Pour cela, il suffit de vérifier les égalités

$$\theta([e_\alpha,\ e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha),\ \theta(e_{-\alpha})],$$
$$\theta([h,\ e_\alpha]) = [\theta(h),\ \theta(e_\alpha)],$$
$$\theta([e_\alpha,\ e_\beta]) = [\theta(e_\alpha),\ \theta(e_\beta)]$$

pour tous les $\alpha,\ \beta \in \Delta$, $h \in H_0$; en effet, $\theta([h_1,\ h_2]) = 0 = [\theta(h_1),\ \theta(h_2)]$, car l'algèbre de Lie H est abélienne. Il découle de la proposition X que la relation $\theta([e_\alpha,\ e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha),\ \theta(e_{-\alpha})]$ est équivalente à l'égalité $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$ qui est satisfaite en vertu de l'égalité $C_\alpha = 1$, tandis que la relation $\theta([e_\alpha,\ e_\beta]) = [\theta(e_\alpha),\ \theta(e_\beta)]$ est équivalente à la relation $C_{\alpha+\beta}\bar{N}_{\alpha,\beta} = C_\alpha C_\beta N_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$, qui est vérifiée du fait que $C_\alpha = 1$, les nombres $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ sont réels et $\bar{\alpha} = -\alpha$. L'égalité $\theta([h,\ e_\alpha]) = [\theta(h),\ \theta(e_\alpha)]$ est équivalente à l'égalité $C_\alpha \bar{\alpha}(\theta(h))\, e_{\bar{\alpha}} = \overline{\alpha(h)}\,\theta(e_\alpha)$, qui est à son tour équivalente à la définition de la fonctionnelle $\bar{\alpha}$. Ainsi, $\theta([x,\ y]) = [\theta(x),\ \theta(y)]$ pour tous les $x,\ y \in L$. Montrons que $(x,\ \theta(x)) < 0$ pour $x \neq 0$. Soit $x = h_0 + i\tilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} \xi_\alpha e_\alpha$; alors $\theta(x) = -h_0 + i\tilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} \bar{\xi}_\alpha e_\alpha$, donc (9.6.1) implique

$$(x,\ \theta(x)) = (h_0 + i\tilde{h}_0,\ -h_0 + i\tilde{h}_0) + \sum_\alpha \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha (e_\alpha,\ e_{-\alpha}) =$$
$$= \sum_\alpha \{\alpha(h)\,\alpha(\theta(h)) - \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha\}, \tag{14.1.21}$$

où $h = h_0 + ih_0$. Remarquons maintenant que $\alpha(\theta(h)) = \overline{\overline{\alpha}(h)} = -\alpha(h)$ en vertu de (14.1.11) et (14.1.20); alors (14.1.21) fournit

$$(x, \theta(x)) = -\sum_{\alpha}(|\alpha(h)|^2 + |\xi_\alpha|^2),$$

donc $(x, \theta(x)) < 0$ pour chaque $x \neq 0$.

XIII. *Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, L_0 sa forme réelle, et θ l'involution de l'algèbre de Lie L définie par la forme réelle L_0. Il existe alors une forme réelle compacte L_u de l'algèbre de Lie L invariante relativement à l'involution θ.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la proposition VII, il suffit de démontrer qu'il existe, dans l'algèbre de Lie L, une involution τ vérifiant des relations (14.1.4) à (14.1.6), permutable avec θ et qui satisfait en outre à la condition $(x, \tau(x)) < 0$ pour tous les $x \neq 0$; alors l'algèbre de Lie L_u cherchée peut être définie comme l'ensemble des éléments $x \in L$ tels que $\tau(x) = x$.

Conformément à la proposition VIII, il existe une sous-algèbre de Cartan $H \subset L$ invariante relativement à l'involution θ; d'après la proposition IX, il existe une base de Weyl dans l'algèbre de Lie L telle que $\theta(e_\alpha) = C_\alpha e_{\overline{\alpha}}$ pour tous les $\alpha \in \Delta$. Posons

$$\tau(e_\alpha) = |C_\alpha| e_{-\alpha}, \quad \tau(h'_\alpha) = h'_{-\alpha}, \tag{14.1.22}$$

et prolongeons l'application τ à une involution de l'algèbre de Lie L vérifiant les conditions (14.1.4) et (14.1.5). Il découle de la proposition X que l'application τ vérifie la condition (14.1.6) si et seulement si les nombres $|C_\alpha|$ vérifient (14.1.14). La condition $|C_\alpha|\,|C_{-\alpha}| = 1$ découle de la relation $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$; ainsi les deux premières relations (14.1.14) pour les nombres $|C_\alpha|$ sont vérifiées. A l'aide de la relation $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ la troisième condition (14.1.14) pour les nombres $|C_\alpha|$ n'est autre que l'égalité $|C_{\alpha+\beta}| = |C_\alpha|\,|C_\beta|$; vérifions cette égalité. Remarquons que $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \overline{\beta}(h'_{\overline{\alpha}}) = \overline{\beta(\theta(h'_\alpha))} = \overline{\beta(h'_\alpha)} = \overline{(\alpha, \beta)}$, mais (α, β) est un nombre réel pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$, donc $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (\alpha, \beta)$ pour tous les $\alpha, \beta \in \Delta$. La proposition II de 9.7 nous donne $N^2_{\alpha.\beta} = (1/2) \times (\alpha, \alpha)\, q_{\alpha.\beta}(1 - p_{\alpha.\beta})$; puisque l'application $\alpha \to \overline{\alpha}$ est une application additive involutive du système de racines Δ dans lui-même, la fonctionnelle linéaire $\beta + k\alpha$ est une racine si et seulement si $\overline{\beta} + k\overline{\alpha} \in \Delta$; par conséquent, $q_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}} = q_{\alpha.\beta}$, $p_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}} = p_{\alpha.\beta}$ et $N^2_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}} = (1/2)(\overline{\alpha}, \overline{\alpha})\, q_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}}(1 - p_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}}) = (1/2)(\alpha, \alpha)\, q_{\alpha.\beta}(1 - p_{\alpha.\beta}) = N^2_{\alpha.\beta}$, ou $|N_{\overline{\alpha}.\overline{\beta}}| = |N_{\alpha,\beta}|$. Alors, en passant dans la dernière égalité (14.1.14) aux valeurs absolues, nous obtenons $|C_{\alpha+\beta}| = |C_\alpha|\,|C_\beta|$. Ainsi, d'après la proposition X, l'involu-

tion τ de l'algèbre de Lie L vérifie les conditions (14.1.4) à (14.1.6). Prouvons que τ et θ sont permutables. On a $\tau\theta\,(h'_\alpha) = \tau\,(h'_{\bar\alpha}) = h'_{-\bar\alpha}$ et $\theta\tau\,(h'_\alpha) = \theta\,(h'_{-\alpha}) = h'_{-\bar\alpha}$, alors $\tau\theta$ et $\theta\tau$ coïncident sur H_0, donc $\tau\theta = \theta\tau$ sur H. Il reste à démontrer que $\theta\tau\,(e_\alpha) = \tau\theta\,(e_\alpha)$; mais

$$\tau\theta\,(e_\alpha) = \tau\,(C_\alpha e_{\bar\alpha}) = \bar C_\alpha \mid C_{\bar\alpha} \mid e_{-\bar\alpha},$$

$$\theta\tau\,(e_\alpha) = \mid C_\alpha \mid \theta\,(e_{-\alpha}) = \mid C_\alpha \mid C_{-\alpha} e_{-\bar\alpha},$$

et $\bar C_\alpha \mid C_{\bar\alpha} \mid = \mid C_\alpha \mid C_{-\alpha}$, puisque les deux premières égalités (14.1.14) impliquent les égalités

$$C_\alpha\,(\bar C_\alpha |C_{\bar\alpha}|) = |C_\alpha|^2\,|C_{\bar\alpha}| = |C_\alpha|\,(|C_\alpha|\;|C_{\bar\alpha}|) = |C_\alpha| = |C_\alpha|\,C_\alpha C_{-\alpha},$$

et $C_\alpha \neq 0$, ce qui termine la démonstration de la proposition XIII.

XIV. *Dans les hypothèses de la proposition* XIII *supposons que L_u est une forme réelle compacte (de l'algèbre de Lie L) invariante relativement à l'involution* θ. *Soient $L_u^+ = L_u \cap L_0$, $L_u^- = L_u \cap iL_0$. Soient H_u^- la sous-algèbre de Lie commutative maximale contenue dans L_u^-, H_u la sous-algèbre de Lie commutative maximale de L_u contenant H_u^-, $H_u^+ = H_u \cap L_u^+$. Alors le sous-espace $H = H_u + iH_u$ est une sous-algèbre de Cartan de L, et $H_u = H_u^+ + H_u^-$, $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^-$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in L_u$; il découle de la définition de L_u^+ et L_u^- que $x \in L_u^+$ (respectivement $x \in L_u^-$) si et seulement si $\theta x = x$ (resp. $\theta x = -x$). D'après la proposition VII, $L_u = L_u^+ + L_u^-$. Pour chaque $h \in H_u$ et pour tous les x, $y \in L_u$ on a la relation

$$((\mathrm{ad}\,h)\,(x),\,y) + (x,\,(\mathrm{ad}\,h)\,(y)) = ([h,\,x],\,y) + (x,\,[h,\,y]) =$$
$$= \mathrm{tr}\,([\mathrm{ad}\,h,\ \mathrm{ad}\,x]\,\mathrm{ad}\,y + \mathrm{ad}\,x\,[\mathrm{ad}\,h,\ \mathrm{ad}\,y]) = \mathrm{tr}\,[\mathrm{ad}\,h,\ \mathrm{ad}\,x\ \mathrm{ad}\,y] = 0,$$

i.e. l'opérateur ad h dans l'espace L_u est antisymétrique relativement à la forme (x, y) définie négative. Alors l'opérateur ad h est complètement réductible, i.e. chaque sous-espace invariant de L_u possède un supplémentaire orthogonal invariant. H_u étant une algèbre de Lie commutative, le sous-espace $H_u \subset L_u$ est invariant relativement à tous les opérateurs ad h, $h \in H_u$; par conséquent, le supplémentaire orthogonal $H_u^\perp$ de l'espace H_u dans L_u est invariant relativement à tous les opérateurs ad h, $h \in H_u$. D'autre part, H_u étant une sous-algèbre de Lie commutative maximale dans L_u, la condition $(\mathrm{ad}\,h)\,y = 0$ pour un $y \in L_u$ donné et tous les $h \in H_u$ implique $y \in H_u$. Par conséquent, il n'y a pas dans l'espace $H_u^\perp$ de sous-espaces des racines non nuls qui correspondraient à la racine nulle de l'algèbre de Lie L_u relativement à H_u, i.e. H_u coïncide avec le sous-espace qui correspond à la racine nulle de l'algèbre de

Lie L_u relativement à H_u. On en déduit que H_u est une sous-algèbre de Cartan de L_u (voir § 8).

Soit $H = H_u + iH_u$. Montrons que H est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie L. Soit $z \in L^0$, i.e. supposons que pour chaque $h \in H$ il existe un entier positif k tel que $(\text{ad } h)^k z = 0$. Montrons que $z \in H$. En particulier, pour chaque $h \in H_u$, il existe un entier naturel k tel que $(\text{ad } h)^k z = 0$. Puisque L_u est une forme réelle de l'algèbre de Lie L, on a $z = x + iy$, où $x, y \in L_u$; d'autre part, l'espace L_u est invariant relativement à tous les opérateurs ad h, $h \in H_u$. Par conséquent, $0 = (\text{ad } h)^k z = (\text{ad } h)^k x + i (\text{ad } h)^k y$, i.e. $(\text{ad } h)^k x = 0$, $(\text{ad } h)^k y = 0$. Ainsi $x, y \in L_u^0 = H_u$, d'où $z = x + iy \in H_u + iH_u = H$. Donc $L^0 = H$, i.e. H est une sous-algèbre de Cartan de L.

Montrons que la sous-algèbre de Cartan H_u de l'algèbre de Lie L_u est invariante relativement à l'involution θ. Soient $h \in H_u$, $h_u^- \in H_u^-$. En remarquant que $H_u^- \subset H_u$ et H_u est commutative, on a $[h, h^-] = 0$; alors, on a également $[\theta (h); \theta (h^-)] = \theta ([h, h^-]) = \theta (0) = 0$. D'autre part, $h^- \in H_u^- \subset L_u^-$, donc $\theta (h^-) = -h^-$. Ainsi $\theta (h)$ est permutable à tous les éléments de l'espace H_u^-, par conséquent, $h - \theta (h)$ est également permutable à tous les éléments de l'espace H_u^-. Mais $h - \theta (h) \in L_u$ et $\theta (h - \theta (h)) = -(h - \theta (h))$, donc $h - \theta (h) \in L_u^-$. Comme H_u^- est une sous-algèbre de Lie commutative maximale de L_u^- et $h - \theta (h)$ est permutable à tous ses éléments, on a $h - \theta (h) \in H_u^-$; ensuite, étant donné que $h \in H_u$, on a aussi $\theta (h) \in H_u$. Ainsi H_u est invariant relativement à l'involution θ. D'où l'on tire $H_u = H_u^+ + H_u^-$.

D'après la proposition VII, on a $L_0 = L_u^+ + iL_u^-$; les relations $H_u = H_u^+ + H_u^-$ et $H = H_u + iH_u$ impliquent $H = H_u^+ + H_u^- + iH_u^+ + iH_u^-$ et $H_u^+ \subset L_u^+$, $iH_u^- \subset iL_u^-$, $H_u^- \cap L_0 = iH_u^+ \cap L_0^- = (0)$. Par conséquent, $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^-$.

XV. *Dans les hypothèses de la proposition* XIV, *soit H_0 l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments h'_α à coefficients réels. Alors $H_0 = H_0^+ + H_0^-$, où $H_0^\pm = \{x \in H, \theta x = \pm x\}$ et le système Δ des racines non nulles de l'algèbre de Lie L relativement à H se décompose en trois parties*: $\Delta = \Sigma \cup \Delta' \cup (-\Sigma)$, *où*

$$\Sigma = \{\alpha \in \Delta,\ \alpha > 0,\ \bar{\alpha} > 0\};$$

$$\Delta' = \{\alpha \in \Delta:\ \bar{\alpha} = -\alpha\} = \{\alpha \in \Delta:\ \alpha (H_0^+) = 0\}.$$

D é m o n s t r a t i o n. L'espace H_0 est invariant relativement à l'involution θ, donc $H_0 = H_0^+ + H_0^-$. Soient $h_1^+, \ldots, h_m^+$ une base de H_0^+, et $h_1^-, \ldots, h_n^-$ une base de H_0^-. Munissons l'espace H_0 de l'ordre lexicographique qui correspond à la base $h_1^+, \ldots, h_m^+, h_1^-, \ldots, h_n^-$ de l'espace H_0.

Montrons que la condition $\bar{\alpha} = -\alpha$ est équivalente à la condition $\alpha(H_0^+) = 0$. En effet, l'espace H_0^+ est engendré (comme espace réel) par les vecteurs de la forme $h + \theta(h)$, $h \in H_0$; d'autre part, α prend sur H_0 des valeurs réelles, donc $\bar{\alpha}(h) = \overline{\alpha(\theta(h))} = \alpha(\theta(h))$ pour $h \in H_0$. On en déduit que $\bar{\alpha} = -\alpha$ si et seulement si $\alpha(h + \theta(h)) = 0$ pour tous les $h \in H_0$.

Supposons maintenant que $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \Delta'$, i.e. $\bar{\alpha} \neq -\alpha$. Alors $\alpha(H_0^+) \neq 0$, donc il existe un $i \geqslant 0$ tel que $\alpha(h_1^+) = \ldots = \alpha(h_i^+) = 0$, $\alpha(h_{i+1}^+) > 0$. Comme $h_j^+ \in H_0^+$, on a $\theta(h_j^+) = h_j^+$, donc $\bar{\alpha}(h_j^+) = \overline{\alpha(\theta(h_j^+))} = \alpha(h_j^+)$ pour $j = 1, \ldots, m$. Par conséquent, $\bar{\alpha}(h_j^+) = 0$ lorsque $j \leqslant i$, $\bar{\alpha}(h_{i+1}^+) = \alpha(h_{i+1}^+) > 0$; ainsi $\bar{\alpha} > 0$ et $\alpha \in \Sigma$.

XVI. *Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, L_0 sa forme réelle, et L_u la forme réelle compacte de L. Soient θ et τ des involutions de l'algèbre de Lie L définies par les formes réelles L_0 et L_u respectivement. Soit $L_u^+ = L_u \cap L_0$. Supposons que les involutions θ et τ commutent entre elles et que l'on a l'égalité $\bar{\alpha} = -\alpha$ pour la racine $\alpha \in \Delta$. Alors pour chaque $x \in L^\alpha$ on a l'égalité $\theta(x) = \tau(x)$; en particulier, $\theta(e_\alpha) = e_{-\alpha}$. En outre, $x + \theta(x) \in L_u^+$ pour tous les $x \in L^\alpha$.*

D é m o n s t r a t i o n. On obtient de (14.1.12) que $\theta(x) \in L^{\bar{\alpha}}$ pour tous les $x \in L^\alpha$; si $\bar{\alpha} = -\alpha$, alors $\theta(x) \in L^{-\alpha}$ pour $x \in L^\alpha$. On tire de X que $\tau(x) \in L^{-\alpha}$ pour $x \in L^\alpha$; ainsi l'élément $y = \theta(x) - \tau(x)$ appartient au sous-espace $L^{-\alpha}$. Montrons que y commute avec le sous-espace H_0^+. En effet, supposons que $h \in H_0^+$; alors $h = \theta(h)$. En vertu de XV, on a $\alpha(H_0^+) = 0$; d'après XI, on a $\tau(h) = -h$ pour tous les $h \in H_0$; par conséquent, pour tous les $h \in H_0^+$ on a $[h, \theta(x)] = \theta([\theta(h), x]) = \theta([h, x]) = \theta(\alpha(h)x) = \overline{\alpha(h)}\,\theta(x) = 0$, et de même

$$[h, \tau(x)] = \tau([\tau(h), x]) = -\tau([h, x]) = -\overline{\alpha(h)}\,\tau(x) = 0,$$

donc $[h, y] = 0$. Remarquons que l'espace H_u est engendré (comme espace réel) par les vecteurs ih'_α et l'on a $iH_0^+ \subset H_u^-$, $iH_0^- \subset H_0^+$. Par conséquent, le sous-espace H_u^- est engendré (comme sous-espace réel) par l'ensemble iH_0^+. Étant donné que y commute avec H_0^+, il doit commuter avec H_u^-. Le sous-espace H_u^- est invariant relativement à l'involution θ, donc l'élément $\theta(y)$ commute avec H_u^- et $y - \theta(y)$ commute avec H_u^-. Mais $y - \theta(y) \in L_u^-$, tandis que H_u^- est une sous-algèbre commutative maximale de L_u^-. Donc $y - \theta(y) \in H_u^-$. D'autre part, $y \in L^{-\alpha}$, $\theta(y) \in L^\alpha$ et la somme des sous-espaces L^α, $L^{-\alpha}$ et H_u^- est une somme directe. Par conséquent $y = \theta(y) = 0$, i.e. $\theta(x) = \tau(x)$ pour tous les $x \in L^+$. Enfin $x + \theta(x) = x + \tau(x) \in L_0 \cap L_u = L_u^+$.

XVII. *Dans les hypothèses de la proposition* XIII, *soient* $L_u^+ = L_u \cap L_0$, $L_u^- = L_u \cap iL_0$. *Alors* L_u *est la somme directe de* L_u^+ *et de* L_u^-, L_0 *est la somme directe de* L_u^+ *et de* iL_u^-, *tandis que* L_0 *est la somme directe de la sous-algèbre* L_u^+ *et d'une certaine sous-algèbre résoluble* M_0.

Démonstration. Posons

$$N = \sum_{\alpha \in \Sigma} L^{\alpha}, \quad N' = \sum_{\alpha \in \Sigma} L^{-\alpha}. \tag{14.1.23}$$

Si $\alpha \in \Sigma$, alors α et $\bar{\alpha}$ sont des racines positives, donc $\bar{\alpha}$ et $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ sont des racines positives. Par conséquent, $\bar{\alpha} \in \Sigma$ et les sous-espaces N et N' sont invariants relativement à l'involution θ. D'autre part, (14.1.22) implique $\tau(L^{\alpha}) = L^{-\alpha}$, donc $\tau(N) = N'$.

Comme N est invariant relativement à θ, N est l'enveloppe complexe de l'intersection $N_0 = N \cap L_0$. Prouvons que

$$L_0 = L_u^+ \dot{+} iH_u^- \dot{+} N_0. \tag{14.1.24}$$

La somme dans l'égalité (14.1.24) est directe. En effet, si $l \in L_u^+$, $h \in H_u^-$ et $n \in N_0$, et si $l + h + n = 0$, alors en appliquant l'opérateur τ à cette égalité on obtient $l - h + \tau(n) = 0$; en soustrayant on trouve $2h + n - \tau(n) = 0$; mais $h \in H$, $n \in N$, $\tau(n) \in N'$ et la somme des sous-espaces H, N et N' est directe; donc $h = n = 0$ et $l = 0$. Ainsi la somme de L_u^+, iH_u^- et N_0 est une somme directe. Remarquons maintenant que l'espace L_0 est engendré (comme espace réel) par le sous-espace $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^- \subset L_u^+ + iH_u^-$ et les éléments de la forme $y = x + \theta(x)$, où $x \in L^{\alpha}$. Si $\bar{\alpha} = -\alpha$, on tire de XVI que l'élément $x + \theta(x)$ est situé dans L_u^+. Si $\alpha \in \Sigma$, on a $\bar{\alpha} > 0$ et $y \in L^{\alpha} + L^{\bar{\alpha}} \subset N$. Puisque $y \in L_0$, on a $y \in N \cap L_0 = N_0$. Mais si $\alpha \in -\Sigma$, on a $\tau(y) \in L^{-\alpha} + L^{-\bar{\alpha}} \subset N$ et $y + \tau(y) \in L_u^+$, donc $y \in N_0 + L_u^+$. Par conséquent, l'espace L_0 est engendré (comme espace réel) par les éléments des espaces L_u^+, iH_u^- et N_0.

Etant donné que $[L^{\alpha}, L^{\beta}] \subset L^{\alpha+\beta}$ et $\alpha + \beta \in \Sigma$ lorsque $\alpha, \beta \in \Sigma$, alors N et N' sont des sous-algèbres de Lie de L. Puisque Σ est un ensemble fini, les relations $[L^{\alpha}, L^{\beta}] \subset L^{\alpha+\beta}$ impliquent que N et N' sont des algèbres de Lie nilpotentes. Posons $M_0 = iH_u^- + N_0$. Alors on tire de (14.1.24) que $L_0 = L_u^+ + M_0$. D'autre part, $[N_0, N_0] \subset N_0$, $[iH_u^-, iH_u^-] = 0$ et $[iH_u^-, N_0] \subset N_0$, donc M_0 est une sous-algèbre de Lie de L_0 et l'on a $[M_0, M_0] \subset N_0$. Puisque N_0 est nilpotente, M_0 est une algèbre de Lie résoluble.

14.2. Représentations linéaires des formes réelles.

I. *Soient* L *une algèbre de Lie complexe,* L_0 *sa forme réelle, et* π *une représentation de l'algèbre de Lie* L_0 *dans un espace linéaire complexe* V *de dimension finie. Alors la formule*

$$\tilde{\pi}(x + iy) = \pi(x) + i\pi(y), \quad x, y \in L_0, \tag{14.2.1}$$

définit une représentation $\tilde{\pi}$ *de l'algèbre de Lie* L *dans l'espace* V. *La représentation* π *est irréductible si et seulement si la représentation* $\tilde{\pi}$ *est irréductible. Si* π_1 *est une autre représentation de l'algèbre de Lie* L_0 *dans l'espace* V_1, *alors les représentations* π *et* π_1 *sont équivalentes si et seulement si* $\tilde{\pi}$ *et* $\tilde{\pi}_1$ *sont équivalentes.*

D é m o n s t r a t i o n. On déduit immédiatement de la proposition I de 14.1. que la formule (14.2.1) définit une application linéaire complexe de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$; étant donné que $[x + iy, x_1 + iy_1] = [x, x_1] - [y, y_1] + i([x, y_1] + [y, x_1]$, on tire de la condition $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ que $\tilde{\pi}$ est une représentation de l'algèbre de Lie L dans V. En outre, la formule (14.2.1) implique que tout espace linéaire complexe $V_1 \subset V$, invariant relativement aux opérateurs $\pi(x)$, $x \in L_0$, est également invariant relativement aux opérateurs $\tilde{\pi}(z)$, $z \in L$. Enfin, si $\pi_1(x) = A\pi(x)A^{-1}$ pour tous les $x \in L_0$, où A est un opérateur linéaire inversible de V dans V_1, on peut tirer de (14.2.1) que $\tilde{\pi}_1(z) = A\tilde{\pi}(z)A^{-1}$ pour tous les $z \in L$.

II. *Soient* L *une algèbre de Lie complexe,* L_0 *sa forme réelle,* π *une représentation irréductible de l'algèbre de Lie* L, *et* ρ *sa restriction à* L_0. *Alors la représentation* ρ *est irréductible, et si* π *parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles deux à deux non équivalentes de l'algèbre de Lie* L, *alors* ρ *parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles deux à deux non équivalentes de l'algèbre de Lie* L_0.

D é m o n s t r a t i o n. On tire de la proposition I de 14.1 et de la formule (14.2.1) que la représentation π est équivalente à la représentation $\tilde{\rho}$. Alors l'assertion de la proposition II s'obtient immédiatement de I.

14.3. Classification des formes réelles des algèbres de Lie complexes simples. Enumérons les formes réelles des algèbres de Lie complexes semi-simples des types (A_n) à (G_2) dont les systèmes de racines ont été construits au § 11. Cette énumération des formes réelles nous donnera une liste complète des algèbres de Lie réelles simples, puisque la complexification d'une algèbre de Lie simple réelle est une algèbre de Lie simple complexe.

Introduisons d'abord quelques notations. Soit 1_m la matrice unité d'ordre m. Posons

$$I_{p,q} = \begin{Vmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{Vmatrix}, \quad J_n = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{Vmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{Vmatrix}. \tag{14.3.1}$$

Pour chaque matrice $x \in gl\ (n, \mathbf{C})$, désignons par x^* la matrice duale de x; par x^+ la transposée de x; par $\bar{x}$ la matrice obtenue de x en remplaçant tous les éléments de cette matrice par leurs conjugués complexes.

Considérons les algèbres de Lie $u\ (p, q)$, $su\ (p, q)$, $su^*\ (2n)$, $so\ (p, q)$ $so^*\ (2n)$, $sp\ (p, q)$ définies de la manière suivante:

$u\ (p, q)$ est l'algèbre de Lie des matrices $x \in gl\ (n, \mathbf{C})$ qui vérifient la condition $x = -I_{p,q}\, x^* I_{p,q}$;

$su\ (p, q)$ est la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $u\ (p, q)$ constituée par toutes les matrices $x \in u\ (p, q)$ telles que $\mathrm{tr}\, x = 0$;

$su^*\ (2n)$ est l'algèbre de Lie des matrices $x \in gl\ (n, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions $\mathrm{tr}\, x = 0$, $xJ_n = J_n\bar{x}$;

$so\ (p, q)$ est l'algèbre de Lie des matrices $x \in gl\ (n, \mathbf{R})$ vérifiant les conditions $\mathrm{tr}\, x = 0$, $x = -I_{p,q}\, x^+ I_{p,q}$;

$so^*\ (2n)$ est l'algèbre de Lie des matrices $x \in su^*\ (2n)$ vérifiant la condition $x = -x^+$;

$sp\ (2p, 2q)$ $(p + q = n)$ est l'algèbre de Lie des matrices $x \in gl\ (2n, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions $xJ_n + J_n x^+ = 0$, $x = -K_{p,q} x^* K_{p,q}$. L'algèbre de Lie $sp\ (2n, 0)$ sera désignée par $sp\ (2n)$.

Indiquons maintenant les formes réelles des algèbres de Lie des types (A_n) à (D_n).

THÉORÈME 1. 1) *Les formes réelles de l'algèbre de Lie complexe semi-simple* $sl\ (n + 1, \mathbf{C})$ *du type* (A_n) *sont les algèbres de Lie réelles suivantes:* $sl\ (n + 1, \mathbf{R})$; $su\ (p, q)$ *où* $p \geqslant q$, $p + q = n + 1$ *(en particulier, pour* $q = 0$ *on a la forme réelle compacte* $su\ (n + 1)$*), et si* n *est impair, l'algèbre de Lie* $su^*\ (n + 1)$.

2) *Les formes réelles de l'algèbre de Lie* $so\ (2n + 1, \mathbf{C})$ *complexe semi-simple du type* (B_n) *sont les algèbres de Lie réelles* $so\ (p, q)$, *où* $p + q = 2n + 1$, $p > q$ *(en particulier pour* $q = 0$ *on a la forme réelle compacte* $so\ (2n + 1, \mathbf{R})$*).*

3) *Les formes réelles de l'algèbre de Lie complexe semi-simple* $sp\ (2n, \mathbf{C})$ *du type* (C_n) *sont les algèbres de Lie réelles suivantes:* $sp\ (2n, \mathbf{R})$; $sp\ (2p, 2q)$ *où* $p \geqslant q$, $p + q = n$ *(en particulier, pour* $q = 0$ *on obtient la forme réelle compacte* $sp\ (2n)$*).*

4) *Les formes réelles de l'algèbre de Lie complexe semi-simple* $so\ (2n, \mathbf{C})$ *du type* (D_n) *sont les algèbres de Lie réelles suivantes:* $so\ (p, q)$, *où* $p + q = 2n$, $p \geqslant q$ *(en particulier, pour* $q = 0$ *on obtient la forme réelle compacte* $so\ (2n, \mathbf{R})$*); et si* n *est pair, l'algèbre de Lie* $so^*\ (2n)$.

La démonstration de ce théorème est assez longue et compliquée, et nous l'exposerons seulement pour le cas de l'algèbre de

Lie $L = sl\,(n+1, \mathbf{C})$ du type (A_n), i.e. nous ne démontrerons que l'assertion 1).

Soient L_0 la forme réelle de l'algèbre de Lie L, et θ l'involution correspondante de L (voir 14.1). Soit L_u la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie L, invariante relativement à θ (voir XIII de 14.1); désignons par τ l'involution de L qui correspond à la forme L_u. Alors $\theta\tau = \tau\theta$; posons $\sigma = \theta\tau$. L'application σ est un automorphisme de l'algèbre L, $\sigma^2 = (\theta\tau)^2 = 1_L$, et la forme réelle compacte L_u est invariante relativement à σ. L'application $\pi: x \to \sigma(x)$ est une représentation de dimension $n+1$ de l'algèbre de Lie $L = sl\,(n+1, \mathbf{C})$. Puisque σ est un automorphisme, la représentation π est irréductible. En vertu de V et VI, 13.5, la représentation π est équivalente ou bien à la représentation identique, ou bien à la représentation $x \to -x^+$. Considérons successivement ces deux possibilités.

a) Si π est équivalente à la représentation identique de l'algèbre de Lie L, alors il existe une matrice inversible A telle que $\sigma(x) = AxA^{-1}$ pour tous les $x \in sl\,(n+1, \mathbf{C})$. Remarquant que $\sigma(\sigma(x)) = x$, on a $A^2xA^{-2} = x$ pour tous les $x \in sl\,(n+1, \mathbf{C})$, i.e. $A^2 = \lambda 1_{n+1}$, $\lambda \neq 0$. En multipliant A par $\lambda^{-1/2}$, on peut supposer que $A^2 = 1_{n+1}$. Alors la matrice A est semblable à la matrice $I_{p,q}$ (voir (14.3.1)) pour certains p, q qui vérifient $p+q = n+1$; ainsi, l'automorphisme σ est semblable à l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ défini par la formule

$$\tilde{\sigma}(x) = I_{p,q}xI_{p,q}. \tag{14.3.2}$$

Soit $\tilde{\sigma} = \alpha\sigma\alpha^{-1}$, où α est l'automorphisme de l'algèbre de Lie $sl\,(n+1, \mathbf{C})$. Il est évident que la forme réelle compacte $su\,(n+1)$ est invariante relativement à l'automorphisme $\tilde{\sigma}$; nous avons tout droit de supposer que la forme compacte L_u a été choisie de façon à avoir $\alpha\,(su\,(n+1)) = L_u$. Alors l'application $\tilde{\tau} = \alpha\tau\alpha^{-1}$ est l'involution de L associée à $su\,(n+1)$, i.e. l'involution $\tilde{\tau}$ agit suivant la formule $\tilde{\tau}(x) = -x^*$. Posons $\tilde{\theta} = \alpha\theta\alpha^{-1}$; alors $\tilde{\theta} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$ donc

$$\tilde{\theta}(x) = -I_{p,q}x^*I_{p,q}. \tag{14.3.3}$$

Il est évident que l'ensemble $\tilde{L}_0$ des points fixes de l'involution $\tilde{\theta}$ coïncide avec $su\,(p, q)$. Puisque $\alpha(L_0) = L_0$, L_0 est isomorphe à $su\,(p, q)$.

b) Si π est équivalente à la représentation $x \to -x^+$, il existe une matrice inversible A telle que $\sigma(x) = -Ax^+A^{-1}$ pour tous les $x \in sl\,(n+1, \mathbf{C})$. Avec $\sigma(\sigma(x)) \equiv x$, on a $A\,(A^{-1})^+\,xA^+A^{-1} = x$ pour tous les $x \in sl\,(n+1, \mathbf{C})$. Par conséquent, $A^+A^{-1} = \lambda 1_{n+1}$, i.e. $A^+ = \lambda A$; alors $A = (A^+)^+ = \lambda^2 A$, donc $\lambda = \pm 1$.

Supposons d'abord que $\lambda = 1$. Alors $A^+ = A$, i.e. A est une matrice symétrique non dégénérée. Soit $p(\lambda)$ un polynôme en λ

tel que $(p(A))^2 = A$ (voir F. Gantmacher [1], chapitre V). Posons $B = p(A)$; alors $B^+ = p(A^+) = p(A) = B$ et $B^2 = BB^+ = A$. Considérons l'automorphisme α de l'algèbre de Lie L défini par la formule $\alpha(x) = B^{-1}xB$. Un calcul direct nous montre que $\alpha\sigma\alpha^{-1}(x) = -x^+$, i.e. l'automorphisme σ est semblable à l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ défini par la formule

$$\sigma(x) = -x^+. \tag{14.3.4}$$

Si $\tilde{\tau}$ est l'involution associée à la forme compacte $su(n+1)$, alors l'application $\tilde{\theta} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$ se définit par la formule

$$\tilde{\theta}(x) = -(-x^*)^+ = \bar{x}. \tag{14.3.5}$$

L'ensemble $\tilde{L}_0$ des points fixes de l'involution $\tilde{\theta}$ est un ensemble de matrices réelles de $sl(n+1, \mathbf{C})$, i.e. $\tilde{L}_0 = sl(n+1, \mathbf{R})$ et $L_0 \approx \tilde{L}_0 = sl(n+1, \mathbf{R})$.

Supposons maintenant que $\lambda = -1$. Alors $A^* = -A$, i.e. A est une matrice antisymétrique non dégénérée. Ceci est possible seulement dans le cas où $n+1$ est un nombre pair, mettons $n+1 = 2m$. Considérons l'automorphisme α de l'algèbre de Lie L défini par la formule $\alpha(x) = BxB^{-1}$, où B est une matrice non dégénérée. Un calcul immédiat nous montre que l'automorphisme $\tilde{\sigma} = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ de l'algèbre de Lie L agit suivant la formule

$$\tilde{\sigma}(x) = -\tilde{A}x^+\tilde{A}^{-1}, \quad x \in sl(n+1, \mathbf{C}), \tag{14.3.6}$$

où

$$\tilde{A} = BAB^+. \tag{14.3.7}$$

D'après N. Bourbaki [1], chapitre IX, § 5, numéro 1, il existe pour chaque matrice antisymétrique non dégénérée A une matrice non dégénérée B telle que la matrice $\tilde{A}$ de (14.3.7) coïncide avec J_m, i.e. l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ de (14.3.6) agit suivant la formule

$$\tilde{\sigma}(x) = -J_m x^+ J_m^{-1}. \tag{14.3.8}$$

Si $\tilde{\tau}(x) = -x^*$ et $\tilde{\theta} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$, on a

$$\tilde{\theta}(x) = -J_m(-x^*)^+ J_m^{-1} = J_m \bar{x} J_m^{-1}. \tag{14.3.9}$$

Il découle de (14.3.9) que l'ensemble des points fixes de l'involution $\tilde{\theta}$ coïncide avec $su^*(n+1)$, i.e. $L_0 \approx su^*(n+1)$.

Indiquons maintenant les formes réelles des algèbres de Lie complexes semi-simples singulières des types E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

L'algèbre de Lie L du type E_6 possède une forme réelle compacte L_u et quatre formes réelles non compactes L_1, L_2, L_3, L_4 et $L_1 \cap L_u \approx sp(8)$, $L_2 \cap L_u \approx su(6) + su(2)$, $L_3 \cap L_u \approx so(10, \mathbf{R}) +$

$+ \mathbf{R}$, $L_4 \cap L_u$ étant isomorphe à la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie du type F_4.

L'algèbre de Lie L du type E_7 possède une forme réelle compacte L_u et trois formes réelles non compactes L_1, L_2, L_3, et $L_1 \cap L_u \approx \approx su(8)$; $L_2 \cap L_u \approx so(12, \mathbf{R}) + su(2)$; $L_3 \cap L_u \approx \widetilde{L} + \mathbf{R}$, où $\widetilde{L}$ est la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie complexe du type E_6.

L'algèbre de Lie L du type E_8 possède une forme réelle compacte L_u et deux formes réelles non compactes L_1, L_2, et $L_1 \cap L_u \approx \approx so(16, \mathbf{R})$, $L_2 \cap L_u \approx \widetilde{L} + su(2)$, où $\widetilde{L}$ est la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie complexe du type E_7.

L'algèbre de Lie L du type F_4 possède une forme réelle compacte L_u et deux formes réelles non compactes L_1, L_2, et $L_1 \cap L_u \approx \approx sp(6) + su(2)$, $L_2 \cap L_u \approx so(9, \mathbf{R})$.

L'algèbre de Lie L du type G_2 possède une forme réelle compacte L_u et une certaine forme réelle non compacte L_0, et $L_0 \cap L_u \approx \approx su(2) + su(2)$.

Pour la démonstration de ces assertions et la description des involutions correspondantes en termes des racines voir l'article de E. Cartan [1*]. Voir également l'article de A. Sirota et A. Solodovnikov [1*].

§ 15. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie

I. *Soient L une algèbre de Lie, et π un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(V)$ avec* $\operatorname{Ker} \pi = (0)$. *Supposons que A est un idéal abélien de L et que l'élément $v \in V$, $v \neq 0$, possède les propriétés suivantes*: 1) $\pi(L)v = \pi(A)v$; 2) *l'application $a \to \to \pi(a)v$ est une bijection de l'algèbre de Lie A sur $\pi(a)v$. Soit J l'ensemble de tous les $x \in L$ tels que $\pi(x)v = 0$. Alors J est une sous-algèbre de Lie de L et L est la somme directe des espaces vectoriels A et J.*

Démonstration. Puisque $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$, alors par définition J est une sous-algèbre de Lie de L et en outre, par hypothèse, $J \cap A$ se réduit à l'élément nul. Enfin si $x \in L$ et a est un élément de l'idéal A tel que $\pi(x)v = \pi(a)v$, on a $\pi(x - a)v = = 0$, i.e. $x - a \in J$.

II. *Soient L une algèbre de Lie, A un idéal abélien de L, et $S = = L/A$. Supposons que S est semi-simple et que la restriction de la famille des opérateurs* $\operatorname{ad}(x)$, *$x \in L$, au sous-espace $A \subset L$ est une famille irréductible non nulle d'opérateurs de A. Alors il existe dans L une sous-algèbre de Lie J, supplémentaire de A et isomorphe à S.*

Démonstration. Supposons que $V = gl(L)$, i.e. V est l'espace linéaire des opérateurs linéaires sur L. Posons $\sigma(x)\varphi = = [\operatorname{ad} x, \varphi]$ pour tous les $x \in L$, $\varphi \in V$; alors σ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans $gl(V)$. Soient P, Q, R des sous-espaces croissants de l'espace V ($P \subset Q \subset R$), où P est l'ensemble $\operatorname{ad} a$,

$a \in A$, Q est l'ensemble de tous les $\varphi \in V$ tels que $\varphi(L) \subset A$ et $\varphi(A) = 0$; R est l'ensemble de tous les $\varphi \in V$ tels que $\varphi(L) \subset A$ et que la restriction de φ à A est scalaire. Il est évident que P, Q, R sont invariants relativement aux opérateurs $\sigma(x)$, $x \in L$, tandis que la codimension de Q relativement à R est 1. Soient $a \in A$, $\varphi \in R$, et supposons que la restriction de l'application φ à A est la multiplication par le nombre λ; alors

$$\sigma(a)\varphi = \text{ad}\, a \circ \varphi - \varphi \circ \text{ad}\, a = -\lambda\, \text{ad}\, a.$$

Par conséquent, $\varphi(a) R \subset P$ pour $a \in A$. Ce fait permet de considérer les espaces quotients Q/P et R/P et les homomorphismes π_1, π de l'algèbre de Lie $S = L/A$ dans les algèbres de Lie $gl(Q/P)$ et $gl(R/P)$ respectivement, induits par l'homomorphisme σ. Il est évident que l'homomorphisme π_1 est la restriction de l'homomorphisme π au sous-espace invariant R/P qui contient le sous-espace invariant Q/P de codimension 1 relativement à R/P. Puisque l'algèbre S est semi-simple, la famille $\pi_1(S)$ est complètement réductible sur R/P; par conséquent, il existe un supplémentaire invariant de Q/P tel que l'on peut trouver un élément $\bar{v} \in R/P$ invariant relativement à π (i.e. $\pi(S)\bar{v} = 0$); on peut supposer que la restriction des représentants $v \in R$ de l'élément $\bar{v}$ au sous-espace A est l'application identique.

Soit $v \in R$ une image inverse quelconque de l'élément $\bar{v}$. Montrons que v vérifie les hypothèses de la proposition I. Si $a \in A$, on a $\sigma(a)v = -\text{ad}\, a$ (car la restriction de l'application v à A est l'identité par construction). Si $\sigma(a)v = 0$, on a $\text{ad}\, a = 0$, i.e. $[a, x] = 0$ pour tous les $x \in L$. Par conséquent, $(\text{ad}\, x)(A) = 0$ pour tous les $x \in L$; si $a \neq 0$, alors le sous-espace des éléments $b \in A$ tels que $(\text{ad}\, x)(b) = 0$ est un sous-espace non nul de A. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle la restriction de la famille des opérateurs $\text{ad}(x)$, $x \in L$, à l'idéal A est une famille irréductible non nulle. Ainsi l'application $a \to \sigma(a)v$ est une bijection de l'idéal A sur $\sigma(A)v$. D'autre part, soit $x \in L$; nous devons montrer que $\sigma(x)v$ peut se mettre sous la forme $\sigma(a)v$, où $a \in A$. En remarquant que $\sigma(a)v = -\text{ad}\, a$, nous devons vérifier que $\sigma(x)v \in P$. Mais l'élément $\bar{v}$ est invariant relativement à $\pi(S)$, d'où $\pi(S)\bar{v} = \pi(L/A)\bar{v} = 0$, ou bien $\sigma(L)v \in P$. En appliquant la proposition I à la représentation σ et au vecteur v, nous voyons que l'ensemble J des éléments $x \in L$ tels que $[\text{ad}\, x, v] = 0$ pour tous les x est une sous-algèbre de Lie de L, L étant la somme directe des espaces vectoriels A et J. L'application canonique de l'algèbre de Lie L sur $L/A = S$, restreinte à la sous-algèbre de Lie J, est un isomorphisme de J sur S.

THÉORÈME DE LEVI-MALTSEV. *Soit φ un homomorphisme de l'algèbre de Lie L sur une algèbre de Lie semi-simple S. Soit A le noyau de*

l'homomorphisme φ. *Alors le radical de l'algèbre de Lie* L *est contenu dans* A *et il existe dans* L *une sous-algèbre de Lie* J, *supplémentaire de* A *et isomorphe à* S.

Démonstration. a) Pour $A = (0)$ l'assertion est triviale; supposons donc $A \neq (0)$. Admettons d'abord que la famille B des restrictions des opérateurs ad x, $x \in L$, à l'idéal A est une famille irréductible d'opérateurs sur A. Soit R un radical de l'algèbre de Lie L (voir § 3); alors l'algèbre de Lie $\varphi(R)$ est isomorphe à une algèbre quotient de l'algèbre R et par conséquent $\varphi(R)$ est une algèbre de Lie résoluble (voir IV de 1.6). Puisque R est un idéal de L, $\varphi(R)$ est un idéal de $\varphi(L) = S$. Mais l'algèbre de Lie S est semi-simple, donc l'idéal résoluble $\varphi(R)$ de S est nul. Ainsi $R \subset A$. Etant donné que l'idéal R est invariant relativement à tous les opérateurs ad x, $x \in L$ (voir VI, § 3), tandis que l'idéal A est irréductible relativement à la famille B, on a soit $R = (0)$, soit $R = A$. Si $R = (0)$, alors L est une algèbre de Lie semi-simple, et l'on peut prendre $J = A^{\perp}$ (voir III de 7.1). Si $R = A \neq (0)$, alors A est un idéal résoluble. Par conséquent $A \neq [A, A]$ et le sous-espace $[A, A]$ est invariant relativement à B. Par hypothèse, l'idéal A est irréductible relativement à la famille B; par conséquent $[A, A] = 0$, i.e. A est un idéal abélien. Si la famille B est nulle, alors $[x, a] = 0$ pour tous les $a \in A$, $x \in L$. Par conséquent, l'idéal A appartient au noyau de l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie L, et la famille des opérateurs ad x, $x \in L$, peut-être envisagée comme l'image par l'homomorphisme π de l'algèbre de Lie $S = L/A$ dans l'algèbre de Lie $gl(V)$, défini par la formule $\pi(s) = \text{ad}\, x$ pour $x \in s \in S$, $x \in L$. En remarquant que l'algèbre de Lie S est semi-simple, la famille des opérateurs $\{\text{ad}\, x, x \in L\} = \{\pi(s), s \in S\}$ est complètement réductible en vertu du théorème de H. Weyl. Ainsi, il existe dans l'algèbre de Lie L un sous-espace J, supplémentaire de A et invariant relativement à la famille des opérateurs ad x, $x \in L$; dans ce cas J est un idéal de L, supplémentaire de A. Mais si la famille B est non nulle, alors l'existence d'une sous-algèbre supplémentaire J vérifiant les conditions du théorème découle de la proposition II.

b) Démontrons maintenant le théorème de Levi-Maltsev par récurrence sur la dimension de l'idéal A. Si dim $A = 1$, alors A est un idéal abélien de L et toute famille d'opérateurs dans l'espace (unidimensionnel) A est irréductible; d'après la partie a) de notre démonstration, dans ce cas le théorème de Levi-Maltsev est vrai. Supposons que le théorème est démontré pour dim $A \leqslant n - 1$, où $n > 1$, et supposons que dim $A = n$. Si la famille B est irréductible, l'assertion du théorème découle de a). Si la famille B est réductible, il existe un sous-espace propre $A_1 \subset A$, invariant relativement à la famille B. Par conséquent, A_1 est un idéal de l'algèbre de Lie L contenu dans A. Considérons l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de l'algèbre

de Lie L/A_1 sur l'algèbre de Lie $L/A = S$ défini par l'application canonique $\varphi: L \to L/A$ par passage à l'algèbre quotient L/A_1. Il est évident que le noyau de l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ est A/A_1. Comme $\dim (A/A_1) < \dim A = n$, par hypothèse de récurrence il doit exister dans l'algèbre de Lie L/A_1 une sous-algèbre de Lie L_1/A_1, isomorphe à S et supplémentaire de A/A_1 dans L/A_1. On a ainsi défini un homomorphisme de l'algèbre de Lie L/A_1 sur l'algèbre de Lie S; le noyau de cet homomorphisme est l'idéal A_1, dont la dimension est strictement inférieure à n. En faisant de nouveau appel à l'hypothèse de récurrence, nous voyons que l'algèbre de Lie L_1 contient une sous-algèbre J_1 isomorphe à S et supplémentaire de A_1 dans J_1. La composition des applications $L \to L/A_1 \to L/A$ restreinte à L_1 est un isomorphisme de l'algèbre de Lie J_1 sur L/A. Par conséquent, J_1 est supplémentaire de l'idéal A dans l'algèbre de Lie L.

III. *Soient L une algèbre de Lie, et R son radical. Il existe alors une sous-algèbre de Lie semi-simple $S \subset L$ telle que $L = S \dot{+} R$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit R_1 un radical de l'algèbre de Lie L/R. Si $\tilde{R}$ est l'image inverse de R_1 dans L, alors $\tilde{R}$ est un idéal résoluble de L, parce que les algèbres de Lie R et $\tilde{R}/R$ sont résolubles (voir II de 2.2). Mais chaque idéal résoluble de l'algèbre de Lie L est contenu dans R (voir § 3); par conséquent $\tilde{R} \subset R$, $\tilde{R} = R$ et $R_1 = (0)$, de sorte que l'algèbre de Lie L/R est semi-simple. En appliquant le théorème de L e v i — M a l t s e v à l'homomorphisme canonique de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie semi-simple L/R, nous voyons qu'il existe une sous-algèbre de Lie semi-simple $S \subset L$, isomorphe à L/R et supplémentaire de R.

Enonçons sans démonstration un théorème qui permet de ramener l'étude des algèbres de Lie à l'étude des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{R})$ ou de l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{C})$.

THÉORÈME D'ADO. *Chaque algèbre de Lie réelle (respectivement complexe) possède une représentation linéaire exacte de dimension finie.*

Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple C. C h e - v a l l e y [1], J.- P. S e r r e [1] et Travaux du séminaire « Sophus Lie » [1].

CHAPITRE XI

GROUPES DE LIE

§ 1. Formule de Campbell-Hausdorff

1.1. Position du problème. Soient G un groupe de Lie, et L son algèbre de Lie. Soient $x, y \in L$; considérons le produit $\exp(x)\exp(y)$. Puisque dans un certain voisinage du point $0 \in L$ l'application exponentielle est une bijection analytique de L sur un sous-ensemble de G, il existe un certain voisinage U du point 0 dans L et une application analytique $f\colon U \times U \to L$ qui vérifient la contidion

$$\exp(x)\exp(y) = \exp f(x, y) \qquad (1.1.1)$$

pour tous les $x, y \in U$. Dans ce paragraphe nous trouverons une expression de l'application f.

Introduisons une norme dans l'algèbre de Lie L de manière à en faire un espace normé de dimension finie. (Par exemple, si $e_1, \ldots$ $\ldots, e_m$ est une base de L, on peut poser $\| x \| = \sum_{i=1}^{m} | x_i |$ pour $x =$ $= \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$.) Supposons que f est défini par la formule (1.1.1); supposons que $f(0, 0) = 0$. Désignons par L_r, $r > 0$, l'ensemble des éléments $x \in L$ tels que $\| x \| < r$. Choisissons un nombre $\varepsilon > 0$ de manière à ce que l'application exponentielle soit une bijection sur l'ensemble L_ε; choisissons un δ tel que $0 < \delta < \varepsilon$, donc $\exp(L_\delta)\exp(L_\delta) \subset \exp(L_\varepsilon)$. Alors l'application f définit une application analytique de $L_\delta \times L_\delta$ dans L_ε. Posons

$$\varphi(u, v) = f(ux, vy), \qquad (1.1.2)$$

où u et v sont réels (respectivement complexes) lorsque G est un groupe de Lie réel (respectivement complexe). La fonction $\varphi(u, v)$ est analytique dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{C}^2$), au moins dans le voisinage défini par les conditions $\| ux \| < \delta$, $\| vy \| < \delta$. Il découle de (1.1.1) et (1.1.2) que dans ce voisinage

$$\exp(ux)\exp(vy) = \exp \varphi(u, v). \qquad (1.1.3)$$

Posons

$$\psi(t) = \psi(t, x, y) = \varphi(t, t). \qquad (1.1.4)$$

La fonction ψ est analytique dans un voisinage du point $t = 0$ (certainement pour $\| tx \| < \delta$, $\| ty \| < \delta$). Posons

$$c_n(x, y) = \frac{1}{n!}((d^n/dt^n)\,\psi(t, x, y))_{t=0} \qquad (1.1.5)$$

pour tous les $n \geqslant 0$; il découle de l'analyticité de la fonction ψ que pour des t suffisamment petits on a l'égalité

$$\psi(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n c_n(x, y), \qquad (1.1.6)$$

tandis que pour des t petits la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t|^n \| c_n(x, y) \| \qquad (1.1.7)$$

converge. Ainsi, on connaît la fonction $\psi(t, x, y)$ dès qu'on a trouvé les coefficients $c_n(x, y)$; d'autre part, la fonction ψ définit la fonction f d'après l'égalité

$$f(x, y) = \psi(1, x, y) \qquad (1.1.8)$$

(cf. (1.1.1.), (1.1.3) et (1.1.4)).

1.2. Formule récurrente pour les coefficients c_n. En vertu de (3.5.15), chapitre IX, on a $c_0(x, y) = 0$, $c_1(x, y) = x + y$. Trouvons une formule récurrente pour $c_n(x, y)$. Posons

$$g(z) = z^{-1}(1 - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ((n+1)!)^{-1} z^n, \quad z \neq 0; \quad g(0) = 1.$$

Alors g est une fonction entière. Soit $h(z) = (g(z))^{-1}$. Alors h est analytique dans un voisinage du point $z = 0$, et $h(0) = 1$. Un calcul direct montre que $h(-z) = h(z) - z$. Posons $k(z) = h(z) - z/2 = z(1 - e^{-z})^{-1} - z/2$; alors k est une fonction analytique paire dans un voisinage du point $z = 0$, $k(0) = 1$. Soit $k(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} k_{2p} z^{2p}$ *). Introduisons les opérateurs linéaires $g(\mathrm{ad}\, x)$, $k(\mathrm{ad}\, x)$ dans l'espace L en posant

$$g(\mathrm{ad}\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\mathrm{ad}\, x)^n, \qquad (1.2.1)$$

$$k(\mathrm{ad}\, x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} k_{2p} (\mathrm{ad}\, x)^{2p} \qquad (1.2.2)$$

---

*) Les nombres $k_{2p} \cdot (2p)!$ s'appellent *nombres de Bernoulli*. Tous les k_{2p} sont rationnels.

pour tous les $x \in L_\delta$. Puisque les séries $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^{-1} \| \mathrm{ad}\, x \|^n$ et $\sum_{p=0}^{\infty} k_{2p} \| \mathrm{ad}\, x \|^{2p}$ convergent pour $x \in L_\delta$, les formules (1.2.1) et (1.2.2) définissent effectivement des opérateurs linéaires $g\,(\mathrm{ad}\, x)$, $k\,(\mathrm{ad}\, x)$. Pour les séries (1.2.1) et (1.2.2) on peut définir les opérations arithmétiques tout comme pour les séries de puissances usuelles. En particulier, la relation $g\,(z)\,(k\,(z) + z/2) = 1$ implique que $g\,(\mathrm{ad}\, x)\,(k\,(\mathrm{ad}\, x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}\, x) = (k\,(\mathrm{ad}\, x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}\, x)\, g\,(\mathrm{ad}\, x) = 1$, i.e. l'opérateur $g\,(\mathrm{ad}\, x)$ est inversible et

$$(g\,(\mathrm{ad}\, x))^{-1} = k\,(\mathrm{ad}\, x) + (\mathrm{ad}\, x)/2. \tag{1.2.3}$$

D'autre part, en vertu de (3.6.6), chapitre IX, l'opérateur $g\,(\mathrm{ad}\, x)$ coïncide, pour tous les $x \in L_\delta$, avec la différentielle de l'application exponentielle

$$(d \exp)_x = g\,(\mathrm{ad}\, x). \tag{1.2.4}$$

Ecrivons l'équation différentielle qui détermine la fonction $\psi\,(t, x, y)$:

I. *Soient $x, y \in L$ et supposons que la fonction $\psi\,(t, x, y)$ est définie par les formules* (1.1.3), (1.1.4). *Admettons que $a > 0$ a été choisi de manière à avoir $a \| x \| < \delta$, $a \| y \| < \delta$. Alors la fonction ψ vérifie, dans le domaine $| t | < a$, l'équation différentielle*

$$d\psi/dt = k\,(\mathrm{ad}\, \psi)\,(x + y) + (1/2)\,[x - y, \psi], \tag{1.2.5}$$

et la condition

$$\psi\,(0, x, y) = 0. \tag{1.2.6}$$

D é m o n s t r a t i o n. La relation (1.1.3) est valable pour tous les u, v tels que $| u | < a$, $| v | < a$. Trouvons les différentielles des applications $\alpha : v \to \exp\,(ux) \exp\,(vy)$ et $\beta : v \to \exp\,(\varphi\,(u, v))$ de la variété $\{v : | v | < a\}$ dans le groupe G. Supposons que w est un champ de vecteurs sur la variété $\{v : | v | < a\}$ défini par la condition $w\,(v)\,(z) = 1$ pour tous les v, $| v | < a$, où z est la fonction définie par l'égalité $z\,(v) \equiv v$, $| v | < a$. Nous allons désigner par $y\,(g)$ le vecteur tangent déterminé par le champ de vecteurs y au point $g \in G$. Puisque l'application α est la composition du sous-groupe à un paramètre $\gamma : v \to \exp\,(vy)$ et de la multiplication par $\exp\,(ux)$, il découle de la définition de l'application γ et des relations (3.4.18), de la proposition II de 3.4, chapitre IX et de (1.5.1), 1.5, chapitre IX, l'égalité

$$(d\alpha)_v(\, w\,(v)) = \exp\,(ux)\,(d\gamma)_v\,(w\,(v)) = \\ = \exp\,(ux) \exp\,(vy)\, y\,(e) = y\,(\exp\,(ux) \exp\,(vy)). \tag{1.2.7}$$

D'autre part

$$(d\beta)_v\,(w\,(v)) = (d\,\exp)_{\varphi(u,\,v)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \qquad (1.2.8)$$

Ainsi il découle de (1.1.3), (1.2.7) et (1.2.8) que

$$y\,(\varphi\,(u,\,v)) = (d\,\exp)_{\varphi(u,\,v)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \qquad (1.2.9)$$

En appliquant l'égalité (1.2.4) au deuxième membre de (1.2.9), nous voyons que

$$y\,(\varphi\,(u,\,v)) = g\,(\mathrm{ad}\,\varphi\,(u,\,v))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \qquad (1.2.10)$$

Mais l'opérateur $g\,(\mathrm{ad}\,\varphi\,(u,\,v))$ est inversible; multiplions par $g\,(\mathrm{ad}\,\varphi\,(u,\,v))^{-1}$ et appliquons (1.2.3), il vient à l'aide de (1.2.9)

$$(\partial\varphi/\partial v) = k\,(\mathrm{ad}\,\varphi)\,y + (1/2)\,[\varphi,\,y] \qquad (1.2.11)$$

pour tous les $|\,u\,| < a$, $|\,v\,| < a$.

Considérons maintenant l'égalité

$$\exp\,(-vy)\,\exp\,(-ux) = \exp\,(-\varphi\,(u,\,v)) \qquad (1.2.12)$$

(qui est une conséquence directe de (1.1.3)). En prenant la dérivée des deux membres de (1.2.12) relativement à u, nous obtenons

$$-x\,(\exp\,(-vy)\,\exp\,(-ux)) = (d\,\exp)_{-\varphi(u,\,v)}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) =$$

$$= g\,(-\,\mathrm{ad}\,\varphi)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \qquad (1.2.13)$$

tandis que (1.2.13) implique

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = g\,(-\,\mathrm{ad}\,\varphi)^{-1}\,x \qquad (1.2.14)$$

pour tous les $|\,u\,| < a$, $|\,v\,| < a$. En mettant à profit la parité de la fonction k avec l'égalité (1.2.3) nous obtenons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = k\,(\mathrm{ad}\,\varphi)\,x - (1/2)\,[\varphi,\,x] \qquad (1.2.15)$$

pour tous les $|\,u\,| < a$, $|\,v\,| < a$. Mais

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{u=v=t}, \qquad (1.2.16)$$

donc (1.2.5) découle de (1.2.16), (1.2.11) et (1.2.15). L'égalité (1.2.6) découle de (1.1.5) et (3.5.15), chapitre IX.

II. *Soient x, $y \in L$ et supposons que les coefficients $c_n\,(x,\,y)$ sont déterminés par l'égalité* (1.1.5). *Alors les coefficients $c_n\,(x,\,y)$ sont dé-*

terminés uniquement par la relation récurrente

$$(n+1)\,c_{n+1}(x, y) = [x-y, c_n(x, y)]/2 + \\ + \sum_{p\geq 1,\ 2p\leq n} k_{2p} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_{2p}>0 \\ m_1+\ldots+m_{2p}=n}} [c_{m_1}(x, y), [\ldots, [c_{m_{2p}}(x, y), x+y]\ldots]], \tag{1.2.17}$$

où $n \geqslant 1$, *et l'égalité*

$$c_1(x, y) = x+y. \tag{1.2.18}$$

Démonstration. L'égalité (1.2.18) découle de (3.5.15), chapitre IX. Démontrons l'égalité (1.2.17). Fixons un certain $n \geqslant 1$. Dérivons l'égalité (1.1.6), il vient

$$\frac{d\psi}{dt} = c_1(x, y) + 2tc_2(x, y) + \ldots + (n+1)\,t^n c_{n+1}(x, y) + o(t^n)\,; \tag{1.2.19}$$

d'autre part, il découle de l'analycité de la représentation adjointe et de l'égalité (1.1.6) que

$$\mathrm{ad}\,\psi(t) = t\,\mathrm{ad}\,c_1(x, y) + \ldots + t^n\,\mathrm{ad}\,c_n(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.20}$$

De (1.2.20) nous obtenons, en prenant la puissance appropriée, que pour chaque $p \geqslant 1$, tel que $2p \leqslant n$ on a l'égalité

$$(\mathrm{ad}\,\psi(t))^{2p} = \sum_{2p\leq q\leq n} t^q \sum_{\substack{m_1>0, \ldots, m_{2p}>0 \\ m_1+\ldots+m_{2p}=q}} \mathrm{ad}\,c_{m_1}(x, y) \ldots \\ \ldots \mathrm{ad}\,c_{m_{2p}}(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.21}$$

Il découle également de (1.2.20) que $\mathrm{ad}\,\psi(t) = t\,\mathrm{ad}\,c_1(x, y) + o(t)$, donc la substitution de l'égalité (1.2.21) dans la relation (1.2.2) avec $x = \psi(t)$ nous amène à l'égalité

$$k(\mathrm{ad}\,\psi(t)) = 1 + \sum_{p\geq 1,\ 2p\leq n} k_{2p}(\mathrm{ad}\,\psi(t))^{2p} + o(t^n) = \\ = 1 + \sum_{1\leq q\leq n} t^q \sum_{p\geq 1,\ 2p\leq q} k_{2p} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_{2p}\geq 1 \\ m_1+\ldots+m_{2p}=q}} \mathrm{ad}\,c_{m_1}(x, y) \ldots \\ \ldots \mathrm{ad}\,c_{m_{2p}}(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.22}$$

En substituant (1.2.19), (1.2.20) et (1.2.22) dans (1.2.5) et en comparant les coefficients auprès de t^n dans les deux membres de l'égalité, nous obtenons la relation (1.2.17).

Il est évident que les coefficients $c_n(x, y)$ sont bien déterminés par les égalités (1.2.17), (1.2.18) quel que soit $n \geqslant 1$, ce qui termine la démonstration de la proposition II. Notons que $c_2(x, y) = (1/2)\,[x, y]$.

Les formules (1.1.1), (1.1.8), (1.1.6), (1.2.17) et (1.2.18) impliquent pour $\| x \| < a$, $\| y \| < a$ l'égalité

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x, y). \tag{1.2.23}$$

où les coefficients $c_n (x, y)$ sont définis par les relations (1.2.17) et (1.2.18). Les relations (1.2.23), (1.2.17), (1.2.18) sont appelées *formules de Campbell-Hausdorff*, tandis que la série dans le deuxième membre de (1.2.23) s'appelle *série de Campbell-Hausdorff*.

1.3. Convergence de la série de Campbell-Hausdorff. Soit $q(z)$ une fonction de la variable complexe z définie par l'égalité

$$q(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} | k_{2p} | z^{2p}. \tag{1.3.1}$$

Il découle de la formule de Cauchy-Hadamard que le rayon de convergence de la série $1 + \sum_{p=1}^{\infty} k_{2p} z^{2p}$ de la fonction $k(z)$ est égal au rayon de convergence de la série $q(z)$. Mais les points singuliers de la fonction $k(z) = z(1 - e^{-z})^{-1} - z/2$ les plus proches du point $z = 0$ sont les points $\pm 2\pi i$, donc le rayon de convergence de la série de $k(z)$, et en même temps celui de la série (1.3.1), est égal à 2π.

Considérons l'équation différentielle

$$dy/dz = (y/2) + q(y). \tag{1.3.2}$$

Conformément à la théorie générale des équations différentielles, il existe un nombre positif b, $b < 2\pi$, tel que l'équation (1.3.2) possède une solution $y(z)$, analytique dans le disque $\{z : |z| < b\}$, qui vérifie la condition

$$y(0) = 0. \tag{1.3.3}$$

Fixons ce nombre positif b. Supposons que G est un groupe de Lie, et L son algèbre de Lie. Supposons que L est un espace linéaire normé relativement à une certaine norme $\| x \|$, $x \in L$. Soit $M \geqslant 1$ un nombre tel que

$$\| [x, y] \| \leqslant M \| x \| \| y \| \tag{1.3.4}$$

pour tous les $x, y \in L$. Désignons par U l'ensemble de tous les éléments $x \in L$ tels que $\| x \| < b/2M$, i.e.

$$U = L_{b/2M}. \tag{1.3.5}$$

Remarquons que $b/2M < \pi$, car $b < 2\pi$, $2M \geqslant 2$.

I. *Soit* $c_1 (x, y) = x + y$ *et supposons que les fonctions* $c_n (x, y)$ *sont définies par les formules récurrentes* (1.2.17) *pour tous les* $n > 1$.

Quels que soient x, $y \in U$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \| c_n(x, y) \|$ *converge. Posons*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, y) = F(x, y), \quad x, y \in U; \tag{1.3.6}$$

alors la fonction $F(x, y)$ *définit une application analytique de la variété* $U \times U$ *dans* L *et l'on a*

$$\exp(x) \exp(y) = \exp F(x, y) \tag{1.3.7}$$

pour tous les x, $y \in U$.

Démonstration. Soient x, $y \in L$; posons $r = \max(\| x \|, \| y \|)$. Il découle de la relation $c_1(x, y) = x + y$ que $\| c_1(x, y) \| \leqslant 2r$. On tire de (1.2.17) que pour tous les $n \geqslant 1$ on a l'inégalité

$$(n+1) \| c_{n+1}(x, y) \| \leqslant Mr \| c_n(x, y) \| + \\ + 2r \sum_{p \geqslant 1,\ 2p \leqslant n} | k_{2p} | M^{2p} \sum_{\substack{m_1 > 0, \ldots, m_{2p} > 0 \\ m_1 + \ldots + m_{2p} = n}} \| c_{m_1}(x, y) \| \ldots \| c_{m_{2p}}(x, y) \|. \tag{1.3.8}$$

Soit $y = y(z)$ une fonction analytique dans le disque $\{z : | z | < b\}$, solution du problème de Cauchy (1.3.2) à (1.3.3). Soit

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n z^a \tag{1.3.9}$$

pour $| z | < b$. En portant la relation (1.3.9) dans (1.3.2) et en comparant les coefficients auprès de z^n dans les deux membres de l'égalité obtenue, on trouve, que les coefficients ρ_n vérifient la relation de récurrence

$$(n+1) \rho_{n+1} = \\ = \rho_n/2 + \sum_{p \geqslant 1,\ 2p \leqslant n} | k_{2p} | \sum_{\substack{m_1 > 0, \ldots, m_{2p} > 0 \\ m_1 + \ldots + m_{2p} = n}} \rho_{m_1} \ldots \rho_{m_{2p}}, \tag{1.3.10}$$

avec

$$\rho_1 = 1. \tag{1.3.11}$$

On tire des relations (1.3.10) et (1.3.11) que $\rho_n > 0$ pour tous les $n \geqslant 1$.

Montrons par récurrence sur n que pour tous les $n \geqslant 1$ on a l'inégalité

$$\| c_n(x, y) \| \leqslant M^{n-1} (2r)^n \rho_n. \tag{1.3.12}$$

Comme $\| c_1(x, y) \| \geqslant 2r$, l'égalité (1.3.12) est vérifiée pour $n = 1$. Supposons que la relation (1.3.12) est vraie pour tous les $n =$

$= 1, 2, \ldots, m$. Alors il découle de (1.3.8) et (1.3.10) que

$$(m+1)\|c_{m+1}(x, y)\| \leqslant MrM^{m-1}(2r)^m \rho_m +$$
$$+ 2r \sum_{p\geqslant 1,\ 2p\leqslant m} |k_{2p}| M^{2p} \sum_{\substack{m_1>0,\ \ldots,\ m_{2p}>0 \\ m_1+\ldots+m_{2p}=m}} M^{m-2p}(2r)^m \rho_{m_1}\ldots\rho_{m_{2p}} =$$
$$= M^m(2r)^{m+1}(m+1)\rho_{m+1},$$

i.e. (1.3.12) a lieu pour tous les $n \geqslant 1$. Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |z|^n$ converge pour $|z| < b$, on obtient de (1.3.12) que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|c_n(x, y)\|$ converge pour $2Mr < b$ i.e. pour $x, y \in U$.

Pour des $x, y \in L$ fixes et un t quelconque on a la relation

$$c_n(tx, ty) = t^n c_n(x, y) \tag{1.3.13}$$

(on la vérifie aisément par récurrence à l'aide des égalités (1.2.17)). Alors on tire de (1.1.6), (1.1.8), (1.3.6) et (1.3.13)

$$F(tx, ty) = f(tx, ty) \tag{1.3.14}$$

pour tous les $|t|$ suffisamment petits. Les applications F et f étant analytiques dans un voisinage du point $(0, 0) \in L \times L$, la relation (1.3.14) implique que les fonctions F et f coïncident dans un certain voisinage du point $(0, 0) \in L \times L$. En particulier, $\exp(x)\exp(y) = \exp F(x, y)$ dans un certain voisinage du point $(0, 0) \in L \times L$. Mais une fonction analytique sur un ensemble connexe est bien définie par sa restriction à un sous-ensemble ouvert arbitraire, donc $\exp(x)\exp(y) = \exp F(x, y)$ pour tous les $x, y \in U$.

1.4. Homomorphismes des groupes et algèbres de Lie.

I. *Soient G, H des groupes de Lie connexes L, M leurs algèbres de Lie, et π_1, π_2 des homomorphismes analytiques du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H. Si les homomorphismes $d\pi_1$ et $d\pi_2$ de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie M coïncident, alors π_1 et π_2 coïncident également.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit W un voisinage canonique de l'élément $e \in G$ (voir 3.4, chapitre IX). Il découle de (3.4.25), chapitre IX, que $\pi_1(g) = \pi_2(g)$ sur W. Mais puisque G est connexe, on a $G = \bigcup_{n\geqslant 1} W^n$ (voir V. de 1.2, chapitre V), donc $\pi_1(g) = \pi_2(g)$ pour tous les $g \in G$.

Ainsi l'homomorphisme d'un groupe de Lie est déterminé de manière unique par l'homomorphisme correspondant des algèbres de Lie. En particulier, une représentation analytique d'un groupe de Lie G (i.e. un homomorphisme analytique du groupe de Lie G dans le groupe de Lie G_E où E est un espace linéaire complexe de dimen-

sion finie) est entièrement déterminée par la représentation correspondante de l'algèbre de Lie du groupe G.

Supposons maintenant que l'on se donne une certaine représentation ρ de l'algèbre de Lie du groupe de Lie G dans un espace complexe linéaire E de dimension finie. En général, la représentation ρ ne peut être présentée sous la forme $\rho = d\pi$ où π est une représentation du groupe de Lie G dans l'espace E.

Exemple. Soit $G = \Gamma^1$ le cercle unité; l'algèbre de Lie L du groupe G est isomorphe à $\mathbf{R}^1$ (voir l'exemple 2 de 3.2). Désignons par X le champ vectoriel invariant à gauche sur Γ^1 défini par la formule $X(1)(\sin\varphi) = 1$; alors $X(1)(\cos\varphi) = X(1)(\sqrt{1 - \sin^2\varphi}) = X(1)(1 + \sin^2\varphi f(\varphi))$, où $f(\varphi)$ est une fonction analytique dans un voisinage du point $\varphi = 0$. De l'égalité $X(1)(1) = 0$ et des relations (1.4.1) et (1.4.2) du chapitre IX on tire $X(1)(\cos\varphi) = 0$. En vertu de l'invariance à gauche du champ vectoriel X on a

$$X(e^{i\theta})(\sin\varphi) = X(1)(\sin(\varphi + \theta)) = \\ = X(1)(\sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi) = \cos\theta;$$

de même, $X(e^{i\theta})(\cos\varphi) = -\sin\theta$. On vérifie facilement par récurrence que pour chaque entier n on a les égalités $X(e^{i\theta})(\cos n\varphi) = -n\sin n\theta$, $X(e^{i\theta})(\sin n\varphi) = n\cos n\theta$. L'élément X forme une base de l'algèbre de Lie L. Supposons que L est l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{C}$, et soit Y un champ de vecteurs sur $\mathbf{C}$ défini par la condition $Yx = 1$, où x est la fonction $x(z) = Z$ sur $\mathbf{C}$; alors Y forme une base dans l'espace linéaire complexe L. Par conséquent, pour chaque nombre complexe a la formule $\rho(\lambda x) = \lambda a Y$, $\lambda \in \mathbf{R}$, définit une représentation ρ de l'algèbre de Lie L dans l'espace $\mathbf{C}$. Mais, d'autre part, toutes les représentations continues du groupe Γ^1 nous sont connues (voir d), 3.3, chapitre III). Soit π_n, $n \in \mathbf{Z}$, la représentation du groupe Γ^1 définie par la formule $\pi_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Alors $d\pi_n(X)(0) = (d\pi_n)_1 X(1)$ (voir (3.3.1)), donc $d\pi_n(X)(0)(x) = X(1)(x \circ \pi_n) = X(1)(e^{in\varphi}) = X(1)(\cos n\varphi + i\sin\varphi) = -n\sin 0 + in\cos 0 = in$, i.e. $d\pi_n(X) = inY$, tandis que pour $a \neq in$ la représentation ρ ne peut être mise sous la forme $\rho = d\pi$.

Ainsi il peut s'avérer qu'aucun homomorphisme des groupes de Lie ne corresponde à l'homomorphisme des algèbres de Lie données. Néanmoins pour les groupes de Lie simplement connexes on a la proposition suivante.

II. *Soient G, H des groupes de Lie, L, M leurs algèbres de Lie, et ρ un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie M. Si le groupe G est simplement connexe, il existe un homomorphisme analytique π du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H vérifiant la condition $d\pi = \rho$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient W un voisinage canonique de l'élément neutre du groupe G (voir 3.4, chapitre IX) et V un voisinage de l'élément nul de l'algèbre de Lie L appliqué topologiquement sur W par une application exponentielle (cf. V de 3.4, chapitre IX) Posons

$$\pi(\exp(x)) = \exp(\rho(x)) \qquad (1.4.1)$$

pour tous les $x \in V$. Montrons que l'application (1.4.1) est une application localement homomorphe du groupe de Lie G dans H. Supposons que l'ensemble $U \subset L$ est défini par la relation (1.3.5). Alors l'ensemble $U \cap V$ est un voisinage de l'élément nul de L, et $\exp(U \cap V)$ est le voisinage de l'élément neutre e de G. Soit U_0 un voisinage de l'élément e de G tel que $U_0^2 \subset \exp(U \cap V)$. Alors pour tous les $g_1, g_2 \in U_0$ et pour certains $x, y \in U \cap V$ bien déterminés on a

$$g_1 = \exp x, \quad g_2 = \exp y \qquad (1.4.2)$$

et

$$\exp x \exp y = \exp F(x, y) \qquad (1.4.3)$$

conformément à (1.3.7), où $\exp x \exp y \in \exp(U \cap V)$, et donc $F(x, y) \in U \cap V$ dans (1.4.3). Il découle de (1.4.3) et (1.4.1) que

$$\pi(g_1g_2) = \pi(\exp x \exp y) = \pi(\exp F(x, y)) = \\ = \exp \rho(F(x, y)). \qquad (1.4.4)$$

La représentation ρ est linéaire, donc elle est continue. En appliquant ρ aux deux membres de l'égalité (1.3.6), on trouve

$$\rho(F(x, y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(c_n(x, y)), \qquad (1.4.5)$$

tandis que des égalités (1.2.17) et (1.2.18) on déduit facilement par récurrence

$$\rho(c_n(x, y)) = c_n(\rho(x), \rho(y)) \qquad (1.4.6)$$

pour tous les $n \geqslant 1$. En substituant (1.4.5) et (1.4.6) dans (1.4.4), on obtient

$$\pi(g_1g_2) = \exp \rho(F(x, y)) = \exp F(\rho(x), \rho(y)), \qquad (1.4.7)$$

tandis que (1.4.7) et (1.3.6) impliquent

$$\pi(g_1g_2) = \exp F(\rho(x), \rho(y)) = \exp \rho(x) \exp \rho(y) = \\ = \pi(\exp(x) \exp(y)) = \pi(g_1)\pi(g_2) \qquad (1.4.8)$$

pour tous les $g_1, g_2 \in U_0$.

Ainsi l'application π définit un homomorphisme local du groupe G dans H. Mais par hypothèse le groupe G est simplement connexe, alors d'après I de 2.3, chapitre VIII, on peut prolonger l'application π à un homomorphisme continu du groupe G dans le groupe H;

cet homomorphisme sera à nouveau désigné par π. De la formule (1.4.1) on peut conclure que l'homomorphisme π est une application analytique dans un certain voisinage de l'élément neutre du groupe G. Par conséquent, π est un homomorphisme analytique du groupe G dans H.

Soit $d\pi$ l'homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie M défini par l'homomorphisme π. En vertu de (3.4.25), chapitre IX, on a $\pi(\exp x) = \exp(d\pi(x))$ pour tous les $x \in L$; en comparant avec (1.4.1), on trouve

$$\exp(\rho(x)) = \exp(d\pi(x)) \tag{1.4.9}$$

pour tous les $x \in V$. Puisque l'application exponentielle est topologique dans un certain voisinage de l'élément nul de l'algèbre de Lie M, on a $\rho(x) = d\pi(x)$ dans ce voisinage conformément à (1.4.9). Mais alors $\rho = d\pi$, ce qui termine la démonstration de la proposition II.

THÉORÈME. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe, L son algèbre de Lie et ρ la représentation de l'algèble de Lie L dans un espace linéaire complexe E de dimension finie. Il existe une représentation analytique π du groupe de Lie G dans l'espace E telle que $\rho = d\pi$.*

La proposition s'obtient immédiatement de la proposition II appliquée au cas $H = G_E$, $M = gl(E)$.

§ 2. Théorème de Cartan

Soient G un groupe de Lie connexe, et L l'algèbre de Lie du groupe G. Nous allons supposer que l'espace L est muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$. Soit U le voisinage de l'élément nul de L défini par la relation (1.3.5). Soit $V \subset U$ un voisinage symétrique de l'élément nul de L appliqué topologiquement dans G par une application exponentielle, et soit $W = \exp(V)$. Alors W est un voisinage symétrique de l'élément neutre de G. Supposons que H est un sous-groupe fermé de G; alors l'intersection $W \cap H$ est fermée dans W. Soit F un sous-ensemble de V tel que $\exp F = W \cap H$; puisque l'application exponentielle est topologique sur V, F est fermé dans V. Il est évident que le sous-ensemble $W \cap H$ vérifie les deux conditions suivantes:

a) si $g_1, \ldots, g_m \in W \cap H$ et $g_1, \ldots, g_m \in W$, alors $g_1, \ldots$ $\ldots, g_m \in H \cap W$,

b) si $g \in H \cap W$, alors $g^{-1} \in H \cap W$. Soit M l'ensemble de tous les éléments $x \in L$ tels que l'on a pour un certain $\varepsilon > 0$ la relation $\exp(tx) \in H \cap W$ pour tous les $|t| < \varepsilon$, i.e. $tx \in F$ pour tous les $|t| < \varepsilon$.

I. *Si $x \in M$, alors $\lambda x \in M$ pour tous les λ réels.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $\lambda \neq 0$, alors $t(\lambda x) \in F$ pour $|t| < \varepsilon\lambda^{-1}$.

II. *Soit $x \in V$ et $x \in M$; alors $x \in F$.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque $x \in M$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $tx \in F$ pour $|t| < \varepsilon$, i.e. $\exp(tx) \in H \cap W$ pour $|t| < \varepsilon$. D'autre part on a $x \in V$, de sorte que $\exp(x) = (\exp(xn^{-1}))^n \in H \cap W$ conformément à la condition a).

III. *Soit $x_n \in F$, $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Supposons que $x_n \to 0$ et $x_n/\|x_n\| \to y \neq 0$ dans L. Alors $y \in M$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit L_ε une boule de rayon ε de centre 0, contenue dans V. Soit m un entier positif et supposons que $\varepsilon_m = \varepsilon m^{-1}$. Posons

$$S_k = \{x \in L : (k-1)\,\varepsilon_m \leqslant \|x\| \leqslant k\varepsilon_m\} \tag{2.1.1}$$

(en particulier, $S_1 = L_{\varepsilon_m}$). Il existe un numéro N_m tel que $x_n \in S_1$ pour tous les $n \geqslant N_m$. Choisissons k de manière à avoir $1 < k \leqslant m$. De la proposition I et de la définition de S_k on tire que pour chaque entier $n \geqslant N_m$ on peut trouver un élément $y_n^{(k)}$ de la forme jx_n (j étant un nombre naturel) contenu dans S_k. Puisque $x_n/\|x_n\|$ converge vers y, la compacité de tous les S_k implique qu'une certaine sous-suite de points $y_{n_k}^{(k)}$ converge vers un point de la forme λy, où $(k-1)\,\varepsilon_m \leqslant |\lambda| \leqslant k\varepsilon_m$. En remarquant que $x_n \in S_1 = L_{\varepsilon_m}$, on a $jx_n \in L_\varepsilon \subset V$ pour tous les j naturels tels que $jx_n \in S_k$; par conséquent, $y_n^{(k)} \in V$. Mais $x_n = j^{-1}y_n^{(k)} \in M$, donc II implique que $y_n^{(k)} \in F$. Etant donné que $y_n^{(k)} \to \lambda y$ où $\lambda y \in S_m \subset L_\varepsilon$ tandis que l'ensemble F est fermé dans V, on a $\lambda y \in F$. Ainsi, nous avons démontré que *pour tout couple de nombres naturels m et k tels que $1 < k \leqslant m$ il existe un élément $\lambda y \in F$ pour lequel $(k-1)\,\varepsilon_m \leqslant |\lambda| \leqslant k\varepsilon_m$.*

La condition b) implique que l'ensemble D des nombres réels λ tels que $\lambda y \in F$ est symétrique relativement à zéro. D'où l'on tire, en mettant à profit la propriété de l'ensemble D qu'on vient de démontrer, que l'ensemble D est partout dense dans l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$. L'ensemble F étant fermé, on en tire que D contient l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tout entier; par conséquent $y \in M$.

IV. *Si $x, y \in V$, on a*

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\exp\frac{x}{m}\exp\frac{y}{m}\right)^m = \exp(x+y), \tag{2.1.2}$$

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\exp\frac{x}{m},\ \exp\frac{y}{m}\right]^{m^2} = \exp[x, y]. \tag{2.1.3}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par hypothèse, l'application exponentielle est topologique sur V et il suffit donc de vérifier que si

$\exp(x)\exp(y)=\exp f(x, y)$, où la fonction f est définie par les relations (1.2.17), (1.2.18), (1.2.23), alors

$$\lim_{m\to+\infty} mf\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right)=x+y, \tag{2.1.4}$$

$$\lim_{m\to+\infty} m^2 f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right)=[x, y]. \tag{2.1.5}$$

Remarquons en passant que les formules (1.2.17), (1.2.18) permettent d'obtenir par récurrence sur n la relation

$$c_n=\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right)=\frac{1}{m^n}c_n(x, y); \tag{2.1.6}$$

alors (2.1.4) découle immédiatement de (2.1.6) et (1.2.23). En outre, (2.1.6) et (1.2.23) impliquent

$$f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right)=$$
$$=f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right)+f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)+$$
$$+\frac{\left[f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right]}{2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{2.1.7}$$

et

$$f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right)=\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2m^2}[x, y]+o\left(\frac{1}{m^2}\right). \tag{2.1.8}$$

En substituant (2.1.8) dans (2.1.7), on obtient

$$f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right)=\frac{x+y}{m}+\frac{1}{2m^2}[x, y]+\frac{x+y}{m}+$$
$$+\frac{1}{2m^2}[x, y]+\frac{[x+y, x+y]}{2m^2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right)=\frac{[x, y]}{m^2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right). \tag{2.1.9}$$

La relation (2.1.5) découle immédiatement de (2.1.9).

V. *L'ensemble M est une sous-algèbre de Lie de L.*

Démonstration. Si $x, y \in M$, alors $\exp(tx)$, $\exp(ty)$ appartiennent à $H \cap W$ lorsque t est suffisamment petit. Puisque H est un sous-groupe, les éléments $\exp(tx)\exp(ty)$ et $[\exp(tx), \exp(ty)]$ appartiennent également à $H \cap W$ pour des t suffisamment petits. Par conséquent, $f(tx, ty) \in F$ pour des t suffisamment petits et $f\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right) \in F$ pour des n suffisamment grands ; en vertu de (2.1.2) et de III $x+y \in M$. De même, $\left[\exp\frac{x}{n}, \exp\frac{y}{n}\right] \in F$, donc (2.1.3) et III impliquent que $[x, y] \in M$. Comme $\lambda x \in M$ pour $x \in M$ (voir I), M est une sous-algèbre de Lie de L.

THÉORÈME 1. *Un sous-groupe fermé du groupe de Lie réel est un groupe de Lie.*

Démonstration. Soient G un groupe de Lie, et H son sous-groupe fermé. L'intersection du groupe H avec la composante de l'élément neutre G_0 du groupe G est en même temps un sous-groupe fermé et ouvert (et même un sous-groupe distingué) du groupe H; ainsi, si $H \cap G_0$ est un groupe de Lie, alors H est également un groupe de Lie. Par conséquent, il suffit de démontrer que l'intersection $H \cap G_0$ est un groupe de Lie; nous pouvons donc supposer en plus que G est un groupe connexe. Soient L l'algèbre de Lie du groupe G et M sa sous-algèbre de Lie définie page 542 avant la proposition I (voir également V). Soit $\widetilde{H}$ un sous-groupe analytique de G correspondant à M. Soit $g \in W \cap \widetilde{H}$. Puisque $\widetilde{H}$ est connexe, on a $\widetilde{H} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\exp (M \cap V))^m$, par conséquent, $g = \exp x_1, \ldots \exp x_k$, où $x_1, \ldots, x_k \in M \cap V$. D'autre part, puisque $x_1 \in M \cap V \subset M$ on a $tx_i \in F$ pour $|t| < \varepsilon_i$ pour un certain $\varepsilon_i > 0$; en particulier, $x_i/m_i \in F$ pour un certain nombre naturel m_i. Par conséquent, $g = (\exp (x_1/m_1))^{m_1} \ldots (\exp (x_k/m_k))^{m_k}$, où les facteurs $\exp (x_i/m_i)$ appartiennent à $\exp F = H \cap W$. Conformément à la condition a), $g \in W$ implique $g \in H \cap W$. Nous avons montré que $\widetilde{H} \cap W \subset H \cap W = \exp F$. Montrons que F est contenu dans un certain voisinage de l'élément nul de l'espace M. Supposons le contraire; il existe alors une suite de points $x_n \in F \setminus M$ telle que $x_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Soit N le sous-espace de L complémentaire de M. Par construction, l'application de l'espace $(N \cap V) \times (M \cap V)$ dans V définie par la formule $(y, z) \to f(y, z)$, $y \in N \cap V$, $z \in M \cap V$, est un isomorphisme local au point 0 (car la différentielle de cette application s'exprime par la formule $\{y, z\} \to y + z$ et est donc un isomorphisme des espaces tangents). Par conséquent, pour des n suffisamment grands, l'élément x_n se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x_n = f(y_n, z_n)$, où $z_n \in M \cap V$, $y_n \in N \cap V$. On a alors $y_n \to 0$, $z_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Donc pour des n suffisamment grands on a $z_n \in F$ (puisque $\exp F \supset W \cap \widetilde{H}$), mais alors on a également $y_n \in F$ d'après les conditions a) et b). Par conséquent, on peut supposer que la suite x_n est contenue dans N. Grace à la compacité de la sphère unité, la sous-suite $x_{n_k}/\| x_{n_k} \|$ converge vers l'élément $y_0 \in N$, $y_0 \neq 0$. D'autre part, $y_0 \in M$. Ceci est en contradiction avec le fait que N est le complémentaire de M dans L. Par conséquent, $\exp \widetilde{F} \subset H$, et le groupe de Lie $\widetilde{H}$ est la composante de l'élément neutre de H.

THÉORÈME 2. *Chaque homomorphisme continu* $\varphi: G_1 \to G_2$ *d'un groupe de Lie est analytique (réel).*

35—0883

Démonstration. Soit H le sous-ensemble de tous les éléments de $G_1 \times G_2$ de la forme $(g_1, \varphi(g_1))$, $g_1 \in G_1$. Alors H est un sous-groupe fermé du groupe G. D'après le théorème 1, H est un sous-groupe de Lie de $G_1 \times G_2$. L'application $\varphi_1: (g_1, g_2) \to g_1$ est un homomorphisme analytique du groupe $G_1 \times G_2$ sur G_1 et sa restriction à H est injective et analytique. Il est évident qu'elle détermine un isomorphisme des groupes de Lie H et G_1. Alors l'application inverse $g_1 \to (g_1, \varphi(g_1))$ est analytique. Puisque l'application $(g_1, g_2) \to g_2$ est également analytique, la composition $g_1 \to \to (g_1, \varphi(g_1)) \to \varphi(g_1)$ est analytique.

VI. *Chaque représentation continue de dimension finie d'un groupe de Lie (réel ou complexe) est analytique réelle.*

Démonstration. La représentation continue π d'un groupe de Lie G dans un espace V de dimension finie est un homomorphisme continu du groupe de Lie G dans le groupe de Lie G_V. En vertu du théorème 2, cet homomorphisme est analytique réel.

Exemple. La démonstration du théorème 1 permet d'indiquer une algèbre de Lie de tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie. En particulier, supposons que le sous-groupe fermé G du groupe de Lie $GL(n, \mathbf{R})$ est déterminé par une famille de conditions de la forme $F_\alpha(g) = 0$, $\alpha \in A$, où les F_α sont des fonctions analytiques sur G. Supposons que l'algèbre de Lie du groupe $GL(n, \mathbf{R})$ est canoniquement identifiée à $gl(n, \mathbf{R})$ (voir VI de 3.1); alors l'algèbre de Lie du groupe de Lie G peut être identifiée à la sous-algèbre de Lie $M \subset \subset gl(n, \mathbf{R})$ constituée par tous les $x \in gl(n, \mathbf{R})$ tels que $(x^n F_\alpha)(e) = = 0$ pour tous les $\alpha \in A$ et tous les entiers naturels n. En effet, dans les notations de la proposition I, l'ensemble M est une algèbre de Lie du groupe de Lie G, tandis que M est l'ensemble de tous les $x \in gl(n, \mathbf{R})$ tels que $\exp(tx) \in G$ pour tous les t suffisamment petits, i.e. tous les $x \in gl(n, \mathbf{R})$ tels que $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ pour des t suffisamment petits. Mais $F_\alpha(\exp(tx))$ est une fonction analytique, donc $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ si et seulement si $(d^n/dt^n) F_\alpha(\exp(tx)|_{t=0} = = 0$ pour tous les $n \geqslant 0$, i.e. $(x^n F_\alpha)(e) = 0$ pour tous les n naturels.

Supposons d'abord qu'une des fonctions, F_{α_0}, est de la forme $F_{\alpha_0}(g) = \det g - 1$. Il est évident que $F_{\alpha_0}(g) = 0$ si et seulement si $g \in SL(n, \mathbf{R})$. Le groupe $SL(n, \mathbf{R})$ est connexe (voir XVI de 1.2, chapitre V); il est le noyau de l'homomorphisme analytique φ du groupe de Lie $GL(n, \mathbf{R})$ dans le groupe de Lie $\mathbf{R}^* = GL(1, \mathbf{R})$ défini par la formule $\varphi(g) = \det g$. En vertu de IV, 3.3, il en découle que le groupe $SL(n, \mathbf{R})$ coïncide avec le sous-groupe analytique correspondant au noyau de l'homomorphisme $d\varphi$ de l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbf{R})$. En appliquant la formule (3.4.25) du chapitre VIII, nous voyons que $\varphi(\exp(tx)) = \exp(d\varphi(tx)) = \exp(t(d\varphi(x)))$ pour tous les $x \in gl(n, \mathbf{R})$. Mais en ramenant la matrice x à la forme normale

de Jordan, nous obtenons $\varphi(\exp(tx)) = \det(e^{tx}) = e^{t\,\mathrm{tr}\,(x)}$, où tr (x) est la trace de la matrice x. Par conséquent, $e^{t\,\mathrm{tr}\,(x)} = e^{t\,d\varphi(x)}$ pour tous les $x \in gl(n, \mathbf{R})$, i.e. $d\varphi(x) = \mathrm{tr}(x)$; en particulier, l'algèbre de Lie du groupe $SL(n, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de Lie $L \subset \subset gl(n, \mathbf{R})$ constituée par les matrices à trace nulle, i.e. $L = sl(n, \mathbf{R})$ (voir l'exemple 2 de 2.1, chapitre IX).

Envisageons un autre cas particulier important. Soit $F_\alpha(g) = g^*Bg - B$, où B est une certaine matrice non dégénérée. Alors la relation $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ est équivalente à la relation $\exp(tx^*)\,B\exp(tx) - A \equiv 0$ et à la relation $\exp(tx^*)\,B - B\exp(-tx) = 0$. En prenant la dérivée relativement à t pour $t = 0$, on trouve que la matrice x doit vérifier la relation $x^*B + Bx = 0$, ou $x^*B = -Bx$. Réciproquement, supposons que $x^*B = -Bx$ pour une certaine matrice $x \in gl(n, \mathbf{R})$. On obtient alors par récurrence sur n que la relation $(x^*)^nB = (-1)^nBx^n$ est valable pour tous les n naturels. D'où l'on tire à son tour que $(d^n/dt^n) \times \times (\exp(tx^*)\,B - B\exp(-tx))|_{t=0} = (x^*)^nB + (-1)^{n+1}Bx^n = 0$ pour tous les n naturels, i.e. $\exp(tx^*)\,B = B\exp(-x)$ pour tous les t, i.e. $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$. De même, lorsque $F_\alpha(g) = g'Bg - B$, la relation $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ est équivalent à la relation $x'B = -Bx$. Une assertion analogue est évidemment vérifiée pour les sous-groupes fermés du groupe $GL(n, \mathbf{C})$.

En appliquant les résultats obtenus aux groupes $U(n)$, $SU(n)$, $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $Sp(2n)$, $O(n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$ nous voyons que leurs algèbres de Lie sont respectivement les algèbres de Lie suivantes: $u(n)$, $su(n)$, $o(n, \mathbf{R})$, $so(n, \mathbf{R})$, $sp(2n)$, $o(n, \mathbf{C})$, $so(n, \mathbf{C})$, $sp(2n, \mathbf{C})$.

§ 3. Troisième théorème de Lie

3.1. Produits semi-directs de groupes de Lie. Soient G, H des groupes de Lie connexes. Supposons que α est une application qui fait correspondre à chaque élément $h \in H$ un isomorphisme analytique α_h du groupe de Lie G sur lui-même vérifiant les conditions suivantes:

1) pour tous les h_1, $h_2 \in H$ on a la relation

$$\alpha_{h_1h_2} = \alpha_{h_1}\alpha_{h_2}; \tag{3.1.1}$$

2) l'application du produit $G \times H$ dans G, définie par la formule

$$(g, h) \to \alpha_h(g), \quad g \in G,\ h \in H, \tag{3.1.2}$$

est une application analytique de variétés.

Introduisons dans l'espace topologique $G \times H$ l'opération de multiplication suivant la formule

$$(g, h)(g_1, h_1) = (g\alpha_h(g_1), hh_1) \tag{3.1.3}$$

pour tous les g, $g_1 \in G$, h, $h_1 \in H$. Soient e_G, e_H les éléments neutres des groupes G et H respectivement ; le lecteur vérifiera aisément que l'opération de multiplication définie par la formule (3.1.3) munit l'espace topologique $G \times H$ d'une structure de groupe topologique, et l'élément neutre de ce groupe est le couple (e_G, e_H), tandis que l'élément inverse se calcule suivant la formule

$$(g, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) \qquad (3.1.4)$$

pour tous les g, $h \in G$. L'application (3.1.2) étant analytique, il découle des formules (3.1.3) et (3.1.4) que $G \times H$ est un groupe de Lie relativement à l'application (3.1.3). Désignons ce groupe de Lie par $G \underset{\alpha}{\times} H$ et appelons-le *produit croisé*, ou semi-direct, des groupes G et H relativement à α. Si α_h est l'application identique du groupe G sur lui-même pour tous les $h \in H$, alors $G \underset{\alpha}{\times} H$ coïncide avec le produit direct usuel des groupes de Lie G et H.

Posons

$$g' = (g, e_H), \quad h' = (e_G, h) \qquad (3.1.5)$$

pour tous les $g \in G$, $h \in H$; soit

$$G' = G \times \{e_H\}, \quad H' = \{e_G\} \times H. \qquad (3.1.6)$$

Il est évident que G' et H' sont des sous-groupes de Lie fermés dans $G \underset{\alpha}{\times} H$. Mais (3.1.3) et (3.1.4) impliquent

$$(g, h)(g_1, h_1)(g, h)^{-1} = \\ = (g\alpha_h(g_1)\,\alpha_{hh_1h^{-1}}(g^{-1}), hh_1h^{-1}) \qquad (3.1.7)$$

pour tous les g, $g_1 \in G$, h, $h_1 \in H$; en particulier,

$$(g, h)\, g_1' \,(g, h)^{-1} = (g\alpha_h(g_1)\, g^{-1})', \qquad (3.1.8)$$

$$h'g'h'^{-1} = \alpha_h(g)'. \qquad (3.1.9)$$

La relation (3.1.8) signifie que G' est un sous-groupe distingué du groupe G.

3.2. Produits semi-directs d'algèbres de Lie. Soient L, M les algèbres de Lie des groupes G et H respectivement. Désignons par β_h la différentielle de l'application $\alpha_h\colon G \to G$; alors β_h est un automorphisme de l'algèbre de Lie L pour tous les $h \in H$ (voir 3.5, chapitre IX). Conformément à (3.4.25), chapitre IX,

$$\alpha_h(\exp(x)) = \exp \beta_h(x) \qquad (3.2.1)$$

pour tous les $x \in L$. On tire de la relation (3.1.1) que

$$\beta_{h_1h_2} = \beta_{h_1}\beta_{h_2} \qquad (3.2.2)$$

pour tous les h_1, $h_2 \in H$, tandis que la relation (3.2.1) permet de conclure que β est une application analytique du groupe H dans le

groupe G_L. En comparant ceci avec (3.2.2), nous voyons que β est un homomorphisme analytique du groupe H dans G_L. Supposons que $\gamma = d\beta$ est l'homomorphisme correspondant de l'algèbre de Lie M du groupe H; conformément à III de 3.3, chapitre IX, l'application γ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie $gl(L)$. Notons que

$$\beta_h([x, y]) = [\beta_h(x), \beta_h(y)] \qquad (3.2.3)$$

pour tous les $x, y \in L$, car β_h est un automorphisme de l'algèbre de Lie L. Il découle de (3.2.3) que

$$\gamma(z)[x, y] = [\gamma(z)x, y] + [x, \gamma(z)y] \qquad (3.2.4)$$

pour tous les $x, y \in L$, $z \in M$, i.e. γ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie L.

Soient L, M des algèbres de Lie, δ un homomorphisme de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie Der (L).Considérons l'espace linéaire $L \times M$ et posons

$$[(x, y), [x_1, y_1)] = ([x, x_1] + \delta(y)x_1 - \delta(y_1)x, [y, y_1]) \quad (3.2.5)$$

pour tous les $x, x_1 \in L$, $y, y_1 \in M$. On vérifie facilement que l'opération (3.2.5) transforme $L \times M$ en une algèbre de Lie; désignons cette algèbre de Lie par $L \underset{\delta}{\times} M$ et appelons-la *produit semi-direct des algèbres de Lie L et M* relativement à δ. Soit

$$L' = L \times \{0\}, \quad M' = \{0\} \times M. \qquad (3.2.6)$$

On déduit facilement de (3.2.5) et (3.2.6) que L' est un idéal de $L \underset{\delta}{\times} M$, M' est une sous-algèbre de $L \underset{\delta}{\times} M$, et

$$L' + M' = L \underset{\delta}{\times} M, \quad L' \cap M' = \{0\}. \qquad (3.2.7)$$

I. *L'algèbre de Lie du groupe de Lie $G \underset{\alpha}{\times} H$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $L \underset{\gamma}{\times} M$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient A l'algèbre de Lie du groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$, L', M' les sous-algèbres de Lie de A qui correspondent aux sous-groupes G', $H' \subset G \underset{\alpha}{\times} H$ (voir (3.1.6)). Comme G' est un sous-groupe distingué de $G \underset{\alpha}{\times} H$, L' est un idéal de A (voir V de 3.5, chapitre IX). Il découle de (3.1.6) que $G \underset{\alpha}{\times} H = G'H'$ et $G' \cap H' = \{e\}$; alors I, II, 3.3 et (3.5.15) du chapitre IX impliquent

$$L' + M' = A, \quad L' \cap M' = \{0\}. \qquad (3.2.8)$$

Soit $x \to x'$ (respectivement $y \to y'$) un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie L' (respectivement un isomorphisme de M sur M') défini par l'isomorphisme $g \to g'$ (respectivement $h \to h'$) du groupe de Lie G sur G' (respectivement H sur H'). D'après la relation (3.1.9) et la formule (3.4.25), chapitre IX, pour chaque $h \in H$ et chaque $x \in L$ on a l'égalité

$$(\exp \beta_h(x))' = h' (\exp x') h'^{-1}, \tag{3.2.9}$$

donc

$$\beta_h(x)' = \mathrm{Ad}_{G \underset{\alpha}{\times} H}(h')(x'). \tag{3.2.10}$$

En calculant les dérivées des deux membres de l'égalité (3.2.10) envisagés comme des applications du groupe H dans L', on trouve

$$(\gamma(y)\, x)' = [y', x'] \tag{3.2.11}$$

pour tous les $y \in M$, $x \in L$. La relation (3.2.11) implique

$$[x' + y', x_1' + y_1'] = [x', x_1'] + [y', x_1'] - (y_1', x'] + [y', y_1'] =$$
$$= [x', x_1'] + (\gamma(y)\, x_1)' - (\gamma(y_1)\, x)' + [y', y_1'] \tag{3.2.12}$$

pour tous les $x, x_1 \in L$, $y, y_1 \in M$. En comparant (3.2.12) avec (3.2.5) et en appliquant (3.2.7) et (3.2.8), on trouve que l'application

$$(x, y) \to x' + y'$$

est un isomorphisme des algèbres de Lie $L \underset{\gamma}{\times} M$ et A.

II. *Soient G, H des groupes de Lie simplement connexes, L, M leurs algèbres de Lie, et δ un homomorphisme de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie* Der (L). *Il existe une application et une seule α du groupe de Lie H dans l'ensemble des isomorphismes analytiques du groupe de Lie G sur lui-même qui vérifie les conditions* 1) *et* 2) *de* 3.1 *telle que l'application* (3.2.13) *est un isomorphisme de l'algèbre de Lie du groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$ sur l'algèbre de Lie $L \underset{\delta}{\times} M$. Le groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$ est simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque le groupe H est simplement connexe, on peut construire, en se servant de l'homomorphisme δ de l'algèbre de Lie M dans l'algèbre de Lie $gl(L)$, un homomorphisme analytique β du groupe H dans le groupe de Lie $gl(L)$ tel que $d\beta = \delta$ (voir II de 1.4). Montrons que

$$\beta(h)[x_1, x_2] = [\beta(h)\, x_1, \beta(h)\, x_2] \tag{3.2.13}$$

pour tous les $h \in H$, $x_1, x_2 \in L$. Le groupe H étant connexe, il suffit de démontrer la formule (3.2.13) pour tous les h choisis dans un certain voisinage de l'élément neutre de H, et donc il suffit de montrer que la fonction

$$\varphi(t) = \beta(\exp(ty))[x_1, x_2] - [\beta(\exp(ty))\, x_1, \beta(\exp(ty))\, x_2] \tag{3.2.14}$$

est identiquement nulle en t pour tous les $y \in M$, x_1, $x_2 \in L$. A l'aide de (3.4.25), chapitre IX, la formule (3.2.14) peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(t) = \exp(t\delta(y))\,[x_1,\ x_2] - [\exp(t\delta(y))\,x_1,\ \exp(t\delta(y))\,x_2]. \quad (3.2.15)$$

En calculant les dérivées de (3.2.15) relativement à t au point $t = 0$, on obtient

$$\left(\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right)_{t=0} = \delta(y)^n\,[x_1,\ x_2] - \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,[\delta(y)^k x_1,\ \delta(y)^{n-k} x_2]. \quad (3.2.16)$$

Mais $\delta(y)$ est une dérivation, i.e.

$$\delta(y)\,[x_1,\ x_2] = [\delta(y)\,x_1,\ x_2] + [x_1,\ \delta(y)\,x_2] \quad (3.2.17)$$

pour tous les $y \in M$, x_1, $x_2 \in L$. Par conséquent, $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0$, et par récurrence sur n on obtient facilement de la formule (3.2.16) que $\left(\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right)_{t=0} = 0$ pour tous les $n \geqslant 1$. Ainsi, $\varphi(t) = \varphi(0) = 0$. Ceci termine la démonstration de la relation (3.2.13).

Ainsi, $\beta(h)$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie L du groupe G. Puisque le groupe G est simplement connexe, il existe un isomorphisme analytique α_h et un seul du groupe G sur lui-même, tel que $d\alpha_h = \beta(h)$ (voir II de 1.4). Vu que α_h est entièrement déterminé par l'automorphisme $\beta(h)$ et $\beta(h_1)\,\beta(h_2) = \beta(h_1h_2)$, on a $\alpha_{h_1}\alpha_{h_2} = \alpha_{h_1h_2}$ pour tous les h_1, $h_2 \in H$.

Il découle de l'égalité $d\beta = \delta$ que $\beta(\exp(y)) = \exp(\delta(y))$ pour tous les $y \in L$; d'où l'on obtient, en se servant de l'égalité $d\alpha_{\exp(y)} = \beta(\exp(y))$ que

$$\alpha_{\exp(y)}(\exp(x)) = \exp(\beta(\exp y)\,x) = \exp(\exp\delta(y)\,x) \quad (3.2.18)$$

pour tous les $x \in L$, $y \in M$. Il découle de la formule (3.2.18) que l'application $(g, h) \to \alpha_h(g)$ est une application analytique de la variété $G \times H$ dans G. Ainsi l'application α vérifie les conditions 1) et 2) de 3.1. Construisons le groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$. Puisque $\delta = d\beta$, où $\beta(h) = d\alpha_h$, on tire de la proposition I que l'algèbre de Lie du groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $L \underset{\delta}{\times} M$, l'isomorphisme étant établi à l'aide de l'application (3.2.13). Le groupe $G \underset{\alpha}{\times} H$ est homéomorphe au produit $G \times H$ (voir 3.1); puisque G et H sont simplement connexes, $G \times H$ et $G \underset{\alpha}{\times} H$ le sont également (voir II de 2.1, chapitre IX).

3.3. Troisième théorème de Lie.

THÉORÈME. *Soit L une algèbre de Lie. Il existe un groupe de Lie G simplement connexe dont l'algèbre de Lie est isomorphe à L.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que L est une algèbre de Lie résoluble. Dans ce cas nous démontrerons le théorème par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie L. Si $\dim L = 1$, on a $L = \mathbf{R}$ ou $L = \mathbf{C}$; on peut prendre respectivement $G = \mathbf{R}$ ou $G = \mathbf{C}$. Supposons que $\dim L = n > 1$, et admettons que le théorème est déjà démontré pour les algèbres de Lie résolubles de dimension $< n$. Puisque L est résoluble, on a $[L, L] \neq L$ (voir 1.6, chapitre X). Soit I le sous-espace linéaire de L qui contient $[L, L]$ et tel que $\dim L/I = 1$. Soit J un sous-espace unidimensionnel arbitraire de L, supplémentaire de I. Comme $[I, L] \subset [L, L] \subset I$, I est un idéal de L. Il est évident que J est une sous-algèbre de Lie commutative de L, et

$$I + J = L, \quad I \cap J = (0). \tag{3.3.1}$$

Soient $x \in I$, $y \in J$; posons

$$\delta(y)\, x = [y, x]. \tag{3.3.2}$$

Il est évident que $\delta(y)$ est une dérivation de l'algèbre de Lie I pour chaque $y \in J$ et l'application δ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie J dans l'algèbre de Lie Der (I). Il est facile de vérifier directement que l'algèbre de Lie L est isomorphe à l'algèbre de Lie $I \underset{\delta}{\times} J$. Par hypothèse de récurrence, il existe des groupes de Lie simplement connexes S et T dont les algèbres de Lie sont isomorphes aux algèbres de Lie I et J respectivement. En appliquant la proposition II de 3.2, nous voyons qu'il existe un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est isomorphe à L.

Supposons maintenant que l'algèbre de Lie L est semi-simple. Alors le centre de L est nul, et par conséquent la représentation adjointe de l'algèbre de Lie L est une représentation exacte, tandis que la sous-algèbre de Lie $L' \subset gl(L)$ qui est constituée par tous les opérateurs de la forme ad x, $x \in L$, est isomorphe à L. En appliquant II de 3.3, chapitre XI, nous voyons qu'il existe un sous-groupe analytique $G' \subset G_L$ dont l'algèbre de Lie est L'. Soit G le groupe de revêtement universel pour le groupe G'. Alors G est un groupe de Lie siplement connexe, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à L.

Supposons enfin que L est une algèbre de Lie quelconque. Soit R un radical de l'algèbre de Lie L. Conformément à III, § 15, chapitre X, il existe une sous-algèbre de Lie $Q \subset L$ semi-simple telle que

$$L = Q + R, \quad Q \cap R = 0.$$

Pour des $x \in R$, $y \in Q$ quelconques, posons

$$\delta(y)\, x = [y, x].$$

Une vérification immédiate montre que l'algèbre de Lie L est isomorphe à l'algèbre de Lie $R \underset{\delta}{\times} Q$. D'après la première partie de la

démonstration concernant l'algèbre de Lie résoluble R et l'algèbre de Lie semi-simple Q, il existe des groupes de Lie simplement connexes S et T dont les algèbres de Lie sont isomorphes aux algèbres de Lie R et Q respectivement. En appliquant à nouveau la proposition II de 3.2, nous voyons qu'il existe un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $R \underset{\delta}{\times} Q$, i.e. isomorphe à L.

§ 4. Quelques propriétés générales des groupes de Lie

4.1. Décompositions des groupes de Lie simplement connexes.

I. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe, L son algèbre de Lie, M un idéal de L et H un sous-groupe analytique de G correspondant à M. Alors H est un sous-groupe distingué fermé de G.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après V de 3.5, chapitre IX, il suffit de montrer que H est un sous-groupe fermé. Soit S un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est isomorphe à L/M (voir le théorème ci-dessus). L'application canonique ρ de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie L/M est un homomorphisme; puisque le groupe G est simplement connexe, il existe un homomorphisme analytique π du groupe de Lie G dans S tel que $d\pi = \rho$ (voir II de 1.4). En vertu de IV, de 3.3, chapitre IX, l'homomorphisme π est une application de G sur le groupe S. Etant donné que le groupe H est une composante de l'unité dans le noyau de l'homomorphisme π il est fermé.

II. *Soient T un groupe de Lie simplement connexe, et S l'algèbre de Lie du groupe T. Soit L un idéal de S et M une sous-algèbre de Lie de L tels que*

$$L + M = S, \quad L \cap M = (0). \tag{4.1.1}$$

Soient G, H les sous-groupes analytiques du groupe T correspondant aux sous-algèbres de Lie L et M dans S. Posons

$$\alpha_h(g) = hgh^{-1} \tag{4.1.2}$$

pour tous les $g \in G$, $h \in H$. Alors l'application

$$(g, h) \to gh \tag{4.1.3}$$

($g \in G$, $h \in H$) est un isomorphisme du groupe de Lie $G \underset{\alpha}{\times} H$ sur T. En particulier, les groupes G et H sont fermés et simplement connexes, et l'on a

$$GH = T, \quad G \cap H = \{e\}. \tag{4.1.4}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\delta(y)$, $y \in M$, un opérateur de L défini comme la restriction à L de l'opérateur ad y dans l'algèbre de Lie S. Alors on vérifie immédiatement que l'application ρ définie par la formule

$$\rho(x, y) = x + y, \tag{4.1.5}$$

est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $L \underset{\delta}{\times} M$ sur l'algèbre de Lie S. Soient G', H' des groupes de Lie simplement connexes dont les algèbres de Lie sont respectivement L et M (voir le théorème de 3.3), et soit $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ le produit semi-direct des groupes de Lie G' et H' dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'algèbre de Lie $L \underset{\delta}{\times} M$ (voir la proposition II de 3.2). Soit τ l'isomorphisme correspondant de l'algèbre de Lie du groupe $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ sur l'algèbre de Lie $L \underset{\delta}{\times} M$. Alors l'application $\rho \circ \tau$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie du groupe $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ sur l'algèbre de Lie du groupe T. Puisque les groupes T et $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ sont simplement connexes, il existe un isomorphisme analytique π du groupe de Lie $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ sur le groupe T tel que $d\pi = \rho \circ \tau$. On déduit facilement des définitions des applications ρ et τ que $\rho \circ \tau (L \times \{0\}) = L$, $\rho \circ \tau (\{0\} \times M) = M$, par conséquent, $\pi (G' \times \{e\}) = G$, $\pi (\{e\} \times H') = H$ d'où l'on tire immédiatement toutes les assertions de la proposition II.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition II.

III. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe, et L son algèbre de Lie. Soient J, I_1, . . ., I_r des sous-algèbres de Lie dans L telles que :*

1) L est la somme directe des espaces linéaires J, I_1, . . ., I_r;

2) si $Q_0 = J$, $Q_i = J + I_1 + \ldots + I_i$ pour $i \geqslant 1$, alors les Q_i sont des sous-algèbres de Lie de L et Q_i est un idéal de Q_{i+1}, $i = 1, \ldots, r - 1$. Soient T, S_1, . . ., S_r des sous-groupes analytiques du groupe G déterminés par les sous-algèbres de Lie J, I_1, . . ., I_r respectivement. Alors des groupes T, S_1, . . ., S_r sont fermés et simplement connexes, tandis que l'application

$$(t, s_1, \ldots, s_r) \rightarrow ts_1 \ldots s_r, \tag{4.1.6}$$

$t \in T$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, r$, est un isomorphisme analytique de la variété $T \times S_1 \times \ldots \times S_r$ sur G.

D é m o n s t r a t i o n. Pour $r = 1$ l'assertion s'obtient immédiatement de II. Supposons que $m \geqslant 2$; admettons que III est déjà démontré pour tous les $r = 1, \ldots, m - 1$. Soit H_{m-1} le sous-groupe analytique de G défini par la sous-algèbre de Lie Q_{m-1}. Conformément à II, le sous-groupe H_{m-1} et le sous-groupe S_m sont fermés et simplement connexes dans G, et l'application $(h, s_m) \rightarrow hs_m$ est un isomorphisme analytique de la variété $H_{m-1} \times S_m$ sur G. En appliquant à H_{m-1} l'hypothèse de récurrence, nous obtenons la proposition III.

L'application des propositions II et III est basée sur la proposition auxiliaire suivante.

IV. *Soient L une algèbre de Lie, et I un idéal maximal de L (i.e. chaque idéal propre $J \subset L$ contenant I coïncide avec I). Il existe alors une sous-algèbre de Lie $M \subset L$ telle que*

$$I + M = L, \quad I \cap M = (0). \tag{4.1.7}$$

Démonstration. Puisque l'algèbre de Lie L/I ne possède pas d'idéaux non triviaux, alors L/I est soit simple, soit dim $(L/I) = 1$. Si dim $(L/I) = 1$, on peut prendre pour M le sous-espace unidimensionnel de L engendré par un élément $x \in L$ non situé dans M. Si L/I est une algèbre de Lie simple, alors L/I est semi-simple, et dans ce cas l'assertion IV découle du théorème de Levi-Maltsev (§ 15, chapitre X).

V. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe, et H un sous-groupe analytique de G qui est en même temps un sous-groupe distingué de G. Alors H est un sous-groupe distingué fermé, les groupes H et G/H sont simplement connexes, et si $\pi: G \to G/H$ est l'homomorphisme canonique analytique du groupe G sur G/H, alors il existe une application analytique $\rho: G/H \to G$ telle que l'application $\pi \circ \rho$ est l'identité de G/H sur lui-même.*

Démonstration. Soient L l'algèbre de Lie du groupe G, et I l'idéal de L qui correspond au sous-groupe analytique H. Servons-nous de la série de Jordan-Hölder pour l'algèbre de Lie L/I (voir 1.5, chapitre X) pour constater qu'il existe une suite de sous-algèbres de Lie $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_r = I$ telle que L_i est un idéal maximal de L_{i-1} pour tous les $i = 1, \ldots, r$, et toutes les sous-algèbres L_i contiennent I. Posons $M_i = L_{r-i}$. Conformément à IV, il existe des sous-algèbres de Lie I_i, $i = 1, \ldots, r$, telles que $M_i = M_{i-1} + I_i$, $I_i \cap M_{i-1} = (0)$, $i = 1, \ldots, r$. Soit S_i des sous-groupes analytiques de G correspondant à I_i, $i = 1, \ldots, r$. D'après III, le sous-groupe analytique H est fermé et simplement connexe, tandis que l'application $(s_1, \ldots, s_r) \to Hs_1 \ldots s_r$ est un isomorphisme analytique de la variété $S_1 \times \ldots \times S_r$ sur le groupe G/H. Puisque les S_i sont simplement connexes, G/H l'est aussi. Enfin, l'application ρ peut être définie par la formule $\rho(Hs_1 \ldots s_r) = s_1 \ldots s_r$.

4.2. Commutateurs dans les groupes de Lie connexes. Soit G un groupe, et $g_1, g_2 \in G$. Posons

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}. \tag{4.2.1}$$

Si H_1, H_2 sont des sous-groupes du groupe G, nous désignerons par $[H_1, H_2]$ le sous-groupe du groupe G engendré par les éléments $[h_1, h_2]$, où $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

I. *Le sous-groupe $[H_1, H_2]$ est l'ensemble de tous les éléments de la forme*

$$[a_1, b_1]\,[b_2, a_2]\,[a_3, b_3] \ldots [a_{2r-1}, b_{2r-1}]\,[b_{2r}, a_{2r}], \tag{4.2.2}$$

où

$$a_i \in H_1,\ b_i \in H_2,\ i = 1, \ldots, 2r,\ r \geqslant 1.$$

D é m o n s t r a t i o n. Chaque élément de la forme (4.2.2) est contenu dans $[H_1, H_2]$. En effet, il suffit de vérifier que $[b, a] \in$ $\in [H_1, H_2]$ pour $a \in H_1$, $b \in H_2$, mais

$$[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = [a, b]^{-1}, \qquad (4.2.3)$$

où $[a, b] \in [H_1, H_2]$. Par conséquent, pour démontrer la proposition I, il suffit de montrer que l'ensemble des éléments de la forme (4.2.2) est un sous-groupe de G. Mais le produit de deux éléments de la forme (4.2.2) est également de la forme (4.2.2), tandis que d'après (4.2.3), un élément inverse d'un élément de la forme (4.2.2) est également de cette forme.

II. *Soient H_1, H_2 des sous-groupes connexes d'un groupe topologique connexe G; alors le groupe $[H_1, H_2]$ est connexe* *).

D é m o n s t r a t i o n. D'après (4.2.2) $[H_1, H_2]$ est la réunion des ensembles $[H_1, H_2]_r = \{[a_1, b_1][b_2, a_2][a_3, b_3] \ldots$ $\ldots [b_{2r}, a_{2r}]$, où $a_i \in H_1$, $b_i \in H_2$, $i = 1, \ldots, 2r\}$ pour tous les $r \geqslant 1$. Mais l'ensemble $[H_1, H_2]_r$ est l'image du produit direct de $2r$ copies du groupe $H_1 \times H_2$ par l'application continue $((a_1, b_1), \ldots$ $\ldots, (a_{2r}, b_{2r})) \to [a_1, b_1][b_2, a_2] \ldots [b_{2r}, a_{2r}]$. Par conséquent, $[H_1, H_2]_r$ est un ensemble connexe. Etant donné que $[H_1, H_2] =$ $= \bigcup_{r=1}^{\infty} [H_1, H_2]_r$ et les ensembles $[H_1, H_2]_r$ sont connexes et contiennent e, $[H_1, H_2]$ est un groupe connexe.

Soient L une algèbre de Lie et M_1, M_2 ses sous-algèbres de Lie. Désignons par $[M_1, M_2]$ l'enveloppe linéaire des éléments de la forme $[x, y]$, $x \in M_1$, $y \in M_2$.

III. *Soient G un groupe de Lie connexe, et L l'algèbre de Lie du groupe G. Soient M_1, M_2, N des sous-algèbres de Lie de L. Supposons que $[M_1, N] \subset N$, $[M_2, N] \subset N$ et $[M_1, M_2] = N$. Admettons que H_1, H_2, K sont les sous-groupes analytiques de G correspondant aux sous-algèbres de Lie M_1, M_2, N. Alors $K = [H_1, H_2]$.*

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons d'abord que IV de 3.5, chapitre IX, implique

$$h_1Kh_1^{-1} \subset K \text{ et } h_2Kh_2^{-1} \subset K \text{ pour tous les } h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2. \qquad (4.2.4)$$

Montrons maintenant que pour des $y \in M_2$ et $h_1 \in H_1$ quelconques le vecteur Ad $(h_1)\, y - y$ appartient à N. D'après la relation (3.4.25) du chapitre IX appliquée à la représentation adjointe, on a,

*) Un résultat analogue a été obtenu au chapitre V (voir II de 2.3).

pour tous les $x \in M_1$, $y \in M_2$ et tous les $t \in \mathbf{R}$, l'égalité

$$\operatorname{Ad}(\exp(tx))(y) - y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad} x)^n (y). \tag{4.2.5}$$

Puisque $(\operatorname{ad} x)^n (y) \in N$ pour $n \geqslant 1$, on a d'après (4.2.5) que $\operatorname{Ad}(\exp(tx))(y) - y \in N$. D'autre part, il est évident que l'ensemble F des éléments $h_1 \in H_1$ tels que $\operatorname{Ad}(h_1)\, y - y \in N$ pour tous les $y \in M_2$ est un sous-groupe de H_1. En effet, si $h_1, h_2 \in F$, alors en appliquant (4.2.4) nous voyons que $\operatorname{Ad}(h_1 h_2)\, y - y = \operatorname{Ad} h_1 ((\operatorname{Ad} h_2)\, y - y) + ((\operatorname{Ad} h_1)\, y - y) \in N$ et encore $\operatorname{Ad}(h_1^{-1})\, y - y = \operatorname{Ad}(h_1^{-1})(y - \operatorname{Ad}(h_1)\, y) \in N$, de sorte que $h_1 h_2 \in F$ et $h_1^{-1} \in F$. Mais le sous-groupe F contient tous les éléments de la forme $\exp(tx)$, $x \in M_1$, i.e. contient un voisinage de l'unité. Puisque H_1 est un groupe connexe, on a $F = H_1$, i.e. $\operatorname{Ad}(h_1)\, y - y \in N$ pour tous les $h_1 \in H_1$.

Montrons que les éléments de la forme $\operatorname{Ad}(h_1)\, y - y$, $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$ engendrent toute l'algèbre de Lie N. Soit λ une fonctionnelle linéaire sur N; il suffit de montrer que la condition $\lambda(\operatorname{Ad}(h_1)\, y - y) = 0$ implique $\lambda = 0$ pour tous les $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$. Mais (4.2.5) entraîne

$$\frac{d}{dt} \lambda(\operatorname{Ad}(\exp(tx))\, y - y)|_{t=0} = \lambda([x, y]), \tag{4.2.6}$$

donc la condition $\lambda(\operatorname{Ad}(h_1)\, y - y) = 0$ pour tous les $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$ implique $\lambda([x, y]) = 0$ pour tous les $x \in M_1$, $y \in M_2$. Par hypothèse, $[M_1, M_2] = N$, de sorte que $\lambda(N) = 0$, $\lambda = 0$.

Montrons que $[H_1, H_2] \subset K$. Soit W le voisinage symétrique de l'élément nul de L, défini dans (1.3.5). Alors, pour $x, y \in W$, la série dans le deuxième membre de la formule de Campbell-Hausdorff converge et détermine une fonction $F(x, y)$ qui vérifie la relation

$$\exp x \exp y = \exp F(x, y) \tag{4.2.7}$$

pour tous les $x, y \in W$. Soit $V \subset W$ un voisinage symétrique de l'élément nul de L tel que $\operatorname{Ad}(\exp x)(y) \in W$ pour $x, y \in V$. En particulier, pour $x \in M_1 \cap V$, $y \in M_2 \cap V$, on a $\operatorname{Ad}(\exp x)(y) \in W$, de sorte que (4.2.7) entraîne

$$\begin{aligned}[\exp x, \exp y] &= \exp x \exp y (\exp x)^{-1} (\exp y)^{-1} = \\ &= (\operatorname{Ad}(\exp x) \exp y)(\exp(-y)) = \exp(\operatorname{Ad}(\exp x)\, y) \exp(-y) = \\ &= \exp F(\operatorname{Ad}(\exp x)\, y, -y). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Posons $x' = \operatorname{Ad}(\exp x)\, y$, $y' = -y$. Servons-nous des formules (1.2.17), (1.2.18) concernant les coefficients $c_n(x, y)$. Puisque $\operatorname{Ad}(\exp x)\, y - y \in N$, on a $c_1(x', y') = x' + y' = \operatorname{Ad}(\exp x)\, y - y \in N$.

Montrons par récurrence que $c_n(x', y') \in N$ pour tous les n. Soit $c_m(x', y') \in N$ pour $m = 1, \ldots, n$. Etant donné que $x' + y' \in N$, $y' \in M_2$, on tire de la condition $c_n(x', y') \in N$ que

$$[x' - y', c_n(x', y')] = [x' + y', c_n(x', y')] - \\ - 2[y', c_n(x', y')] \in N,$$

puisque $[M_2, N] \subset N$. Alors on obtient de la relation (1.2.17) que $c_{n+1}(x', y') \in N$ de sorte que $c_n(x', y') \in N$ pour tous les n entiers positifs. La relation (4.2.8) permet d'écrire $[\exp x, \exp y] \in \exp N \subset \subset K$. Par conséquent, on peut indiquer des voisinages U_1, U_2 des éléments neutres des groupes H_1 et H_2 respectivement tels que $[h_1, h_2] \in K$ pour $h_1 \in U_1$, $h_2 \in U_2$. Remarquons maintenant que pour tous les $h_1 \in H_1$, $h_2', h_2'' \in H_2$ on a

$$[h_1, h_2'h_2''] = [h_1, h_2'](h_2'[h_1, h_2'']h_2'^{-1}). \tag{4.2.9}$$

On tire de la relation (4.2.9) et de l'inclusion $h_2'Kh_2'^{-1} \subset K$ que $[h_1, h_2] \in K$ pour tous les $h_1 \in U_1$, $h_2 \in U_2^n$ où n est un entier positif. Le groupe H_2 étant connexe, on a $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} U_2^n = H_2$, i.e. $[h_1, h_2) \in K$ pour tous les $h_1 \in U_1$, $h_2 \in H_2$. De même, en inversant les rôles de h_1 et h_2 on obtient $[H_1, H_2] \subset K$.

Montrons enfin que le groupe $[H_1, H_2]$ contient un voisinage de l'élément neutre de K. Choisissons des éléments $y_1, \ldots, y_m \in M_2$ et $h_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(m)} \in H_1$ de manière à ce que les vecteurs $\mathrm{Ad}\,(h_1^{(k)})y_k - - y_k$, $k = 1, \ldots, m$, engendrent l'espace N. Considérons l'application analytique ψ du produit direct de m copies de la variété $H_1 \times \times H_2$ dans G, en la définissant par la formule

$$\psi((h_1^{(1)}, h_2^{(1)}), \ldots, (h_1^{(m)}, h_2^{(m)})) = [h_1^{(1)}, h_2^{(1)}] \ldots [h_1^{(m)}, h_2^{(m)}].$$

Il découle de II que l'image par ψ est contenue dans $[H_1, H_2]$. D'après la relation $[H_1, H_2] \subset K$, l'image par l'application ψ est contenue dans K, tandis que ψ est une application analytique du produit de m copies de la variété $H_1 \times H_2$ dans K. Remarquons que $\psi((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(m)}, e)) = e$; d'après VIII de 1.5, chapitre IX, pour démontrer que l'image par ψ contient un voisinage de l'élément neutre, il suffit de montrer qu'au point $z = ((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(m)}, e))$ $d\psi$ est une application sur l'espace tangent $\widetilde{T}_e(K)$. Or, en appliquant (3.4.25), chapitre IX à $\pi = \alpha_{h_1^{(k)}}$ pour chaque $k = 1, \ldots, m$, nous avons

$$\frac{d}{dt}\psi((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(k)}, \exp(ty_k)), \ldots, (h_1^{(m)}. e))|_{t=0} = \\ = \frac{d}{dt}(\exp(t\,\mathrm{Ad}\,(h_1^{(k)})\,y_k)\exp(-ty_k))|_{t=0} = \mathrm{Ad}\,(h_1^{(k)})\,y_k - y_k.$$

Par conséquent, l'image par l'application $(d\psi)(z)$ contient tous les vecteurs ad $(h_1^{(k)})\, y_k - y_k$, de sorte que $(d\psi)(z)$ est une application sur $\widetilde{T}_e(K)$.

IV. *Soient G un groupe de Lie connexe, et L son algèbre de Lie. Soient* $G^{(1)} = [G, G]$, $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$, $G_{(1)} = [G, G]$, $G_{(n)} = [G, G_{(n-1)}]$ $(n > 1)$. *Pour chaque* $n \geqslant 1$ *le groupe* $G^{(n)}$ *(respectivement* $G_{(n)}$*) est un sous-groupe analytique du groupe de Lie G associé à la sous-algèbre de Lie* $L^{(n)}$ *(respectivement* $L_{(n)}$*). Tous les groupes* $G^{(n)}$, $G_{(n)}$ *sont des sous-groupes distingués de G. Si le groupe G est simplement connexe, alors tous les groupes* $G^{(n)}$, $G_{(n)}$ *sont fermés et simplement connexes.*

La proposition s'obtient immédiatement de III et V de 4.1.

V. *Un groupe de Lie connexe est résoluble (respectivement nilpotent) si et seulement si son algèbre de Lie est résoluble (respectivement nilpotente).*

La proposition découle immédiatement de IV.

VI. *Si G est un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est semi-simple, alors* $G = [G, G]$.

La proposition s'obtient de III et IV de 7.1, chapitre X.

4.3. Structure des groupes de Lie résolubles.

I. *Soit L une algèbre de Lie résoluble de dimension n. Il existe une base* $e_1 \ldots e_n$ *de L qui possède les propriétés suivantes*: 1) *l'enveloppe linéaire* L_k *des éléments* $e_1, \ldots, e_n$ *est une sous-algèbre de Lie de L*; 2) L_k *est un idéal de* L_{k+1} *pour tous les* $k = 1, \ldots, n-1$, *où* $L_n = L$.

D é m o n s t r a t i o n. Puisque L est résoluble, on a $[L, L] \neq L$. Soit L_{n-1} un sous-espace de codimension 1 dans L qui contient $[L, L]$. Alors $[L, L_{n-1}] \subset [L, L] \subset L_{n-1}$, donc L_{n-1} est un idéal de L; en particulier, L_{n-1} est une sous-algèbre de Lie de L.

Supposons déjà construites des sous-algèbres de Lie L_{n-1}, $L_{n-2}, \ldots, L_{k+1}$ dans L telles que L_m est un idéal de L_{m+1} pour $m = k+1, \ldots, n-1$ $(L_n = L)$. D'après III de 1.6, chapitre X, la sous-algèbre de Lie L_{k+1} est résoluble. Soit L_k un sous-espace de codimension 1 dans L_{k+1} contenant $[L_{k+1}, L_{k+1}]$; alors L_k est un idéal de L_{k+1}, et L_k est une sous-algèbre de Lie de L; ainsi on peut construire les sous-algèbres L_k par récurrence. Soit e_1 un vecteur non nul de L_1. Supposons déjà construits les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ de la sorte que l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_j$ coïncide avec L_j pour tous les $j = 1, \ldots, k$. Soit e_{k+1} un vecteur arbitraire de L_{k+1} non situé dans L_k; ainsi la base $e_1, \ldots, e_n$ se construit par récurrence.

II. *Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe) résoluble simplement connexe, L son algèbre de Lie, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de L qui vérifie les conditions de la proposition* I. *Alors l'application φ de l'espace* $\mathbf{R}^n$ *(respectivement* $\mathbf{C}^n$*) dans G, définie par la formule*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \exp(t_1 e_1) \ldots \exp(t_n e_n), \qquad (4.3.1)$$

est un isomorphisme analytique de la variété $\mathbf{R}^n$ *(respectivement* $\mathbf{C}^n$*) sur G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit M_k la sous-algèbre unidimensionnelle de Lie de L engendrée par le vecteur e_k, et soit H_k le sous-groupe analytique du groupe G qui correspond à M_k. En appliquant III de 4.1 (avec $I_k = M_k$, $J = (0)$) nous trouvons que les H_k sont des sous-groupes fermés simplement connexes de G, tandis que l'application $(h_1, \ldots, h_n) \to h_1 \ldots h_n$ est un isomorphisme analytique de la variété $H_1 \times \ldots \times H_n$ sur G. D'autre part, puisque les sous-groupes H_k sont unidimensionnels et simplement connexes, l'application $t \to \exp(te_k)$ est un isomorphisme analytique du groupe $\mathbf{R}$ (respectivement $\mathbf{C}$) sur H_k.

III. *Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe. Chaque sous-groupe analytique H du groupe G est fermé* et *simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient L l'algèbre de Lie du groupe G, et M la sous-algèbre de Lie de G correspondant au sous-groupe H. Choisissons dans L une base $e_1, \ldots, e_n$ qui vérifie des conditions de la proposition I. Soit $\dim M = m$. Choisissons des indices $k_1, \ldots, k_m$ $(1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n)$ qui vérifient les conditions suivantes: si $d_j = \dim(M \cap L_j)$, $j = 1, \ldots, n$ alors $d_j = 0$ pour $j < k_1$, $d_j = i$ pour $k_i \leqslant j < k_{i+1}$; $d_j = m$ pour $j \geqslant k_m$. Soit $f_1, \ldots, f_m$ une base de M telle que l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_i$ coïncide avec $M \cap L_{k_i}$ pour tous les $i = 1, \ldots, m$. Remplaçons dans la base $e_1, \ldots, e_m$ les vecteurs e_{k_i} par f_i pour $i = 1, \ldots, m$; les sous-espaces L_k n'en seront pas changés. Par conséquent, nous admettrons par la suite que $e_{k_i} = f_i$ pour tous les $i = 1, \ldots, m$. Soit M_i l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_i$; alors $M_i = L_{k_i} \cap M$ pour tous les $i = 1, \ldots, m$. Donc, les M_i sont des sous-algèbres de Lie de M. Pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $k_i \leqslant k < k_{i+1}$ on a $L_k \cap M = L_{k_i} \cap M$ et alors

$$[M_{i+1}, M_i] = [L_{k_{i+1}} \cap M, L_{k_{i+1}-1} \cap M] \subset$$
$$\subset [L_{k_{i+1}}, L_{k_{i+1}-1}] \cap M \subseteq L_{k_{i+1}-1} \cap M = M_i. \qquad (4.3.2)$$

La relation (4.3.2) nous montre que M_i est un idéal de M_{i+1}.

Soit $\tilde{H}$ un groupe de Lie simplement connexe qui est le revêtement universel pour le groupe H relativement à l'homomorphisme

π (voir 3.2, chapitre VIII). L'algèbre de Lie M peut être envisagée en même temps comme l'algèbre de Lie du groupe $\widetilde{H}$, puisque l'application $d\pi$ est un isomorphisme des algèbres de Lie des groupes $\widetilde{H}$ et H (voir VII de 3.3, chapitre IX). Les propriétés de la base $f_1, \ldots, f_m$ de l'algèbre de Lie M que nous avons établies permettent d'appliquer la proposition II au groupe H. Par conséquent, l'application $(u_1, \ldots, u_m) \to \exp_{\widetilde{H}}(u_1 f_1) \ldots \exp_{\widetilde{H}}(u_m f_m)$ est un isomorphisme analytique de l'espace vectoriel de dimension m sur $\widetilde{H}$. Puisque $\pi(\widetilde{H}) = H$, l'application

$$(u_1, \ldots, u_m) \to \exp(u_1 f_1) \ldots \exp(u_m f_m) \qquad (4.3.3)$$

est une application analytique de l'espace vectoriel de dimension m sur le groupe H. Mais, d'autre part, l'application (4.3.3) est la restriction de l'application φ, définie par (4.3.1), à l'ensemble de tous les points $(t_1, \ldots, t_m)$ pour lesquels $t_k = 0$ si $k \neq k_1, \ldots, k \neq k_m$. Comme φ est un isomorphisme analytique d'après II, l'image d'un sous-espace linéaire est fermée et simplement connexe, d'où l'on tire que H est fermé et simplement connexe.

4.4. Algèbres de Lie semi-simples. Théorème de Levi-Maltsev.

I. *Soient G un groupe de Lie, L son algèbre de Lie, R un radical de l'algèbre de Lie L, et H un sous-groupe analytique du groupe G correspondant à la sous-algèbre de Lie $R \subset L$. Alors H est un sous-groupe distingué fermé connexe et résoluble de G.*

Démonstration. D'après V de 4.2, il suffit de montrer que H est fermé. Soit $\overline{H}$ l'adhérence de H dans G. Alors $\overline{H}$ est un sous-groupe fermé connexe de G, i.e. $\overline{H}$ est un sous-groupe de Lie connexe de G (voir le théorème de Cartan, § 2). Soit M la sous-algèbre de Lie de L correspondant à $\overline{H}$. Montrons que $\overline{H} = H$. Il suffit de montrer que $M \subset R$. Puisque R est un radical de L, il suffit pour cela de montrer que M est une algèbre de Lie résoluble. D'après V de 4.2, il suffit alors de prouver que le groupe $\overline{H}$ est résoluble. Mais il découle de la proposition I de 4.2 que le sous-groupe $[\overline{H}_1, \overline{H}_2]$ est contenu dans l'adhérence du groupe $[H_1, H_2]$, quels que soient les sous-groupes $H_1, H_2 \subset G$. Soit n le plus petit entier positif pour lequel $H^{(n)} = \{e\}$. Lorsque $n = 1$, on a $[\overline{H}, \overline{H}] \subset \overline{[H, H]} = \overline{H^{(1)}} = \{\overline{e}\} = \{e\}$, i.e. $\overline{H}$ est résoluble. Supposons que $n > 1$. Admettons que la résolubilité du groupe $\overline{H}$ a déjà été démontrée pour tous les sous-groupes H pour lesquels on a $H^{(n-1)} = \{e\}$. Alors $[H, H] \subset \overline{[H, H]} = \overline{H^{(1)}}$, où $(H^{(1)})^{n-1} = \{e\}$, donc $\overline{H^{(1)}}$ est un groupe résoluble en vertu de l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, $(\overline{H})^{(1)}$ est un groupe résoluble, donc $\overline{H}$ est également un groupe

résoluble. D'après ce qui précède, il en découle que $\overline{H} = H$. Puisque R est un idéal de L, H sera un sous-groupe distingué de G (voir V de 3.5, chapitre IX).

Rappelons qu'un groupe topologique G est dit *semi-simple* s'il ne contient aucun sous-groupe distingué résoluble fermé connexe, différent de $\{e\}$.

II. *Un groupe de Lie est semi-simple si et seulement si son algèbre de Lie est semi-simple.*

Démonstration. Soient G un groupe de Lie semi-simple, L son algèbre de Lie, et R un radical de l'algèbre de Lie L. Si H est le sous-groupe analytique de G correspondant à R, alors H est un sous-groupe distingué résoluble connexe fermé de G. Si $R \neq (0)$, on a $H \neq \{e\}$, ce qui est en contradiction avec la semi-simplicité de G. Par conséquent, $R = (0)$ et L est semi-simple.

Réciproquement, supposons que L est une algèbre de Lie semi-simple et N un sous-groupe distingué résoluble connexe fermé de G. Soit M l'idéal de L correspondant à N. Si $N \neq \{e\}$, on a $M \neq (0)$ et M est résoluble d'après V de 4.2, ce qui est en contradiction avec la semi-simplicité de L; par conséquent, $N = \{e\}$ et G est semi-simple.

III. (Théorème de Levi-Maltsev). *Soient G un groupe de Lie, L son algèbre de Lie, R le radical de l'algèbre de Lie L, et S une sous-algèbre de Lie semi-simple de L telle que $L = S \dot{+} R$* (voir III, § 15, chapitre X). *Soit H un sous-groupe analytique de G correspondant à R. Alors:* a) *H est un sous-groupe distingué résoluble connexe fermé de G, et le groupe quotient G/H est un groupe de Lie semi-simple dont l'algèbre de Lie est isomorphe à S*; b) *si G est simplement connexe et T est un sous-groupe analytique de G correspondant à S, alors T est un sous-groupe semi-simple fermé simplement connexe, H est simplement connexe, tandis que l'application $(t, h) \to th$, $t \in T$, $h \in H$, est un isomorphisme analytique de la variété $T \times H$ sur G.*

Démonstration. a) découle de II, I et IV, VIII, de 3.3, chapitre IX; b) découle de II de 4.1.

IV. *Le centre d'un groupe de Lie semi-simple est discret.*

Démonstration. Soient G un groupe de Lie semi-simple, et L son algèbre de Lie. Puisque L est une algèbre de Lie semi-simple (voir II), le centre de l'algèbre de Lie L est nul; par conséquent, le noyau de l'homomorphisme adjoint de l'algèbre de Lie L se réduit à l'élément nul de l'algèbre de Lie L. Par conséquent, l'application $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$, est un isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie ad (L) du groupe de Lie Ad (G). Mais il découle alors de (3.4.25), chapitre IX, que la représentation adjointe du

groupe de Lie G est un isomorphisme local. Remarquant que le noyau de la représentation adjointe du groupe G est le centre Z du groupe G et l'application canonique du groupe G sur Ad $(G) \approx$ $\approx G/Z$ est localement isomorphe, on conclut que Z est un sous-groupe discret de G.

V. *Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple, et L son algèbre de Lie. Le groupe adjoint au groupe de Lie G est un sous-groupe fermé du groupe G_L.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit Ad: $G \to G_L$ la représentation adjointe du groupe de Lie G. Soit Aut (L) l'ensemble de tous les éléments $h \in G_L$ tels que $\alpha_h(y) = h(y)$, $y \in L$, où α_h est un automorphisme de l'algèbre de Lie L. D'après 3.5, chapitre IX, tout élément du groupe G_L qui se met sous la forme Ad g, $g \in G$, est contenu dans Aut (L). Il est évident que Aut (L) est un sous-groupe fermé du groupe de Lie G_L. L'algèbre de Lie du groupe Aut (L) est constituée (§ 2 et III de 3.5, chapitre IX) par tous les opérateurs linéaires X de l'espace L qui vérifient la condition exp $(tX) \in$ Aut (L) pour tous les $t \in \mathbf{R}$. Mais cette condition est équivalente à la condition $X \in$ Der (L) (voir la démonstration de la proposition VI, § 3, chapitre X, et l'exemple du § 2). D'autre part, l'algèbre de Lie du groupe adjoint Ad G coïncide avec l'image de l'algèbre de Lie L du groupe G par l'homomorphisme adjoint ad (voir IV de 3.3, chapitre IX); or ad L est l'idéal des dérivations intérieures de l'algèbre de Lie L (voir I de 1.1, chapitre X), et chaque dérivation d'une algèbre de Lie semi-simple est intérieure, par conséquent l'algèbre de Lie Der (L) coïncide avec son idéal des dérivations intérieures. Ainsi l'algèbre de Lie du groupe Ad G coïncide avec l'algèbre de Lie du sous-groupe fermé Aut (L) du groupe de Lie G_L, le groupe Ad G étant connexe en tant qu'image du groupe connexe G. D'où l'on tire que le groupe Ad G coïncide avec la composante connexe de l'élément neutre du groupe Aut (L). Vu que la composante de l'élément neutre est un sous-groupe fermé dans un groupe topologique (voir III de 1.2, chapitre V), Ad G est fermé dans Aut (L) et, le groupe Aut (L) étant fermé dans G_L, on en tire que Ad G est fermé dans G_L.

§ 5. Décomposition de Gauss

5.1. Décomposition de Gauss dans un groupe de Lie linéaire complexe semi-simple. Soit G un sous-groupe analytique du groupe $GL(n, \mathbf{C})$, et soit L l'algèbre de Lie du groupe G; supposons que la sous-algèbre de Lie $H \subset L$, constituée par les matrices diagonales de L, est une sous-algèbre de Cartan de L. Désignons par N_+, N_- les sous-algèbres de Lie nilpotentes de L constituées respectivement par les matrices nilpotentes triangulaires supérieures et inférieures.

Supposons que

$$L = N_- \dot{+} H \dot{+} N_+. \tag{5.1.1}$$

Soit D_0 le sous-groupe analytique de G dont l'algèbre de Lie est H, et soient Z_+, Z_- les sous-groupes analytiques de G correspondant aux sous-algèbres de Lie N_+, N_- (voir I et II de 3.3, chapitre IX).

Considérons l'application φ du produit $Z_- \times D_0 \times Z_+$ dans le groupe G, définie par la formule

$$\varphi(z_-, d, z_+) = z_- d z_+ \tag{5.1.2}$$

pour tous les $z_- \in Z_-$, $d \in D_0$, $z_+ \in Z_+$. Il est évident que l'application φ est une application analytique de variétés.

I. *L'application* φ *envoie un certain voisinage du point* $(e, e, e) \in \in Z_- \times D_0 \times Z_+$ *topologiquement sur un certain voisinage* U *de l'élément neutre de* G.

Démonstration. Il découle de (3.5.15), chapitre IX, et de (5.1.2), (5.1.1) que la différentielle de l'application φ au point (e, e, e) est une application *surjective* sur l'espace tangent $T_G(e)$; d'autre part, $\dim(Z_- \times D_0 \times Z_+) = \dim G$, par conséquent, l'application $d\varphi_{(e, e, e)}$ est un isomorphisme des espaces tangents (en particulier, l'application φ est régulière au point (e, e, e)). Alors l'assertion de la proposition I découle de VIII, 1.5, chapitre IX.

Soit $D(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales du groupe $GL(n, \mathbf{C})$; soient $Z_+(n)$, $Z_-(n)$ les sous-groupes des matrices triangulaires supérieures et inférieures de $GL(n, \mathbf{C})$ respectivement avec les unités dans la diagonale principale. Alors $Z_+ \subset Z_+(n)$, $Z_- \subset Z_-(n)$, $D_0 \subset D(n)$. Soit $D = D(n) \cap G$; il est évident que l'algèbre de Lie du groupe D est H.

II. *Les groupes* Z_+ *et* Z_- *sont simplement connexes, et* $Z_+ = Z_+(n) \cap \cap G$, $Z_- = Z_-(n) \cap G$.

Démonstration. Les algèbres de Lie des groupes Z_+ et $Z_+(n) \cap G$ coïncident; par conséquent, d'après III de 4.3, il suffit de montrer que le groupe $Z_+(n)$ est simplement connexe. Soit $z_+ \in Z_+(n)$; alors $z_+ = 1 + w$, où 1 est la matrice unité et w une matrice nilpotente. Il est clair que la matrice z_+ se met de manière unique sous la forme $\exp(x)$, où x est une matrice nilpotente supérieure. Ainsi l'application exponentielle de l'algèbre de Lie $N_+(n)$ du groupe $Z_+(n)$ dans le groupe $Z_+(n)$ est une bijection sur le groupe $N_+(n)$. Par conséquent, $Z_+(n)$, est homéomorphe à $N_+(n)$, mais $N_+(n)$ est simplement connexe en tant qu'espace linéaire (voir chapitre IX, II de 3.6 et VIII de 1.5).

Soit $G_{\text{rég}}$ l'ensemble des éléments $g \in G$ qui admettent une décomposition de Gauss dans le groupe $GL(n, \mathbf{C})$, i.e.

$$g = z_- dz_+, \tag{5 1 3}$$

où $z_- \in Z_-(n)$, $z_+ \in Z_+(n)$, $d \in D(n)$.

III. *L'ensemble* $G_{\text{rég}}$ *est connexe, ouvert et partout dense dans* G.

D é m o n s t r a t i o n. La matrice $g \in G$ est contenue dans $G_{\text{rég}}$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls, i.e. $g \in G \setminus G_{\text{rég}}$ si et seulement si

$$\Delta_k(g) = 0$$

pour au moins un des indices k, $k = 1, \ldots, n - 1$. Mais la fonction $\Delta_k(g)$ est un polynôme relativement aux éléments matriciaux, i.e. $\Delta_k(g)$ est une fonction analytique sur le groupe G. Si $\Delta_k(g)$ s'annule sur un certain ensemble ouvert de G, alors $\Delta_k(g) \equiv 0$ sur G en vertu de la connexité de G. Mais $\Delta_k(e) \neq 0$, par conséquent, l'ensemble fermé des zéros de la fonction $\Delta_k(g)$ n'est dense nulle part dans G, tandis que $G \setminus G_{\text{rég}}$ est la réunion d'un nombre fini de tels ensembles.

Ainsi, l'ensemble $G_{\text{rég}}$ est le complémentaire dans G de l'ensemble F des zéros de la fonction analytique $f(g) = \Delta_1(g) \ldots \ldots \Delta_n(g)$ qui n'est pas identiquement nulle sur G. Rappelons que la variété G est connexe. Soient g_1, g_2 des éléments de $G_{\text{rég}}$ et supposons que $\{g(t)\}$, $t \in [0, 1]$, est une *courbe* dans G qui joint g_1 et g_2, i.e. $g(0) = g_1$, $g(1) = g_2$ et $t \to g(t)$ est une application continue du segment $[0, 1]$ dans G. Il découle de la définition même d'une variété que l'ensemble des points $g_2 \in G$ que l'on peut joindre par une courbe $\{g(t)\}$ au point donné $g_1 \in G$ est non vide, ouvert et fermé dans G. Puisque G est connexe, on peut joindre deux éléments quelconques g_1, $g_2 \in G$ par une courbe. Recouvrons chaque point de la courbe $\{g(t)\}$ par un voisinage de coordonnées connexe et choisissons un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots, U_p$. Dans chacun des voisinages de coordonnées U_k, $k = 1, \ldots, p$, l'ensemble des zéros de la fonction $f(g)$ est homéomorphe à l'ensemble des zéros d'une fonction analytique usuelle définie dans un sous-ensemble ouvert connexe de l'espace $\mathbf{C}^n$. Mais si $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction analytique non identiquement nulle sur un sous-ensemble ouvert connexe Ω de l'espace $\mathbf{C}^n$, le complémentaire dans Ω de l'ensemble N des zéros de la fonction Φ est connexe (voir R. G u n n i n g et H. R o s s i [1], chapitre I). Ainsi les points g_1 et g_2 sont contenus dans la réunion finie d'ensemble connexes $U_k \setminus F$, $k = 1, \ldots, p$; puisque $\bigcup_{k=1}^{p} U_k$ recouvre la courbe $\{g(t), t \in [0, 1]\}$, les ensembles U_k et U_{k+1} peuvent être supposés non disjoints pour tous les $k = 1, \ldots, p - 1$. Alors les ensembles $U_k \setminus F$, $U_{k+1} \setminus F$ se cou-

pent aussi pour $k = 1, \ldots, p - 1$ et puisque tous les ensembles $U_k \setminus F$, $k = 1, \ldots, p$ sont connexes, leur réunion est également connexe. Par conséquent, deux éléments quelconques g_1, g_2 de l'ensemble $G_{\text{rég}}$ sont contenus dans un sous-ensemble connexe $\bigcup_{k=1}^{p} (U_k \setminus F)$ de l'ensemble $G_{\text{rég}}$, donc $G_{\text{rég}}$ est connexe.

IV. *Pour chaque* $g \in G_{\text{rég}}$, *l'élément* $z_+ \in Z_+(n)$ *défini par l'égalité* (5.1.3) *appartient à* Z_+ *et l'application* $g \to Z_+$ *est analytique sur* $G_{\text{rég}}$.

Démonstration. Soit M l'ensemble des points $g \in G_{\text{rég}}$ tels que $z_+ \in Z_+$. Comme nous le savons, on a $U \subset M$ (voir I). Désignons par M_1 l'adhérence de l'intérieur de l'ensemble M. Puisque M contient un voisinage de l'élément neutre de G, l'ensemble M_1 est non vide. D'autre part, les éléments matriciaux de la matrice z_+ sont des fonctions rationnelles des éléments matriciaux de la matrice g, par conséquent l'application $g \to Z_+$ est analytique sur $G_{\text{rég}}$, en particulier z_+ est une fonction continue de g sur $G_{\text{rég}}$. Puisque Z_+ est fermé dans $GL(n, \mathbf{C})$ et Z_+ est une fonction continue de g, l'ensemble M est fermé. Par conséquent, $M_1 \subset M$. Montrons maintenant que l'ensemble M_1 est ouvert. Soit $g_0 \in M_1$ et soit V un voisinage de coordonnées du point g_0 (du groupe G) contenu dans $G_{\text{rég}}$ (un tel voisinage existe, puisque $G_{\text{rég}}$ est ouvert conformément à III). Choisissons un voisinage W du point g_0 dans $GL(n, \mathbf{C})$ et un système de coordonnées analytiques $(y_1, \ldots, y_{n^2})$ dans le voisinage W de manière à avoir $W \cap G \subset V$ et de sorte que la sous-variété $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ soit déterminée dans W par les conditions $y_{m+1} = \ldots = y_{n^2} = 0$, où $m = \dim G$ (voir 1.7, chapitre IX). L'application $g \to Z_+$ étant analytique, $y_k(z_+)$ est une fonction analytique sur $G_{\text{rég}}$. D'autre part, l'intersection $V \cap W \cap M_1$ contient un sous-ensemble ouvert (dans $G_{\text{rég}}$) sur lequel $z_+ \in G$, i.e. les fonctions $y_k(z_+)$ sont nulles sur $V \cap W \cap M_1$ lorsque $k = m + 1, \ldots, n^2$. Par conséquent, on a $y_k(z_+) = 0$ pour $k = m + 1, \ldots, n^2$ sur toute l'intersection $V \cap W$, i.e. $z_+ \in G$ pour $g \in V \cap W$. Ainsi l'ensemble M_1 est ouvert dans $G_{\text{rég}}$. Puisque $G_{\text{rég}}$ est connexe d'après III, on a $M_1 = G_{\text{rég}}$.

On démontre d'une manière analogue que l'élément z_- dans (5.1.3) est une fonction analytique de g, et $z_- \in Z_-$ pour tous les $g \in G_{\text{rég}}$. Par conséquent,

V. *Pour chaque* $g \in G_{\text{rég}}$, *l'élément* $d \in D(n)$ *déterminé par l'égalité* (5.1.3) *appartient à* $G_{\text{rég}}$, *i.e.* $d \in D$, *et l'application* $g \to d$ *est analytique.*

VI. *Le groupe* D *est connexe et coïncide avec le sous-groupe* D_0.

Démonstration. L'application ψ de la variété $Z_-(n) \times D(n) \times Z_+(n)$ dans le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ définie par la formule

$\psi(z_-, d, z_+) = z_- dz_+$ pour tous les $z_- \in Z_-(n)$, $d \in D(n)$, $z_+ \in Z_+(n)$ est une application analytique de variétés. En outre, l'application ψ est un homéomorphisme de la variété $M = Z_-(n) \times D(n) \times Z_+(n)$ sur l'image $\psi(M)$ de la variété M dans $GL(n, \mathbf{C})$. Alors la restriction de l'application ψ à $Z_- \times D \times Z_+$ est un homéomorphisme de $Z_- \times D \times Z_+$ sur $G_{\text{rég}}$. Puisque $G_{\text{rég}}$ est connexe, l'espace $Z_- \times D \times Z_+$ est connexe. Par conséquent, le groupe D est connexe, donc le groupe D coïncide avec le sous-groupe analytique D_0.

Ainsi nous avons démontré le

THÉORÈME. *Soit G un sous-groupe analytique du groupe $GL(n, \mathbf{C})$, soit L l'algèbre de Lie du groupe G. Supposons que la sous-algèbre de Lie $H \subset L$ constituée par les matrices diagonales de L est une sous-algèbre de Cartan de L. Soient N_+, N_- des sous-algèbres nilpotentes de L constituées respectivement par les matrices supérieures et inférieures triangulaires. Supposons que $L = N_+ \dot{+} H \dot{+} N_-$. Désignons par D, Z_+, Z_- les sous-groupes analytiques de G associés aux sous-algèbres de Lie H, N_+, N_- respectivement. Il existe alors dans le groupe G un ensemble ouvert connexe partout dense $G_{\text{rég}}$, tel que chaque élément $g \in G_{\text{rég}}$ se met de manière unique sous la forme*

$$g = z_- dz_+, \tag{5.1.4}$$

où $z_- \in Z_-$, $d \in D$, $z_+ \in Z_+$. Les éléments z_-, d, z_+ sont des fonctions analytiques de $g \in G_{\text{rég}}$. Les groupes Z_+ et Z_- sont simplement connexes, et $Z_+ = Z_+(n) \cap G$, $Z_- = Z_-(n) \cap G$, $D = D(n) \cap G$. L'ensemble $G_{\text{rég}}$ contient un voisinage de l'élément neutre de G.

La relation (5.1.4) s'appelle *décomposition de Gauss de l'élément $g \in G$.*

5.2. Décomposition de Gauss dans un groupe de Lie connexe semi-simple complexe. Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple complexe, L son algèbre de Lie, H une sous-algèbre de Cartan de L, et Δ le système des racines de l'algèbre de Lie L relativement à H. Soient H_0 l'enveloppe linéaire réelle du système de vecteurs h'_α, $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq 0$ (voir 9.2 et 9.6, chapitre X), et Δ_+ le système des racines positives de l'algèbre de Lie L relativement à un ordre lexicographique dans l'espace H_0. Posons

$$N_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} L^\alpha, \quad N_- = \sum_{\alpha \in -\Delta_+} L^\alpha, \tag{5.2.1}$$

où L^α sont les sous-espaces des racines de l'algèbre de Lie L (voir § 8, chapitre X). D'après I, § 12, chapitre X, les sous-espaces N_+ et N_- sont des algèbres de Lie nilpotentes, et

$$L = N_- \dot{+} H \dot{+} N_+. \tag{5.2.2}$$

I. *Dans l'algèbre de Lie L on peut choisir une base telle que les opérateurs* ad h, $h \in H$, *s'écrivent par des matrices diagonales, les opérateurs* ad x, $x \in N_+$ (*respectivement* ad x, $x \in N_-$) *par des matrices supérieures* (*respectivement inférieures*) *triangulaires, avec les zéros dans la diagonale principale.*

Démonstration. Soit $\{h_\alpha, e_\alpha\}$ une base de Weyl de l'algèbre de Lie L définie par la sous-algèbre de Cartan H. Soit $\dim H = r$. Disposons les éléments de la base de Weyl de la manière suivante:

$$\{e_\alpha,\ \alpha \in -\Delta_+;\ \ h_1, \ldots, h_r;\ \ e_\alpha,\ \ \alpha \in \Delta_+\} \qquad (5.2.3)$$

et supposons que l'ordre des vecteurs e_α a été choisi de manière à assurer que les vecteurs $h'_\alpha \in H_0$ soient disposés par ordre de croissance relativement à l'ordre lexicographique dans H_0. La relation $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$, α, $\beta \in \Delta$ (voir II, § 8, chapitre X) et les définitions (5.2.1) impliquent que relativement à la base (5.2.3) les opérateurs ad h, $h \in H$, ont la forme des matrices diagonales, tandis que les opérateurs ad x, $x \in N_+$ et ad x, $x \in N_-$, sont des matrices nilpotentes triangulaires supérieures et inférieures respectivement.

Soient $\tilde{G}$ le groupe adjoint du groupe G, $\tilde{L}$ l'algèbre de Lie du groupe $\tilde{G}$. Soient $\tilde{H}$, $\tilde{N}_+$, $\tilde{N}_-$ les images des sous-algèbres de Lie H, N_+, N_- par l'isomorphisme de l'algèbre de Lie L sur l'algèbre de Lie $\tilde{L}$ défini par l'homomorphisme adjoint $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$. En nous servant de la base (5.2.3), nous pouvons identifier le groupe $\tilde{G}$ avec un sous-groupe de Lie du groupe $GL(n, C)$ et l'algèbre de Lie $\tilde{L}$ avec une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $gl(n, C)$, où $n = \dim G = \dim L$. D'après la proposition I, on peut appliquer au groupe $\tilde{G}$ le théorème de 5.1. Soient Z_- et Z_+ des sous-groupes analytiques du groupe G, et N_- et N_+ leurs algèbres de Lie respectives. Soient $\tilde{D}$, $\tilde{Z}_+$, $\tilde{Z}_-$ les sous-groupes analytiques du groupe G associés aux sous-algèbres de Lie $\tilde{H}$, $\tilde{N}_+$, $\tilde{N}_-$ respectivement. Désignons par C le centre du groupe G. Soit π l'homomorphisme du groupe G sur le groupe $\tilde{G}$ défini par la représentation adjointe. Le noyau de l'homomorphisme π coïncide avec C (voir VI de 3.5, chapitre IX), tandis que C est un groupe discret (voir IV de 4.4) et, par conséquent, le groupe G est le groupe de revêtement pour $\tilde{G}$ relativement à l'application π.

II. *Les groupes Z_+ et Z_- sont les composantes de l'élément neutre des groupes $\pi^{-1}(\tilde{Z}_+)$, $\pi^{-1}(\tilde{Z}_-)$ respectivement.*

La démonstration se fonde sur les relations évidentes $\pi(Z_+) = \tilde{Z}_+$, $\pi(Z_-) = \tilde{Z}_-$, car Z_+ et Z_- sont connexes.

Soit D l'image inverse du groupe $\tilde{D}$ par l'homorphisme π.

III. *Le groupe D est commutatif.*

Démonstration. Soit D_0 la composante de l'élément neutre du groupe D. D_0 est commutatif en tant que sous-groupe analytique correspondant à la sous-algèbre de Lie commutative $H \subset L$. D'autre part, le groupe D est engendré par les sous-groupes D_0 et C. Puisque les groupes D_0 et C sont commutatifs et leurs éléments sont permutables entre eux, le groupe D est commutatif.

IV. *La restriction de l'application π aux groupes Z_+ et Z_- définit un isomorphisme des groupes Z_+ et Z_- sur les groupes $\widetilde{Z}_+$ et $\widetilde{Z}_-$ respectivement. En particulier, les groupes Z_+ et Z_- sont simplement connexes.*

Démonstration. La proposition II permet d'utiliser ici la proposition VII du § 1, chapitre VIII. Par conséquent, Z_+ et Z_- sont les groupes de revêtement pour $\widetilde{Z}_+$ et $\widetilde{Z}_-$ respectivement, relativement aux restrictions de l'application π. D'autre part, $\widetilde{Z}_+$ et $\widetilde{Z}_-$ sont simplement connexes d'après II de 5.1; par conséquent, les groupes Z_+ et $\widetilde{Z}_+$ (respectivement Z_- et $\widetilde{Z}_-$) sont isomorphes par la restriction de l'application π à Z_+ (respectivement à Z_-).

V. *Il existe dans le groupe G un ensemble ouvert partout dense $G_{\text{rég}}$ tel que chaque élément $g \in G_{\text{rég}}$ se met de manière unique sous la forme*

$$g = z_- dz_+,$$

où $z_- \in Z_-$, $d \in D$, $z_+ \in Z_+$. Les applications $g \to z_-$, $g \to d$, $g \to z_+$ sont des applications analytiques de la variété $G_{\text{rég}}$ dans les groupes de Lie Z_-, D, Z_+ respectivement.

Démonstration. Soit $\widetilde{G}_{\text{rég}}$ l'ensemble des éléments $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ qui admettent une décomposition de Gauss de la forme

$$\widetilde{g} = \widetilde{z}_- \widetilde{d}\widetilde{z}_+,$$

où $\widetilde{z}_- \in \widetilde{Z}_-$, $\widetilde{d} \in \widetilde{D}$, $\widetilde{z}_+ \in \widetilde{Z}_+$. D'après III de 5.1, l'ensemble $\widetilde{G}_{\text{rég}}$ est ouvert et partout dense dans $\widetilde{G}$. Soit $G_{\text{rég}}$ l'image inverse de l'ensemble $\widetilde{G}_{\text{rég}}$ dans G. Si $g \in G_{\text{rég}}$, on a $\pi(g) = \widetilde{z}_- \widetilde{d} \widetilde{z}_+$ pour certains $\widetilde{z}_-, \widetilde{d}, \widetilde{z}_+$. Soient $z_- \in Z_-$, $z_+ \in Z_+$ des éléments bien déterminés qui vérifient les conditions $\pi(z_-) = \widetilde{z}_-$, $\pi(z_+) = \widetilde{z}_+$ (voir IV). Soit d' une certaine image inverse de l'élément $\widetilde{d} \in \widetilde{D}$ dans le groupe D. Alors $\pi(g) = \pi(z_- d' z_+)$, i.e. $\pi(g^{-1} z_- d' z_+) = e$. Par conséquent, $g^{-1} z_- d' z_+ = c$, où c appartient au centre C. Alors $g = z_- d' z_+ c^{-1} = z_-(d'c^{-1}) z_+$, où $d'c^{-1} \in D$. En posant $d = d'c^{-1}$ nous obtenons

$$g = z_- dz_+, \tag{5.2.4}$$

où $z_- \in Z_-$, $z_+ \in Z_+$, $d \in D$. Puisque les éléments z_- et z_+ sont déterminés de façon unique par l'élément $g \in G_{\text{rég}}$, l'élément $d \in D$ est aussi uniquement défini par l'élément $g \in G_{\text{rég}}$. L'application

$g \to z_+$ peut être représentée sous forme de composition des applications analytiques $g \to \pi(g) \to \tilde{z}_+ \to z_+$ (voir IV de 5.1. et IV), donc l'application $g \to z_+$ est analytique. De même, l'application $g \to z_-$ est analytique, et donc l'application $g \to d = (z_-)^{-1} g (z_+)^{-1}$ est aussi une application analytique.

La décomposition (5.2.4) s'appelle *décomposition de Gauss* de l'élément $g \in G$.

§ 6. Décomposition d'Iwasawa

6.1. Décomposition d'Iwasawa dans le groupe adjoint. Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, L_0 sa forme réelle, et σ l'involution correspondante de L. Soit L_u la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie L, invariante relativement à σ (voir XIII de 14.1, chapitre X), et soit τ l'involution de L qui correspond à la forme réelle L_u. La représentation adjointe $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$, est un isomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie $gl(L)$. Soient G, G_0, G_u les sous-groupes analytiques du groupe G_L, envisagé comme un groupe de Lie réel, associés aux sous-algèbres de Lie $\operatorname{ad}(L)$, $\operatorname{ad}(L_0)$, $\operatorname{ad}(L_u)$. Etant donné que σ et τ sont des opérateurs linéaires involutifs dans L, les formules

$$s(g) = \sigma g \sigma^{-1}, \quad t(g) = \tau g \tau^{-1} \tag{6.1.1}$$

déterminent des automorphismes involutifs du groupe de Lie G.

I. *La composante connexe de l'ensemble des points fixes de l'automorphisme s (respectivement τ) coïncide avec G_0 (respectivement avec G_u).*

D é m o n s t r a t i o n. Soit H la composante connexe de l'ensemble des points fixes de l'automorphisme s; alors H est un sous-groupe de Lie de G (voir le théorème 1, § 2). Soit M la sous-algèbre de Lie de L correspondant au sous-groupe H. Il découle alors de (6.1.1) que $x \in M$ si et seulement si

$$\exp(tx)(y) = s(\exp(tx))(y) = \sigma(\exp tx)\sigma^{-1}(y) \tag{6.1.2}$$

pour tous les $y \in L$. Dérivons l'égalité (6.1.2) relativement à t en posant $t = 0$, et servons-nous du fait que σ est un automorphisme de l'algèbre de Lie L, il vient:

$$[x, y] = \sigma[x, \sigma^{-1}y] = [\sigma x, y], \tag{6.1.3}$$

i.e. $[x - \sigma x, y] = 0$ pour tous les $y \in L$. Puisque l'algèbre de Lie L est semi-simple, on a $x - \sigma x = 0$, i.e. $\sigma x = x$ et $x \in L_0$. Réciproquement, si $x \in L_0$, alors $\sigma x = x$, donc

$$\sigma(\exp tx)\sigma^{-1}(y) = \sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad} x)^n (\sigma^{-1}y)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad}(\sigma x))^n (y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad} x)^n (y) = \exp(tx)\, y$$

pour tous les $y \in L$, i.e. on a (6.1.2). Par conséquent, $L_0 = M$, donc $G_0 = H$. On démontre de même l'assertion concernant l'automorphisme τ.

II. *G_0 et G_u sont des sous-groupes fermés du groupe G.*

Démonstration. Les ensembles des points fixes des automorphismes s et t sont fermés; d'après I, G_0 et G_u sont des composantes connexes de ces ensembles et sont donc également fermés dans G.

Le groupe G est fermé dans G_L (voir V de 4.4). Ainsi G, G_0 et G_u sont des sous-groupes fermés du groupe G_L.

III. *Le groupe G_u est compact.*

Démonstration. Rappelons que $(\tau y, \tau z) = (y, z)$ pour tous les $y, z \in L$, où $(\cdot, \cdot)$ est la forme de Cartan-Killing. Si $x \in L_u$, $y, z \in L$, alors, en mettant à profit l'invariance de la forme de Killing, on trouve

$$((\operatorname{ad} x)\, y,\ \tau(z)) = (\tau\tau(\operatorname{ad} x)\, y,\ \tau(z)) = \\ = (\tau([x, y]), z) = ([\tau x, \tau y], z) = ([x, \tau y], z) = \\ = (\operatorname{ad} x(\tau y), z) = -(\tau y, \operatorname{ad} x(z)) = -(y, \tau(\operatorname{ad} x)(z)). \quad (6.1.4)$$

Soit $\{y, z\}$ une forme bilinéaire sur L définie par l'égalité $\{y, z\} = -(y, \tau z)$. L'égalité (6.1.4) signifie que

$$\{(\operatorname{ad} x)\, y,\ z\} = -\{y,\ (\operatorname{ad} x)\, z\} \quad (6.1.5)$$

pour tous les $x \in L_u$, $y, z \in L$.

Alors d'après (6.1.5) on a pour tous les $t \in \mathbf{R}$, $y, z \in L$ et $x \in L_u$

$$\frac{d}{dt}\{\exp(tx)\, y,\ \exp(tx)\, z\} = \{(\operatorname{ad} x)\exp(tx)\, y,\ \exp(tx)\, z\} + \\ + \{\exp(tx)\, y,\ (\operatorname{ad} x)\exp(tx)\, z\} = 0, \quad (6.1.6)$$

d'où l'on tire

$$\{\exp(tx)\, y,\ \exp(tx)\, z\} = \{\exp(0x)\, y,\ \exp(0x)\, z\} = \{y, z\} \quad (6.1.7)$$

pour tous les $t \in \mathbf{R}$, $y, z \in L$, $x \in L_u$. Donc

$$\{gy, gz\} = \{y, z\} \quad (6.1.8)$$

pour tous les $y, z \in L$ et tous les g choisis dans un certain voisinage de l'élément neutre du groupe G_u. Puisque G_u est connexe, l'égalité (6.1.8) est vérifiée pour tous les $g \in G_u$. Par conséquent, le groupe G_u est contenu dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans l'espace L qui laissent invariante la forme bilinéaire $\{x, y\}$. Mais d'après V de 14.1, chapitre X, la forme $\{x, x\} = -\{x, \tau x\}$ est définie négative sur L. Ainsi G_u est un sous-groupe fermé (d'après II) du groupe U des transformations de L, unitaires relativement à la forme $\{x, x\}$. Puisque U est compact, G_u l'est aussi.

Soit K la composante connexe de l'élément neutre du groupe $G_0 \cap G_u$.

IV. *K est un groupe de Lie compact dont l'algèbre de Lie coïncide avec* $L_u \cap L_0$.

Démonstration. Le groupe $G_0 \cap G_u$ est un sous-groupe fermé du groupe compact G_u, donc $G_0 \cap G_u$ et K sont des groupes compacts. L'algèbre de Lie du sous-groupe K est évidemment l'intersection des algèbres de Lie des groupes G_0 et G_u.

Soit H_u la sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie L_u construite dans XIV de 14.1, chapitre X. Introduisons les notations H_u^-, N_0, H_0, H_0^+ de 14.1, chapitre X. Désignons par R le sous-groupe de Lie du groupe G_0 dont l'algèbre de Lie est la sous-algèbre de Lie résoluble $M_0 = iH_u^- + N_0 \subset L$ (voir XVII de 14.1, chapitre X).

Remarquons que l'espace iH_u^- est engendré (comme espace réel) par l'ensemble H_0^+ des éléments h de la sous-algèbre de Cartan $H_0 \subset \subset L_0$ tels que $\sigma(h) = h$. Choisissons une base de Weyl de la forme $\{e_{-\alpha_k}, \ldots, e_{-\alpha_1}, h_1, \ldots, h_r, e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_k}\}$, où $e_{\pm\alpha_k} \in L^{\pm\alpha_k}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ est l'ensemble de toutes les racines positives, où $\alpha_i < < \alpha_{i+1}$ relativement à l'ordre lexicographique), $h_1, \ldots, h_r$ est une base orthonormée relativement à la forme de Killing de H_0. Puisque $\alpha(H_0^+) \subset \mathbf{R}$ pour chaque racine α, tout opérateur appartenant à ad (iH_u^-) s'écrit, dans la base de Weyl donnée, par une matrice diagonale à diagonale réelle. En remarquant que les opérateurs de ad (N_0) ont relativement à cette base la forme de matrices triangulaires, avec des zéros dans la diagonale principale, on a la proposition suivante:

V. *Les opérateurs de* ad (M_0) *se présentent dans une base de Weyl appropriée, sous forme de matrices triangulaires à éléments réels dans la diagonale principale.*

VI. *Le groupe R est un groupe résoluble simplement connexe. L'intersection* $R \cap K$ *se réduit à l'élément neutre. L'application exponentielle est un homéomorphisme de* $M_0 = iH_u^- + N_0$ *sur R.*

Démonstration. Le groupe R est résoluble parce que son algèbre de Lie M_0 est résoluble (voir V de 4.2). Mais G est un groupe linéaire, par conséquent, l'application exp coïncide avec la fonction exponentielle matricielle usuelle (voir l'exemple dans 3.4, chapitre IX). Si x est une matrice triangulaire à éléments diagonaux réels, alors e^x est une matrice triangulaire à éléments diagonaux positifs. Mais chaque matrice triangulaire y à éléments diagonaux positifs se met de manière unique sous la forme e^x pour une matrice triangulaire x à éléments diagonaux réels (on obtient ceci facilement en ramenant y à la forme normale de Jordan). Ainsi, si M est une sous-algèbre de Lie réelle dans $gl(L)$ dont les éléments se représentent, dans la base de Weyl choisie, par les matrices triangulaires

à diagonale réelle, l'application exp est une bijection de M sur le sous-groupe $H \subset G_L$ des matrices triangulaires à éléments diagonaux positifs. Il est évident que le sous-groupe H est homéomorphe à $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{C}^{n(n-1)/2}$; il est donc simplement connexe. On tire alors de III, 4.3, que R est simplement connexe. En outre, il découle de la bijectivité de l'application exp sur M que exp applique injectivement M_0 dans R.

Prouvons que exp est un homéomorphisme de M_0 sur R. Puisque les valeurs propres des opérateurs de ad (M_0) sont réelles, exp est un homéomorphisme local (voir chapitre IX, II de 3.6 et VIII de 1.5). Il reste à démontrer que l'image par exp coïncide avec R. Mais l'application $x \to e^x$, $x \in M$, est également un homéomorphisme local, et en outre c'est une bijection de M sur H. Comme exp est la restriction de l'application $x \to e^x$ à M_0 l'image par l'application exp est fermée dans R. D'autre part, le fait que exp est un homéomorphisme local implique que l'image de exp est ouverte dans R. Puisque R est connexe, on a $\exp(M_0) = R$.

Démontrons enfin que $R \cap K$ se réduit à l'élément neutre. D'après (14.1.21), chapitre X, si $x = \sum_{j=1}^{r} t_j h_j + \sum_{\alpha \neq 0} \lambda_\alpha e_\alpha = h + \sum_{\alpha \neq 0} \lambda_\alpha e_\alpha$, on a $\{x, x\} = -(x, \tau(x)) = \sum_{\alpha \neq 0} (|\alpha(h)|^2 + |\lambda_\alpha|^2)$. Par conséquent, la base de Weyl que nous avons choisie est orthonormée relativement à la forme $\{x, x\}$, tandis que la relation (6.1.8) implique que les opérateurs appartenant au groupe K s'écrivent dans la base de Weyl choisie sous forme de matrices unitaires. Mais chaque matrice unitaire et triangulaire à la fois est diagonale; si la diagonale est occupée par des nombres réels positifs, alors cette matrice est la matrice unité. Donc, $K \cap R = \{e\}$.

VII. $G_0 = K \cdot R$, *i.e. chaque élément* $g \in G_0$ *se met de manière unique sous la forme* $g = kr$, *où* $k \in K$, $r \in R$. *Les applications* $g \to k$ *et* $g \to r$ *sont analytiques.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{T}_e(R) = M_0$ et $\widetilde{T}_e(K) = L_u \cap L_0$, l'espace tangent à la variété $K \times R$ au point (e, e) s'indentifie avec $(L_u \cap L_0) + M_0 = (L_u \cap L_0) + iH_u^- + N_0$ (voir 1.5, chapitre IX). Il est évident que la différentielle au point (e, e) de l'application de $G_0 \times G_0$ dans G_0 définie par la formule $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$ est l'application de $L_0 + L_0$ dans L_0 définie par la formule $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$. Par conséquent, l'application $\pi: (k, r) \to kr$ de la variété $K \times R$ dans le groupe G_0 induit au point (e, e) un isomorphisme des espaces tangents. D'après VIII de 1.5, chapitre IX, il existe des voisinages U, V de l'élément neutre dans les groupes K et R respectivement tels que la restriction de l'application π à $U \times V$ est un homéomorphisme analytique de $U \times V$ dans G_0. Il découle alors de l'analyticité de la multiplication qu'il existe des

voisinages $U_1 \cup U$, $V_1 \subset V$ et des applications analytiques k^0: $U_1 \times \times V_1 \to U$ et r^0: $U_1 \times V_1 \to V$ tels que

$$rk = k^0(r, k)\, r^0(r, k) \qquad (6.1.9)$$

pour tous les $k \in U_1$, $r \in V$.

Soit $S = \{k_1, \ldots, k_p\}$ une famille d'éléments de U_1. Construisons maintenant un voisinage $V(S) \subset V_1$ et des applications analytiques r^S et k^S qui vérifient les conditions

$$rk(S)\, k = k^S(r, k)\, r^S(r, k) \qquad (6.1.10)$$

pour tous les $k \in U_1$, $r \in V(S)$, où $k(S) = k_1 \ldots k_p$. Pour $p = 0$ on peut supposer que $k^S = k^0$, $r^S = r^0$ (voir (6.1.9)). Effectuons la construction par récurrence sur p. Soit $S' = \{k_0\} \cup S$ et supposons que pour S le voisinage $V(S)$ et les applications r^S et k^S ont déjà été construits. Alors $k(S') = k_0 k(S)$ et il découle de (6.1.10) et (6.1.9) que

$$rk(S')\, k = rk_0 k(S)\, k = k^0(r, k_0)\, r^0(r, k_0)\, k(S)\, k$$

pour tous les $r \in V_1$. De l'unicité de la décomposition (6.1.9) on tire $r^0(e, k_0) = e$; il existe donc un voisinage $V(S') \subset V_1$ tel que $r^0(r, k_0) \in V(S)$ pour $r \in V(S')$. Alors

$$rk(S')\, k = k^0(r, k_0)\, k^S(r^0(r, k_0), k)\, r^S(r^0(r, k_0), k)$$

pour tous les $r \in V(S')$ ce qui démontre la formule (6.1.10).

Le groupe K étant compact, il existe pour chaque U_1 un ensemble fini de familles S_j, $j = 1, \ldots, m$ tel que $K = \bigcup\limits_{j=1}^{m} k(S_j)\, U_1$. Soit $\bigcap\limits_{j=1}^{m} V(S_j) = V_2$; alors pour $r \in V_2$ et $k \in K$ il découle de la formule (6.1.10) que $rk \in KR$.

Soit $T = \{r_1, \ldots, r_q\}$ une famille d'éléments de V_2 et $r(T) = = r_1 \ldots r_q$. Montrons que $r(T)\, k \in KR$. Pour $q = 1$ cette assertion est déjà démontrée. Si $T' = \{r_0\} \cup T$, alors $r(T') = r_0 r(T)$ et $r(T')\, k = r_0 r(T)\, k \in r_0 KR$; mais $r_0 K \subset KR$ car $r_0 \in V_2$, de sorte que $r(T')\, k \in KR$. Le groupe connexe R étant engendré par le voisinage V_2, on a $RK \subset KR$. D'où l'on tire immédiatement que KR est un sous-groupe du groupe G_0. Mais KR contient l'ensemble $U_1 V_1$, qui est un voisinage de l'élément neutre du groupe connexe G_0. D'après VI de 1.2, chapitre V, nous avons $G_0 = KR$. L'unicité de cette décomposition découle de l'égalité $K \cap R = \{e\}$: si $g = = k_1 r_1 = k_2 r_2$, alors $k_2^{-1} k_1 = r_2 r_1^{-1} \in K \cap R$, donc $k_2^{-1} k_1 = r_2 r_1^{-1} = e$ et $k_1 = k_2$, $r_1 = r_2$. Ainsi l'application du produit $K \times R$ dans G_0 définie par la formule $(k, r) \to kr$ est un isomorphisme analytique de la variété $K \times R$ dans G_0. Par conséquent, l'application inverse $kr \to (k, r)$ est également analytique, i.e. les applications $g \to k$ et $g \to r$ sont analytiques.

6.2. Décomposition d'Iwasawa dans un groupe de Lie semi-simple connexe arbitraire. Soit G' un groupe de Lie semi-simple connexe, i.e. un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est semi-simple. Soit L_0 l'algèbre de Lie du groupe G', $L_{\mathbf{C}}$ sa complexification, et soit G_0 le sous-groupe analytique du groupe $G_{L_{\mathbf{C}}}$ qui correspond à la sous-algèbre de Lie $\operatorname{ad}(L_0) \subset \operatorname{ad}(L_{\mathbf{C}})$. L'homomorphisme adjoint $\rho: g \to \operatorname{Ad}(g)$ qui applique G' dans G_{L_0} se prolonge de manière unique à un homomorphisme $\pi: G' \to G_{L_{\mathbf{C}}}$, où $\pi(g)$ se définit pour chaque $g \in G'$ par la formule

$$\pi(g)(x+iy) = \rho(g)x + i\rho(g)y, \quad x, y \in L_0.$$

L'image $\pi(G')$ coïncide avec le sous-groupe analytique du groupe $G_{L_{\mathbf{C}}}$ correspondant à la sous-algèbre de Lie $\operatorname{ad}(L_0)$ (voir IV de 3.3, chapitre IX), donc $\pi(G') = G_0$.

Il est évident que les conditions $\pi(g) = 1$ et $\rho(g) = 1$ sont équivalentes. Etant donné que le noyau de la représentation adjointe ρ coïncide avec le centre Z du groupe G', le groupe $\pi(G') = G_0$ est isomorphe à G'/Z. Le centre de l'algèbre de Lie L_0 se réduisant à l'élément nul, le centre Z du groupe G' est discret, et donc l'application π est un revêtement. Supposons que K et R sont les sous-groupes analytiques du groupe G_0 construits dans 6.1 (voir IV à VII de 6.1), soit $\widetilde{R}$ l'image inverse du groupe R dans le groupe G'. Soit R' la composante de l'élément neutre du groupe R. Le groupe R' est un revêtement du groupe R relativement à l'application π car $\pi(R') = R$ et le noyau de π est discret. Mais le groupe R est simplement connexe (voir VI de 6.1). Par conséquent, π détermine un isomorphisme analytique du groupe R' sur R. En particulier, $R' \cap \cap Z = \{e\}$. Il est évident que R' est fermé en tant que composante de l'élément neutre de l'image inverse du sous-groupe fermé R (voir VI de 6.1) du groupe G_0. Ainsi R' est un sous-groupe de Lie résoluble fermé simplement connexe du groupe G', correspondant à la sous-algèbre de Lie $M_0 = iH_u^- + N_0 \subset L_0$ (voir 6.1).

Posons $K' = \pi^{-1}(K)$; alors $K' \supset Z$. K étant fermé dans G_0, K' l'est dans G'. Si $g \in K' \cap R'$, alors $\pi(g) \in K \cap R = \{e\}$, de sorte que $g \in Z$; mais $Z \cap R' = \{e\}$, donc $g = e$. Ainsi $K \cap R = \{e\}$. En outre, si $g \in G'$, alors $\pi(g) = kr$ pour certains $k \in K$, $r \in R$. En vertu des relations $K' = \pi^{-1}(K)$, $\pi(R') = R$, il existe des éléments $k'' \in \pi^{-1}(k) \subset K$, $r' \in \pi^{-1}(r) \cap R'$ tels que $\pi(g) = \pi(k'')\pi(r') = \pi(k''r')$, i.e. il existe un $z \in Z$ tel que $g = z(k''r') = (zk'')r'$. En posant $zk'' = k'$ et en se servant de la relation $K \supset Z$, on trouve $k' \in K'$ et $g = k'r'$. Si $g = k'_1r'_1$ et $k'_1 \in K'$, $r'_1 \in R'$, alors $k'r' = k'_1r'_1$, $k_1'^{-1}k' = r'_1r'^{-1} \in K' \cap R' = \{e\}$, donc $k' = k'_1$, $r' = r'_1$ et la décomposition $g = k'r'$, $k \in K'$, $r' \in R'$, est unique.

Ainsi l'application $\psi: (k', r') \to k'r'$ du produit des variétés $K' \times R'$ dans G' est une application (évidemment analytique) bijective *sur* le groupe G'. Par conséquent, pour démontrer que l'appli-

cation ψ est un isomorphisme des variétés analytiques $K' \times R'$ et G', il suffit de montrer qu'en chaque point $(k'r')$ l'application $d\psi\,(k', r')$ induit un isomorphisme des espaces tangents $T_{k'r'}\,(K' \times R')$ et $T_{k'r'}\,(G')$. Soient x, y des éléments de l'algèbre de Lie des groupes K' et R' respectivement. Chaque vecteur tangent de $T_{k'r'}\,(K' \times R')$ se met sous la forme $(x\,(k'),\ y\,(r'))$ pour certains x, y; alors, pour chaque fonction f analytique dans un voisinage du point $g' = k'r'$, on a

$$d\psi\,(k', r')\,(x\,(k'),\ y\,(r'))\,f = (x\,(k'),\ y\,(r'))\,(f \circ \psi) = \\ = x\,(k')\,(f \circ \psi) + y\,(r')\,(f \circ \psi). \quad (6.2.1)$$

En se servant de la relation

$$f\,(k'r') = f\,(r'r'^{-1}k'r'),$$

on trouve

$$x\,(k')\,(f \circ \psi) = \mathrm{Ad}\,(r'^{-1})\,x\,(k')\,(f \circ \varphi_{r'})\,; \quad (6.2.2)$$

en outre

$$y\,(r')\,(f \circ \psi) = y\,(r')\,(f \circ \varphi_{k'}). \quad (6.2.3)$$

En substituant (6.2.2) et (6.2.3) dans (6.2.1) et en appliquant (3.2.1), chapitre IX, on obtient

$$d\psi\,(k', r')\,(x\,(k'),\ y\,(r'))\,f = (d\varphi_{(k',\,r')})_e\,(\mathrm{Ad}\,(r'^{-1})\,x + y)\,(e)\,f = \\ = (\mathrm{Ad}\,(r'^{-1})\,x + y)\,(k'r')\,f.$$

Si $d\psi\,(k', r')\,(x\,(k'),\ y\,(r')) = 0$, on a $\mathrm{Ad}\,(r'^{-1})\,x + y = 0$, de sorte que $x + \mathrm{Ad}\,(r')\,y = 0$. Mais x appartient à l'algèbre de Lie du groupe K', tandis que y et $\mathrm{Ad}\,(r')\,y$ sont situés dans l'algèbre de Lie du groupe R'; ces algèbres de Lie sont complémentaires l'une de l'autre dans L_0, par conséquent $x = \mathrm{Ad}\,(r')\,y = 0$, i.e. $x = y = 0$ et $d\psi\,(k', r')$ est un isomorphisme sur un sous-ensemble de l'espace tangent $T_{k'r'}(G')$. Les dimensions des variétés $K' \times R'$ et G' étant égales, $d\psi$ induit un isomorphisme des espaces tangents dans chaque point $(k', r') \in K' \times R'$. Ainsi, l'application ψ est un isomorphisme de variétés analytiques. En particulier, puisque le groupe G' est connexe, le groupe K' est connexe; par conséquent, le groupe K' coïncide avec le sous-groupe analytique du groupe G' correspondant à la sous-algèbre de Lie $L_0 \cap L_u$ (voir 6.1).

Ainsi nous avons démontré le

THÉORÈME. *Soient G' un groupe de Lie connexe semi-simple et K' et R' les sous-groupes analytiques du groupe G' associés aux sous-algèbres de Lie $L_0 \cap L_u$ et $iH_u^- + N_0$ de l'algèbre de Lie L_0 du groupe G'* (voir I et II de 3.3, chapitre IX). *Alors K' contient le centre du groupe G', et l'image du groupe K' par la représentation adjointe du groupe G' est un groupe compact; R' est un groupe de Lie résoluble simplement connexe; les groupes K' et R' sont fermés. L'application*

$(k', r') \to k'r'$ est un isomorphisme analytique de la variété $K' \times R'$ sur G'.

Trouvons maintenant une formule pour la mesure de Haar sur G'.

I. *La mesure de Haar sur un groupe de Lie semi-simple connexe G' est invariante à droite et à gauche.*

Démonstration. Si Δ est un module du groupe G', alors Δ détermine un homomorphisme analytique (voir le théorème 2, § 2) du groupe G' dans le groupe $\mathbf{R}^+$. Alors $d\Delta$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie semi-simple du groupe G' dans l'algèbre de Lie commutative unidimensionnelle. D'autre part, il découle de III, § 7, chapitre X, que toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple; si $d\Delta \neq 0$, alors nous aboutissons à une contradiction, car l'image par un homomorphisme d'algèbres de Lie est isomorphe à une certaine algèbre quotient. Donc $d\Delta = 0$ et Δ est une application du groupe G' dans l'unité du groupe $\mathbf{R}^+$.

II. *Pour une normalisation appropriée des mesures de Haar invariantes à gauche dx', dr', dg' sur les groupes K', R', G' on a*

$$\int f(g')\,dg' = \int\int f(k'r'^{-1})\,dk'\,dr' \qquad (6.2.4)$$

quelle que soit la fonction continue finie f sur G'.

Démonstration. Considérons une fonction f sur G' qui peut se mettre sous la forme $f(g') = f_1(k') f_2(r')$, où $g' = k'r'$. Pour une fonction $f_1 \geqslant 0$ donnée, l'intégrale $\int f(g')\,dg'$ est une fonctionnelle linéaire positive invariante à droite sur l'ensemble de toutes les fonctions continues f_2 sur R', nulles en dehors d'un ensemble compact (qui dépend de f_2). Par conséquent, $\int f(g')\,dg' = c(f_1) \int f_2(r'^{-1})\,dr'$. Si l'on se donne $f_2 \geqslant 0$, on obtient que $c(f_1)$ est une fonctionnelle en f_1 linéaire positive invariante à gauche. Donc, en normant de façon appropriée la mesure dk', on obtient $c(f_1) = \int f_1(k')\,dk'$. Par conséquent, la formule (6.2.4) est valable pour toutes les fonctions continues finies f de la forme $f_1(k') f_2(r')$. Mais le théorème de Stone (voir 1.4, chapitre IV), appliqué aux sous-ensembles compacts du groupe G', implique immédiatement que chaque fonction continue finie f sur G' est la limite uniforme sur G' d'une suite de combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme $f_1(k') f_2(r')$, où f_1, f_2 sont des fonctions continues finies sur K', R'; en passant à la limite appropriée dans (6.2.4), on obtient la proposition II.

37—0883

§ 7. Revêtement universel d'un groupe de Lie compact semi-simple

7.1. Quelques propriétés des homomorphismes des groupes compacts. Soient $\widetilde{G}$ un groupe compact localement connexe, et C un sous-groupe discret du groupe $\widetilde{G}$ contenu dans le centre du groupe $\widetilde{G}$. Alors C est un sous-groupe distingué fermé de $\widetilde{G}$. Soit G le groupe quotient $\widetilde{G}/C$ et soit π l'homomorphisme canonique du groupe $\widetilde{G}$ sur le groupe G.

I. *Supposons que le groupe G est compact. Alors le groupe C est engendré par un nombre fini d'éléments. En particulier, si le groupe C est infini, alors il existe un homomorphisme non trivial du groupe C dans le groupe additif des nombres réels.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit U un voisinage de l'élément neutre $\widetilde{e}$ du groupe $\widetilde{G}$ possédant une adhérence compacte $\overline{U}$ dans $\widetilde{G}$. Alors $\pi(gU)$ est un voisinage de l'élément $\pi(g) \in G$. Le groupe G étant compact, il existe une famille finie d'éléments $g_1, \ldots, g_n \in \widetilde{G}$ telle que $\bigcup_{k=1}^{n} \pi(g_k U)$ recouvre K. Soit $D = \bigcup_{k=1}^{n} g_k \overline{U}$; alors D est un sous-ensemble compact du groupe $\widetilde{G}$ et l'intérieur D_0 de l'ensemble D contient la réunion $\bigcup_{k=1}^{n} g_k U$; donc $\pi(D_0) = G$ et, par conséquent, $G = CD_0$. En agrandissant s'il le faut l'ensemble D, nous pouvons admettre que $\widetilde{e} \in D$ et $D = D^{-1}$. L'ensemble $D \cdot D^{-1}$ est compact; d'autre part, puisque $D \cdot D^{-1} \subset \widetilde{G} = \bigcup_{c \in C} cD_0$, la famille des ensembles de la forme cD_0, $c \in C$, est un recouvrement ouvert de l'ensemble $D \cdot D^{-1}$. Il existe donc des $c_1, \ldots, c_m \in C$ tels que $D \cdot D^{-1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} c_i D_0$. Soit C_1 le sous-groupe du groupe C engendré par les éléments $c_1, \ldots$ $\ldots, c_m$. Puisque C est contenu dans le centre du groupe $\widetilde{G}$, C_1 est un sous-groupe distingué fermé de $\widetilde{G}$. Soit E l'image de l'ensemble D dans le groupe quotient $\widetilde{G}/C_1$; alors l'ensemble E contient l'élément neutre, $E = E^{-1}$ et $E \cdot E^{-1} \subset E$, de sorte que E est un sous-groupe de $\widetilde{G}/C_1$. Puisque D_0 est un voisinage de l'élément neutre de $\widetilde{G}$, l'ensemble E contient un voisinage de l'élément neutre de $\widetilde{G}/C_1$. La connexité de $\widetilde{G}$ implique celle du groupe $\widetilde{G}/C_1$, donc le sous-groupe E contenant un voisinage de l'élément neutre de $\widetilde{G}/C_1$ coïncide avec $\widetilde{G}/C_1$. Ceci signifie que $G = C_1 D$. Puisque C est un groupe discret, l'ensemble $D \cap C$ est fini. En outre, si $c \in C$ et $c = c_1 d$, où $c_1 \in C_1 \subset C$, on a $d = cc_1^{-1} \in C$, de sorte que $C \subset C_1 \cdot (D \cap C)$.

Comme C_1 est engendré par un nombre fini d'éléments, tandis que $D \cap C$ est un ensemble fini, le groupe C est engendré par un nombre fini d'éléments.

Si C est infini, alors C est isomorphe à un groupe de la forme $C_0 \times Z^q$, où C_0 est un groupe fini, $q \geqslant 1$. Par conséquent, il existe un homomorphisme non trivial du groupe C dans **R**.

II. *Soit* φ *un homomorphisme du groupe* C *dans* **R**. *Il existe alors une fonction réelle continue* ψ *sur* $\widetilde{G}$ *qui vérifie la condition* $\psi(xc) = \psi(x) + \psi(c)$ *pour tous les* $x \in \widetilde{G}$, $c \in C$, *et* $\psi(\widetilde{e}) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit D un sous-ensemble compact du groupe $\widetilde{G}$ tel que $\widetilde{G} = CD$. Soit f une fonction continue non négative sur le groupe $\widetilde{G}$, nulle en dehors d'un certain ensemble compact Q et égale à un sur l'ensemble D. Posons

$$h_1(x) = \sum_{c \in C} f(xc)\, e^{-\varphi(c)} \tag{7.1.1}$$

pour tous les $x \in \widetilde{G}$. Il est évident que pour chaque $x \in \widetilde{G}$ la somme dans le deuxième membre de (7.1.1) est finie, car l'ensemble $xC \cap Q$ est fini pour chaque $x \in \widetilde{G}$ (grâce au fait que l'ensemble Q est compact et la classe d'équivalence xC est discrète). Par conséquent, la fonction $h_1(x)$ est définie correctement et continue sur $\widetilde{G}$. Si $x \in \widetilde{G}$, on a $x \in CD$; il existe donc un élément $c \in C$ tel que $xc \in D$; alors $f(xc) = 1$; par conséquent, $h_1(x) > 0$ pour tous les $x \in \widetilde{G}$. Posons $h(x) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(x)$ pour tous les $x \in \widetilde{G}$; alors $h(x)$ est une fonction positive continue sur $\widetilde{G}$, et pour $c_0 \in C$ on a

$$h(xc_0) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(xc_0) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c \in C} f(xc_0c)\, e^{-\varphi(c)} =$$

$$= (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c_1 \in C} f(xc_1)\, e^{-\varphi(c_1c_0^{-1})} = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c_1 \in C} f(xc_1)\, e^{-\varphi(c_1)+\varphi(c_0)} =$$

$$= e^{\varphi(c_0)} (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(x) = e^{\varphi(c_0)} h(x). \tag{7.1.2}$$

Posons $\psi(x) = \operatorname{Log} h(x)$. Puisque $h(\widetilde{e}) = 1$, on a $\psi(\widetilde{e}) = 0$; en prenant les logarithmes dans l'égalité (7.1.2), on obtient $\psi(xc_0) = \psi(x) + \varphi(c_0)$ pour tous les $c_0 \in C$.

III. *Soit* G *un groupe compact connexe. Supposons que* F *est une fonction réelle continue sur* $G \times G$ *vérifiant les conditions*

$$F(e, e) = 0, \tag{7.1.3}$$

$$F(xy, z) + F(x, y) = F(x, yz) + F(y, z) \tag{7.1.4}$$

pour tous les $x, y, z \in G$. Il existe alors une fonction réelle continue f sur G qui vérifie les conditions

$$f(e) = 0, \tag{7.1.5a}$$

$$F(x, y) = f(xy) - f(x) - f(y). \tag{7.1.5b}$$

Démonstration. Soit dg une mesure invariante sur le groupe G qui vérifie la condition $\int_G dg = 1$. Posons

$$f(x) = -\int_G F(x, g)\, dg \tag{7.1.6}$$

pour tous les $x \in G$. Alors en appliquant (7.1.4), on trouve

$$f(xy) - f(x) - f(y) = -\int_G F(xy, g)\, dg + \int_G F(x, g)\, dg +$$

$$+ \int_G F(y, g)\, dg = \int_G F(x, g)\, dg + \int_G F(x, y)\, dg - \int_G F(x, yg)\, dg =$$

$$= F(x, y) + \int_G F(x, g)\, dg - \int_G F(x, yg)\, dg, \tag{7.1.7}$$

et (7.1.5b) découle de (7.1.7) et de l'invariance de la mesure dg. D'autre part, en substituant dans la relation (7.1.4) les égalités $x = y = e$ et en appliquant (7.1.3) on obtient $F(e, z) = F(e, z) + F(e, z)$, i.e. $F(e, z) = 0$ pour tous les $z \in G$. D'où l'on tire en se servant de (7.1.6), que $f(e) = 0$, i.e. la condition (7.1.5a) est vérifiée.

IV. *Dans les hypothèses de la proposition* I, *il existe pour chaque homomorphisme φ du groupe C dans* **R** *un homomorphisme continu χ du groupe G dans* **R** *tel que $\chi(c) = \varphi(c)$ pour tous les $c \in C$.*

Démonstration. Soit ψ la fonction réelle continue sur $\widetilde{G}$ construite dans la proposition II. Posons

$$\Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \psi(\widetilde{x}) - \psi(\widetilde{y}) \tag{7.1.8}$$

pour tous les $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in G$. Il découle de la relation $\psi(\widetilde{x}c) = \psi(\widetilde{x}) + \varphi(c)$ et de l'égalité (7.1.8) que

$$\Phi(\widetilde{x}c_1, \widetilde{y}c_2) = \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \tag{7.1.9}$$

pour tous les $c_1, c_2 \in C$. Par conséquent, la formule

$$F(x, y) = \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \quad x, y \in G, \quad \widetilde{x} \in x, \quad \widetilde{y} \in y, \tag{7.1.10}$$

donne une définition correcte d'une fonction réelle continue F sur $G \times G$. Etant donné que $\psi(\widetilde{e}) = 0$, on a $F(e, e) = 0$, tandis que (7.1.8) et (7.1.10) entraînent immédiatement que la fonction F

vérifie la condition (7.1.4) pour tous les x, y, $z \in G$. En vertu de III, il existe une fonction réelle continue f vérifiant la condition $f(e) = 0$ et la relation (7.1.5b). Posons $\chi(\tilde{x}) = \psi(x) - f(\pi(\tilde{x}))$ pour tous les $\tilde{x} \in \tilde{G}$. Alors χ est une fonction réelle continue sur $\tilde{G}$ et l'on tire de (7.1.8) à (7.1.10) et de (7.1.5) que

$$\chi(\tilde{x}, \tilde{y}) - \chi(\tilde{x}) - \chi(\tilde{y}) = \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) - F(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) = 0$$

pour tous les $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \tilde{G}$, i.e. χ est un homomorphisme continu du groupe G dans $\mathbf{R}$.

Montrons que $\chi(c) = \varphi(c)$ pour tous les $c \in C$. Il découle des relations $\psi(\tilde{e}) = 0$ et $\psi(\tilde{x}c) = \psi(\tilde{x}) + \varphi(c)$ que pour $\tilde{x} = \tilde{e}$ on a $\psi(c) = \varphi(c)$ quel que soit $c \in C$. Vu que $f(\pi(c)) = f(e) = 0$ pour tous les $c \in C$ on a $\chi(c) = \psi(c) - f(\pi(c)) = \varphi(c)$ pour tous les $c \in C$.

V. *Soient $\tilde{G}$ un groupe compact localement connexe, et C son sous-groupe discret contenu dans le centre de $\tilde{G}$. Admettons que le groupe $G = \tilde{G}/C$ est compact, tandis que le groupe $\tilde{G}$ ne possède aucun homomorphisme continu non trivial dans le groupe* $\mathbf{R}$. *Alors $\tilde{G}$ est compact.*

D é m o n s t r a t i o n. Si le groupe C était infini, il existerait un homomorphisme non trivial du groupe C dans $\mathbf{R}$ (voir I) et aussi un homomorphisme non trivial continu du groupe $\tilde{G}$ dans $\mathbf{R}$ (voir IV), contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, le groupe C est fini et la compacité du groupe $\tilde{G}$ découle de celle du groupe G.

VI. *Soient $\tilde{G}$ un groupe compact localement connexe, et C son sous-groupe discret contenu dans le centre du groupe $\tilde{G}$. Si le groupe $[\tilde{G}, \tilde{G}]$ est partout dense dans $\tilde{G}$* et *le groupe $G = \tilde{G}/C$ est compact, alors le groupe $\tilde{G}$ est également compact.*

D é m o n s t r a t i o n. Le sous-groupe $[\tilde{G}, \tilde{G}]$ est contenu dans le noyau de chaque homomorphisme du groupe $\tilde{G}$ dans le groupe $\mathbf{R}$; par conséquent, chaque homomorphisme continu du groupe $\tilde{G}$ dans $\mathbf{R}$ est trivial, et il ne reste qu'à appliquer la proposition V.

7.2. Revêtement universel d'un groupe de Lie compact. Rappelons qu'une variété est localement connexe et localement simplement connexe. Par conséquent, chaque groupe de Lie connexe possède un groupe de revêtement universel (voir IV de 3.1 et I de 3.2, chapitre VIII). D'après VII de 3.3, chapitre IX, ce revêtement universel est également un groupe de Lie.

I. (Théorème de H. Weyl). *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple compact et connexe. Alors son revêtement universel est également un groupe compact.*

Démonstration. Soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel du groupe G. Nous pouvons supposer que $G = \widetilde{G}/C$, où C est un sous-groupe discret du groupe $\widetilde{G}$ contenu dans son centre. Les algèbres de Lie des groupes de Lie G et $\widetilde{G}$ étant isomorphes, le groupe de Lie G est également semi-simple. Par conséquent, $\widetilde{G} = [\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ (voir VI de 4.2), et pour terminer la démonstration, il suffit d'appliquer la proposition VI de 7.1.

On sait que chaque représentation d'une algèbre de Lie d'un groupe de Lie simplement connexe est la différentielle d'une certaine représentation du groupe de Lie (voir II de 1.4). Il s'avère que la réciproque est également vraie pour les groupes de Lie semi-simples compacts connexes:

II. *Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple compact, et L son algèbre de Lie. Si toute représentation de l'algèbre de Lie L est la différentielle d'une certaine représentation du groupe de Lie G, alors le groupe G est simplement connexe.*

Démonstration. Soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel du groupe G relativement à un homomorphisme π. D'après I, le groupe $\widetilde{G}$ est compact. Soit C le noyau de l'homomorphisme π. Identifions l'algèbre de Lie du groupe $\widetilde{G}$ avec l'algèbre de Lie L de manière à ce que l'application $d\pi$ soit l'identité. Soit c un élément du noyau C différent de l'élément unité. D'après le théorème 4 de 2.4, chapitre IV (voir également la démonstration de la proposition I de 8.3), il existe une représentation $\widetilde{\rho}$ du groupe $\widetilde{G}$ telle que $\widetilde{\rho}(c)$ est un opérateur non identique dans l'espace de la représentation $\widetilde{\rho}$. Soit $d\widetilde{\rho}$ la différentielle de la représentation $\widetilde{\rho}$. D'après l'hypothèse de la proposition II, il existe une représentation ρ du groupe G telle que $d\rho = d\widetilde{\rho}$. Par conséquent, les représentations $\widetilde{\rho}$ et $\rho \circ \pi$ du groupe $\widetilde{G}$ possèdent les mêmes différentielles. D'après I de 1.4, on a alors $\widetilde{\rho} = \rho \circ \pi$; en particulier $\widetilde{\rho}(c) = \rho(\pi(c)) = \rho(e) = 1$, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, C se réduit à l'élément neutre du groupe $\widetilde{G}$; aussi $\widetilde{G} \approx G$ et G est simplement connexe.

III. *Le groupe $SO(n, \mathbf{R})$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. Les éléments matriciaux de la représentation identique π du groupe compact $G = SO(n, \mathbf{R})$ sont réels. Par conséquent, la famille des éléments matriciaux de toutes les puissances tensorielles de la représentation π vérifie les hypothèses du théorème de Stone. D'après le théorème de 1.4, chapitre IV, les représentations irréductibles des puissances tensorielles de la représentation π forment un système complet des représentations unitaires irréductibles du groupe G. Soit L l'algèbre de Lie du groupe G. La représentation de l'algèbre de Lie L, correspondant à la puis-

sance tensorielle de la représentation π, est une puissance tensorielle de la représentation $d\pi$ de l'algèbre de Lie L, qui correspond à la représentation identique de L. Le lecteur verifiera sans peine que chaque poids de la représentation $\bigotimes_{k=1}^{n} d\pi$ est la somme des poids de la représentation $d\pi$. En vertu des formules (10.4.19), (10.4.21), (10.4.37), chapitre X, les nombres $2(\lambda, \alpha_k)/(\alpha_k, \alpha_k) = \lambda(h_k)$ sont pairs pour chaque poids λ de la représentation de l'algèbre de Lie $so(n, \mathbf{C})$ correspondant à la représentation identique du groupe $SO(n, \mathbf{C})$. Par conséquent, on ne peut pas prolonger toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $so(n, \mathbf{R})$ à une représentation du groupe $SO(n, \mathbf{R})$ (en particulier, la représentation de l'algèbre de Lie de $SO(2n, \mathbf{R})$ ou de $SO(2n+1, \mathbf{R})$ correspondant au poids supérieur $(1/2)(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ de l'algèbre de Lie complexe appropriée, ne peut être prolongée à une représentation du groupe). Par conséquent, $SO(n, \mathbf{R})$ n'est pas simplement connexe.

§ 8. Groupes de Lie semi-simples complexes et leurs formes réelles

8.1. Formes réelles compactes. La définition d'une forme réelle d'une *algèbre* de Lie complexe a été donnée au § 14 du chapitre IX. Rappelons que chaque algèbre de Lie semi-simple complexe possède au moins une forme réelle: en particulier, elle possède une forme réelle compacte (voir XII, § 14, chapitre X).

Passons maintenant la définition d'une forme réelle d'un *groupe* de Lie complexe. Soient G un groupe de Lie complexe, L son algèbre de Lie, et H un sous-groupe analytique (réel) du groupe de Lie G envisagé comme un groupe de Lie réel. Soit L_0 la sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie L, associée au sous-groupe H. Le sous-groupe H s'appelle *forme réelle* du groupe de Lie complexe G si L_0 est la *forme réelle* de l'algèbre de Lie L. La forme réelle H est dite *compacte* si elle est un groupe topologique compact.

I. *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, et L son algèbre de Lie. Alors G possède une forme réelle compacte: à savoir, le sous-groupe de Lie $H \subset G$ analytique réel qui correspond à la forme réelle compacte $L_u \subset L$ est une forme réelle compacte du groupe de Lie G.*

Démonstration. Il suffit de prouver que le groupe H est compact. Or la compacité du groupe H se démontre de même que dans III de 6.1.

II. *Chaque représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible.*

Démonstration. D'après 14.2, chapitre X, il suffit de démontrer cette assertion pour une algèbre de Lie complexe semi-

simple L. Soit G un groupe de Lie complexe simplement connexe à algèbre de Lie L (voir le théorème de 3.3). Supposons que L_u et H sont définis de même que dans I. Soit π une représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie L. Il existe alors une représentation ρ du groupe G telle que $\pi = d\rho$ (voir II de 1.4). Soit σ une représentation du groupe H définie par la restriction de la représentation ρ à H. Alors $d\sigma$ est la restriction de la représentation π à L_u. Etant donné que chaque représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible (voir le théorème II de 2.2, chapitre IV), la représentation σ est complètement réductible. Par conséquent, $d\sigma$ est complètement réductible (voir le théorème de 3.4, chapitre IX). Mais $d\sigma = \pi\,|_{L_u}$ est une représentation de la forme réelle L_u de l'algèbre de Lie L, donc la réductibilité complète de la représentation $d\sigma$ implique celle de la représentation π (voir 14.2, chapitre X).

8.2. « Méthode unitaire» de H. Weyl.

I. *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, G_0 la forme réelle du groupe G, et N un voisinage connexe de l'ensemble G_0 dans G. Si F est une fonction analytique complexe sur N dont la restriction à G_0 est nulle, alors $F = 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient L l'algèbre de Lie (complexe) du groupe G, et L_0 la sous-algèbre de Lie réelle associée au sous-groupe G_0. Envisageons les éléments de l'algèbre enveloppante universelle U du groupe G comme des opérateurs différentiels invariants à gauche et analytiques complexes sur G. Comme les éléments $x\,(g_0)$, $x \in L_0$, $g_0 \in G_0$, sont des vecteurs tangents à G_0, il découle du fait que F s'annule sur G_0 que $xF\,(g_0) = 0$ pour tous les $x \in L_0$, $g_0 \in G_0$. La fonction F étant analytique complexe et $L = L_0 + iL_0$, on a $xF\,(g_0) = 0$ pour tous les $g_0 \in G_0$, $x \in L$. Par conséquent, xF s'annule sur G_0 pour tous les $x \in L$. En appliquant à xF le raisonnement précédent et en procédant par récurrence sur le degré de l'élément $y \in U$, on trouve que yF s'annule sur G_0 pour tous les $y \in U$. En particulier, $yF\,(e) = 0$ pour tous les $y \in U$. Ainsi, la fonction analytique complexe F est nulle dans un certain voisinage de l'élément neutre e. Puisque N est connexe, on a $F = 0$ sur N.

II. *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple simplement connexe, et G_u sa forme réelle compacte; alors G_u est simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient L l'algèbre de Lie du groupe G, et L_u la forme réelle compacte correspondant au sous-groupe G_u. Soient π une représentation de l'algèbre de Lie L_u et π_C sa complexification (voir (14.2.1), chapitre X). Le groupe G étant simplement connexe, il existe une représentation ρ analytique complexe du groupe de Lie G vérifiant la condition $d\rho = \pi_C$. Il est évident que la restriction σ de la représentation ρ à G_u satisfait à la condition $d\sigma =$

$= \pi$. Par conséquent, le groupe G_u vérifie l'hypothèse de la proposition VIII de 8.1. G_u est donc simplement connexe.

III. *Chaque groupe de Lie compact semi-simple connexe K peut être plongé, en tant que forme réelle compacte, dans un certain groupe de Lie complexe semi-simple connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient L_K l'algèbre de Lie du groupe de Lie K, et L la complexification de l'algèbre de Lie L_K. Alors L_K et L sont des algèbres de Lie semi-simples. Soit G le groupe de Lie complexe simplement connexe qui correspond à l'algèbre de Lie L (voir le théorème de 3.3). Soit G_K le sous-groupe analytique réel du groupe G qui correspond à la sous-algèbre de Lie $L_K \subset L$. D'après II, le groupe G_K est simplement connexe. Les algèbres de Lie de G_K et de K étant isomorphes, il existe un sous-groupe discret $C \subset G_K$ tel que G_K/C est isomorphe à K. Puisque C est discret, il est contenu dans le centre du groupe G. Par conséquent, K est isomorphe à la forme réelle compacte G_K/C du groupe complexe G/C.

IV. *Soient G un groupe de Lie semi-simple complexe simplement connexe, et G_0 sa forme réelle. Si π est une représentation analytique complexe irréductible du groupe G, alors la restriction de π à G_0 est irréductible, et la classe d'équivalence de cette restriction est entièrement déterminée par la classe d'équivalence de π. Réciproquement, chaque représentation analytique réelle irréductible du groupe G_0 est la restriction au groupe G_0 d'une représentation analytique complexe bien déterminée du groupe G.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient ρ une représentation analytique réelle irréductible du groupe G_0, $d\rho$ la représentation correspondante de la forme réelle L_0 de l'algèbre de Lie L du groupe G. Soit $(d\rho)_{\mathbf{C}}$ la complexification de la représentation $d\rho$. Puisque G est simplement connexe, il existe une représentation analytique complexe π du groupe G telle que $d\pi = (d\rho)_{\mathbf{C}}$ (voir II de 1.4). Il est évident que la différentielle de la restriction de la représentation π au sous-groupe G_0 coïncide avec $d\rho$. D'après I de 1.4, on en tire $\pi|_{G_0} = \rho$. D'autre part, $\pi|_{G_0} = \rho$ implique $d\pi|_{L_0} = d\rho$, tandis que la représentation $d\pi$ est entièrement déterminée par sa restriction à L_0 (car $L = L_0 + iL_0$). Etant donné que la représentation π est entièrement déterminée par sa différentielle, la représentation ρ est la restriction à G_0 d'une représentation analytique complexe bien déterminée du groupe G.

Il est évident que si ρ est irréductible, alors π est irréductible, tandis que si π_1 et π_2 sont équivalentes, ρ_1 et ρ_2 sont également équivalentes (où $\rho_i = \pi_i|_{G_0}$, $i = 1, 2$). Soit maintenant π une certaine représentation analytique complexe du groupe de Lie G dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie. Soit ρ la restriction de la représentation π au sous-groupe G_0. Soient $E(\pi)$, $E(\rho)$ les enveloppes linéaires complexes de tous les opérateurs de

la forme $\pi(g)$, $g \in G$, et $\rho(g_0)$, $g_0 \in G_0$, respectivement. Il est évident que $E(\rho) \subset E(\pi)$. Montrons que $E(\rho) = E(\pi)$. En effet, si $E(\rho) \neq E(\pi)$, alors il existe une fonctionnelle linéaire non nulle f sur l'espace linéaire $E(\pi)$ qui s'annulle sur $E(\rho)$. Soit $F(g) = f(\pi(g))$, $g \in G$. Alors $F(g) \not\equiv 0$, mais $F(g_0) = 0$ pour tous les $g_0 \in G_0$. Il découle de I que l'on a alors $F(g) \equiv 0$, et la contradiction apparue montre que $E(\rho) = E(\pi)$. Si π est irréductible, alors $E(\pi)$ coïncide avec l'algèbre de tous les opérateurs linéaires de V (« théorème de Burnside», voir M. Naïmark [2]). Puisque $E(\rho) = E(\pi)$, il découle de l'irréductibilité de π que ρ est irréductible.

Soient maintenant ρ_1 et ρ_2 des représentations du groupe de Lie G_0 et π_1, π_2 des représentations analytiques complexes du groupe G telles que $\pi_i|_{G_0} = \rho_i$, $i = 1, 2$. Si ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes, il existe un opérateur linéaire T de l'espace V_1 de la représentation ρ_1 dans l'espace V_2 de la représentation ρ_2 tel que $\rho_2(g_0) = T\rho_1(g_0)T^{-1}$ pour tous les $g_0 \in G$. Si $\pi_2(g) \neq T\pi_1(g)T^{-1}$ pour un certain $g \in G$, alors il existe une fonctionnelle linéaire f sur V_2 et un élément $v \in V_2$ tels que $f((\pi_2(g) - T\pi_1(g)T^{-1})v) \neq 0$. Mais la fonction $F(g) = f((\pi_2(g) - T\pi_1(g)T^{-1})v)$ satisfait aux hypothèses de la proposition I, donc $F(g) \equiv 0$. La contradiction apparue montre que $\pi_2(g) = T\pi_1(g)T^{-1}$ pour tous les $g \in G$.

Les formules pour les caractères et les dimensions des représentations unitaires continues irréductibles des groupes de Lie semi-simples connexes compacts ont été proposées par H. Weyl; on en remarquera la ressemblence avec les formules correspondantes pour les caractères et les dimensions des représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes obtenues dans 13.4, chapitre X. Voir à ce sujet V. Varadarajan [1] et le Séminaire « Sophus Lie » [1].

8.3. Linéarité des groupes de Lie compacts.

I. *Chaque groupe de Lie compact connexe G possède une représentation linéaire exacte analytique réelle dans un espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Il découle en particulier du théorème 4 de 2.4, chapitre IV, que pour chaque élément $g \in G$ on peut trouver une représentation de dimension finie T telle que $T(g) \neq T(e)$. En effet, dans le cas contraire, tous les éléments matriciaux des représentations irréductibles unitaires du groupe G prendraient aux points g et e les mêmes valeurs, et la fonction continue sur G égale à 0 en g et à 1 en e n'admetterait pas d'approximation uniforme par des combinaisons linéaires de ces éléments matriciaux. Par conséquent, pour chaque $g \in G$, $g \neq e$, il existe une représentation T telle que g n'est pas contenu dans le noyau de T, i.e. les ensembles ouverts $G \setminus \operatorname{Ker} T$ recouvrent $G \setminus \{e\}$. Soit V un voisinage du

point e muni de coordonnées canoniques. Soit L l'algèbre de Lie du groupe G. Choisissons dans L une boule L_ε de rayon ε au centre à l'origine des coordonnées, de manière à ce que l'application exponentielle soit un homéomorphisme de la boule $L_{2\varepsilon}$ sur V. Soit $W = \exp(L_\varepsilon)$. Dans ce cas les ensembles $G \setminus \operatorname{Ker} T$ recouvrent $G \setminus W$ et il découle de la compacité de G qu'il existe une famille finie $T_1, \ldots, T_n$ de représentations de dimension finie du groupe G telle que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i \subset W$. Mais $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i$ est un sous-groupe de G, tandis que d'après la construction de W et d'après les propriétés descoordonnées canoniques, le voisinage W ne contient aucun sous-groupe non trivial du groupe G. Par conséquent, $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i = \{e\}$ et la somme directe $T_1 \dot{+} \ldots \dot{+} T_n$ est la représentation cherchée.

8.4. Enveloppe complexe d'une algèbre de Lie complexe semi-simple. Soient L une algèbre de Lie complexe semi-simple, $L_{\mathbf{R}}$ l'algèbre de Lie L envisagée comme une algèbre réelle; soit $L_{\mathbf{C}}$ la complexification de l'algèbre de Lie $L_{\mathbf{R}}$. Puisque $L_{\mathbf{R}}$ est semi-simple, $L_{\mathbf{C}}$ est également semi-simple. Soit S un opérateur linéaire de L agissant suivant la formule

$$Sx = ix$$

pour tous les $x \in L$. En posant $S\{x, y\} = \{Sx, Sy\}$, nous obtenons un opérateur linéaire complexe S dans $L_{\mathbf{C}}$. En remarquant que $S^2 = -1$ dans L et $[Sx, y] = S[x, y]$ pour tous les $x, y \in L$, on a

$$S^2 = -1, \quad [Sx, y] = S[x, y]$$

dans l'espace $L_{\mathbf{C}}$. Soit L' l'ensemble de tous les $z \in L_{\mathbf{C}}$ pour lesquels $Sz = iz$, et soit L'' l'ensemble de tous les $z \in L_{\mathbf{C}}$ tels que $Sz = -iz$. Puisque $S^2 = -1$, on a $(iS)^2 = 1$, donc $z \in L'$ (respectivement $z \in L''$) si et seulement si $z = ((iS + 1)/2)\, z$ (respectivement $z = ((1 - iS)/2)\, z$), où $(1 + iS)/2$, $(1 - iS)/2$ sont les opérateurs de projection sur L', L'' respectivement. Par conséquent, $L_{\mathbf{C}}$ est la somme directe des sous-espaces L' et L''. Si $x \in L'$, $y \in L_{\mathbf{C}}$, on a $S[x, y] = [Sx, y] = [ix, y] = i[x, y]$, i.e. L' est un idéal de $L_{\mathbf{C}}$. D'une manière analogue, L'' est un idéal de $L_{\mathbf{C}}$.

Soit $\tilde{L}$ la sous-algèbre de Lie de $L_{\mathbf{C}}$ constituée par les éléments $\tilde{x} = \{x, 0\}$, où $x \in L$. L'algèbre de Lie $\tilde{L} \subset L_{\mathbf{C}}$ coupe L' et L'' au point zéro seulement, car pour $\tilde{x} \in \tilde{L}$ on a $i\tilde{x} = J\{x, 0\} = \{0, x\}$ (voir 1.4, chapitre X), de sorte que la relation $S\tilde{x} = \pm i\tilde{x}$ signifie que $\{ix, 0\} = \pm\{0, x\}$, i.e. $x = 0$. Par conséquent, les projections de l'algèbre de Lie $\tilde{L}$ sur L' et L'' sont bijectives. Puisque $Sz = iz$ pour $z \in L'$, l'application de projection détermine un isomorphisme

des algèbres de Lie complexes $\tilde{L}$ et L'. Comme $Sz = -iz$ pour $z \in L''$, l'application de projection de $\tilde{L}$ sur L'' définit un *anti-isomorphisme* des algèbres de Lie complexes $\tilde{L}$ et L'' (i.e. une bijection $\varphi: \tilde{L} \to L''$ telle que $\varphi(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\varphi(x) + \bar{\beta}\varphi(y)$, $\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$ pour tous les $x, y \in \tilde{L}$, $\alpha, \beta \in C$).

Soit L_u la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie complexe semi-simple L; soient L'_u, L''_u ses images dans L', L'' par les applications de projection correspondantes. Il est évident que $L'_u + L''_u$ est une forme réelle compacte de l'algèbre de Lie complexe semi-simple $L_C = L' + L''$, et l'intersection de l'algèbre de Lie $\tilde{L} \subset L_C$ avec $L'_u + L''_u$ est égale à $\tilde{L}_u = \{(x, 0), x \in L_u\}$.

8.5. Décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie complexe semi-simple.

I. *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple, et L son algèbre de Lie. Soit L_u la forme réelle compacte de l'algèbre de Lie L. Il existe une sous-algèbre de Lie résoluble (réelle) $M \subset L$ telle que $L_u \dot{+} M = L$, et si K et R sont les sous-groupes analytiques du groupe G qui correspondent aux sous-algèbres de Lie L_u et M, alors K est un groupe de Lie compact, R est un groupe de Lie résoluble, le centre du groupe G est contenu dans K, le groupe R est simplement connexe et l'application $(k, r) \to kr$, $k \in K$, $r \in R$, est un isomorphisme analytique de la variété $K \times R$ sur G.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par $\bar{G}$ le groupe de Lie complexe défini de la manière suivante: $\bar{G}$ est isomorphe au groupe G en tant que groupe topologique, et si $\pi: g \to \bar{g}$ est un isomorphisme topologique de G sur $\bar{G}$, alors pour chaque ensemble ouvert $\bar{U} \subset \bar{G}$ l'algèbre $D(\bar{U})$ est constituée par les seules fonctions f sur $\bar{U}$ pour lesquelles la fonction $\overline{f(\pi(g))}$ appartient à $D(\pi^{-1}(\bar{U}))$. Appliquons les résultats de 8.4. Ecrivons l'algèbre de Lie L_C sous la forme $L' + L''$, où L' est isomorphe à L, et L'' est anti-isomorphe à L, ceci nous montre que l'algèbre de Lie du groupe de Lie $G \times \bar{G}$ est isomorphe à L_C, par conséquent, on peut envisager le groupe de Lie complexe G comme étant la forme réelle du groupe de Lie complexe $G \times \bar{G}$, en identifiant les éléments $g \in G$ avec les éléments de la forme $(g, \bar{g}) \in G \times \bar{G}$. Ainsi, la proposition I découle de I de 8.1, des résultants de 8.4 et du théorème du § 6 appliqué au groupe $G \subset G \times \bar{G}$.

II. *Un groupe de Lie complexe semi-simple G est simplement connexe si et seulement si sa forme réelle compacte G_u est simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Si G est simplement connexe, alors G_u est simplement connexe d'après II de 8.2. Réciproquement, si G_u est simplement connexe, alors G est homéomorphe au produit direct

d'espaces simplement connexes $K = G_u$ et R (voir I); elle est donc simplement connexe.

D'où l'on tire en particulier que les groupes $SL(n, \mathbf{C})$ et $Sp(2n, \mathbf{C})$ sont simplement connexes. Le groupe $SO(n, \mathbf{C})$ n'est pas simplement connexe, puisque sa forme réelle compacte $SO(n, \mathbf{R})$ n'est pas simplement connexe (voir III de 7.2).

8.6. Représentations des groupes de Lie semi-simples complexes.

I. *Chaque groupe de Lie complexe semi-simple connexe G admet une représentation linéaire exacte complexe analytique dans un espace vectoriel complexe de dimension finie.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\widetilde{G}$ le groupe de revêtement universel pour le groupe G relativement à l'homomorphisme π. Soit G_u la forme réelle compacte du groupe G. D'après I de 8.3, il existe une représentation exacte analytique *réelle* T du groupe G_u dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie. Nous pouvons considérer cette représentation T comme représentation de la forme réelle correspondante $\widetilde{G}_u$ du groupe $\widetilde{G}$. Soit ρ la représentation analytique complexe du groupe $\widetilde{G}$ dont la restriction à $\widetilde{G}_u$ coïncide avec T (voir IV de 8.2). Comme la représentation T possède un noyau discret, dT est exacte; par conséquent, $d\rho$ est une représentation exacte de l'algèbre de Lie du groupe $\widetilde{G}$ et le noyau de la représentation ρ est discret. D'après VI de 1.2, chapitre V, il en découle que le noyau de la représentation ρ est contenu dans le centre du groupe $\widetilde{G}$. Conformément à I de 8.5, le centre du groupe $\widetilde{G}$ est contenu dans $\widetilde{G}_u$, i.e. le noyau de la représentation ρ est contenu dans $\widetilde{G}_u$. Mais alors $\operatorname{Ker} \rho = \operatorname{Ker} T$, et comme $\pi(\widetilde{G}_u) = G_u$ et le centre du groupe $\widetilde{G}$ est contenu dans $\widetilde{G}_u$, on a donc $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} \pi$ et donc $\operatorname{Ker} \rho = = \operatorname{Ker} \pi$. Ceci permet de considérer ρ comme une représentation exacte du groupe $G \approx \widetilde{G}/\operatorname{Ker} \pi$.

Soit T une représentation analytique réelle d'un groupe de Lie complexe G dans un espace linéaire complexe V de dimension finie. La représentation T est dite *analytique complexe* si pour des $v \in V$, $f \in V^*$ arbitraires, la fonction $\varphi(g) = f(T(g)v)$ appartient à $D(G)$; la représentation T est dite *complexe anti-analytique* si la fonction $\overline{\varphi(g)} = \overline{f(T(g)v)}$ appartient à $D(G)$ quels que soient $v \in V$, $f \in V^*$.

II. *Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple, et L son algèbre de Lie. La représentation T du groupe G est analytique complexe (respectivement anti-analytique complexe) si et seulement si $dT(ix) = = i\,dT(x)$ (respectivement $dT(ix) = -i\,dT(x)$) pour tous les $x \in L$.*

D é m o n s t r a t i o n. La représentation T est analytique complexe si et seulement si dT est une représentation de l'algèbre de Lie L aussi bien réelle que complexe, i.e. si et seulement si $dT(ix) =$

$= i\, dT\,(x)$ pour tous les $x \in L$. On démontre d'une manière analogue l'assertion concernant les représentations anti-analytiques.

III. *Chaque représentation linéaire réelle analytique irréductible d'un groupe de Lie complexe dans un espace linéaire complexe de dimension finie est équivalente au produit tensoriel d'une représentation irréductible analytique complexe et d'une représentation irréductible anti-analytique complexe.*

Démonstration. D'après IV de 8.2 et I de 8.5, chaque représentation réelle analytique irréductible T est la restriction au groupe G d'une représentation irréductible analytique complexe S du groupe $G \times \overline{G}$. D'après 2.7, chapitre I, la représentation S est équivalente au produit tensoriel des représentations irréductibles T_1 et $\overline{T}_2$ des groupes G et $\overline{G}$ respectivement, qui sont des sous-représentations de la restriction de la représentation S à $G \times \overline{\{e\}}$ et $\{e\} \times \overline{G}$ respectivement; par conséquent T_1 et $\overline{T}_2$ sont des représentations analytiques des groupes G et $\overline{G}$ respectivement. Soit $\pi: G \to \overline{G}$ l'application construite au cours de la démonstration de la proposition I de 8.4. La représentation T_2 définie par la formule $T_2\,(g) = \overline{T}_2\,(\pi\,(g))$, $g \in G$, est alors une représentation anti-analytique de G par définition du groupe $\overline{G}$. Alors la relation $S \approx \approx T_1 \otimes \overline{T}_2$ entraîne, avec la définition du produit tensoriel des représentations du groupe G, $T \approx T_1 \otimes \overline{T}_2$.

CHAPITRE XII

REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE DIMENSION FINIE DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

Le problème de la description, à une équivalence près, de toutes les représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe de Lie complexe semi-simple connexe G, posé au chapitre IX, a été ramené à un problème analogue pour l'algèbre de Lie L du groupe G que nous avons résolu au chapitre X. Nous avons ainsi obtenu la solution du problème initial. Cette solution, due à E. Cartan [1*] à [3*] et H. Weyl [1] sera dite *classique*. En fait, la solution classique décrit non pas les représentations T du groupe G, mais leurs différentielles dT. Nous donnerons ici une autre solution, fondée sur la décomposition de Gauss, dans laquelle nous obtiendrons des formules explicites pour les opérateurs de la représentation T.

§ 1. Représentations des groupes de Lie semi-simples complexes

1.1. Description des représentations à l'aide des poids supérieurs et des vecteurs de poids supérieur. Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe,

$$G_{\text{rég}} = KZ^{+}, \quad K = Z^{-}D, \tag{1.1.1}$$

sa décomposition de Gauss *), $T: g \to T(g)$ la représentation du groupe G dans un espace vectoriel V de dimension finie. Le vecteur $v \in V$ s'appelle *vecteur de poids* de la représentation T si

$$T(\delta)\, v = \nu(\delta)\, v \quad \text{pour tous les} \quad \delta \in D, \tag{1.1.2}$$

où $\nu(\delta)$ est une fonction numérique sur D. Il est évident que $\nu(\delta)$ est un caractère du groupe D; on l'appelle *poids du vecteur v dans la représentation* T. Le vecteur de poids $v \in V$ s'appelle *vecteur de poids supérieur* si

$$T(z)\, v = v \quad \text{pour tous les} \quad v \in Z^{+}, \tag{1.1.3}$$

*) Le groupe K s'appelle sous-groupe *borélien* du groupe G.

et *vecteur de poids inférieur* si

$$T(\zeta)\, v = v \quad \text{pour tous les} \quad \zeta \in Z^-. \tag{1.1.4}$$

Le poids $\alpha(\delta)$ d'un vecteur de poids supérieur s'appelle *poids supérieur* de la représentation T; par la suite, $\alpha(\delta)$ désignera toujours le poids supérieur de la représentation T.

En reprenant pour l'essentiel les raisonnements de 2.1, chapitre VI (voir également 2.1, chapitre VII), nous obtenons le

THÉORÈME 1. *Dans l'espace de toute représentation T de dimension finie, il existe un vecteur de poids supérieur et un vecteur de poids inférieur. Si la représentation T dans l'espace V est irréductible, alors il existe dans V un vecteur de poids supérieur unique (à un facteur numérique près) et la représentation T est uniquement déterminée, à une équivalence près, par son poids supérieur $\alpha(\delta)$.*

La dernière assertion du théorème signifie que

I. *Deux représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe G sont équivalentes si et seulement si leurs poids supérieurs coïncident.*

Posons

$$\alpha(g) = \alpha(\delta) \quad \text{pour} \quad g = \zeta\delta z, \quad g \in G_{\text{rég}}. \tag{1.1.5}$$

Le caractère α du groupe D est dit *inductif relativement à G* si:

1) la fonction $\alpha(g)$ (définie sur $G_{\text{rég}}$) peut être prolongée par continuité au groupe G tout entier;

2) l'enveloppe linéaire, désignons-la par Φ_α de tous les $\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$, est de dimension finie.

Supposons que α est inductif relativement à G. Définissons la représentation $T_\alpha: g \to T_\alpha(g)$ du groupe G dans Φ_α en posant

$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0) \quad \text{pour} \quad f \in \Phi_\alpha. \tag{1.1.6}$$

En reprenant ensuite les raisonnements du § 2, chapitre VI, nous formulons le

THÉORÈME 2. *Un caractère α du groupe D détermine une représentation irréductible de dimension finie du groupe G à poids supérieur α si et seulement si α est inductif relativement à G. Dans ce cas T_α est une représentation irréductible de dimension finie à poids supérieur α, et chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe G à poids supérieur α est équivalente à la représentation T_α.*

La représentation T_α est appelée *modèle canonique* de la représentation irréductible de dimension finie, tandis que la fonction $\alpha(g)$ qui correspond au caractère inductif $\alpha(\delta)$ s'appelle *fonction génératrice* de cette représentation.

1.2. Réalisation des représentations dans l'espace des fonctions sur Z^+. On prouve aisément que la fonction génératrice $\alpha(g)$ vérifie la condition $\alpha(kg) = \alpha(k)\,\alpha(g)$, $k \in K$. D'où l'on tire que pour

des translations $\alpha(gg_0)$ quelconques, et donc pour chacune de leurs combinaisons linéaires $f(g) \in \Phi_\alpha$, on a

$$f(kg) = \alpha(k) f(g) \quad \text{pour} \quad k \in K. \tag{1.2.1}$$

D'où pour chaque fonction $f \in \Phi_\alpha$

$$f(g) = f(kz) = \alpha(k) f(z) \quad \text{pour} \quad k \in K, \; z \in Z^+, \; g \in G_{\text{rég}}. \tag{1.2.2}$$

En raisonnant comme dans 2.3, chapitre V, nous voyons que l'application $f(g) \to f(z)$ donnée par la formule (1.2.2) est linéaire et bijective. Soit F_α l'image de l'espace Φ_α par l'application (1.2.2). Cette application envoie les opérateurs $T_\alpha(g)$ sur des opérateurs $\dot{T}_\alpha(g)$ dans F_α, et l'on a

$$\dot{T}_\alpha(g_0) f(z) = \alpha(zg_0) f(\overline{zg_0}), \tag{1.2.3}$$

où $\overline{zg_0}$ est l'élément du groupe Z^+ déterminé par la décomposition de Gauss

$$zg_0 = k_1\overline{zg_0}, \quad k_1 \in K, \quad \overline{zg_0} \in Z^+. \tag{1.2.4}$$

On voit d'après la formule (1.2.3) que la fonction $f_0(z) \equiv 1$ est un vecteur de poids supérieur et par conséquent F_α est l'enveloppe linéaire de tous les $\dot{T}_\alpha(g) f_0 = \alpha(zg)$. Ainsi, nous avons démontré le

THÉORÈME 3. *Chaque représentation irréductible T de dimension finie d'un groupe de Lie complexe semi-simple connexe G est équivalente à une représentation $\dot{T}_\alpha$, où α est le poids supérieur de la représentation T, définie de la manière suivante:*

L'espace F_α de la représentation $\dot{T}_\alpha$ est l'enveloppe linéaire de tous les $\alpha(zg)$, $g \in G$, tandis que les opérateurs de la représentation sont définis par la formule

$$\dot{T}_\alpha(g) f(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}),$$

où $z_1 = \overline{zg}$ s'obtient de la condition $zg = k_1 z_1$.

1.3. Réalisation des représentations dans l'espace des fonctions sur U. Faisons maintenant appel à la décomposition d'Iwasawa (voir 8.5, chapitre IX) à la place de la décomposition de Gauss. Si $f \in \Phi_\alpha$ alors

$$f(g) = f(ku) = \alpha(k) f(u) \tag{1.3.1}$$

et l'application

$$f(g) \to f(u), \tag{1.3.2}$$

donnée par la formule (1.3.1) est bijective et linéaire. Désignons par $\dot{F}_\alpha$ l'image de Φ_α par (1.3.2). Cette application envoie la représentation T_α dans la représentation équivalente (appartenant à $\dot{F}_\alpha$)

qui sera à nouveau désignée par $\dot{T}_\alpha$. En répétant le raisonnement de 2.6, chapitre VI, on trouve facilement:

I. *Les opérateurs $\dot{T}_\alpha(g)$ de la représentation $\dot{T}_\alpha$ sont donnés par la formule*

$$\dot{T}_\alpha(g_0) f(u) = \alpha(k) f(u_{g_0}) \quad si \quad ug_0 = ku_{g_0}. \tag{1.3.3}$$

En outre, en vertu de (1.3.1):

II. *Les fonctions $f \in \dot{F}_\alpha$ vérifient la condition*

$$f(\gamma u) = \alpha(\gamma) f u) \quad pour \quad \gamma \in \Gamma = K \cap U. \tag{1.3.4}$$

En vertu de (1.3.4), le fait que la décomposition $ug_0 = ku_{g_0}$ dans la formule (1.3.3) n'est pas unique n'a pas d'importance. En effet, chaque nouvelle décomposition de cette forme s'écrit $ug_0 = k\gamma^{-1}\gamma u_{g_0}$; alors nous obtiendrons $k\gamma^{-1}$ à la place de k et γu_{g_0} à la place de u_{g_0} dans la formule (1.3.3), et donc $\alpha(k\gamma^{-1}) f(\gamma u_{g_0}) = \alpha(k) \alpha(\gamma^{-1}) \times \times \alpha(\gamma) f(u_{g_0}) = \alpha(k) f(u_{g_0})$. On peut lever l'indétermination dans la définition de u_{g_0} en posant $ug_0 = \zeta\varepsilon u_{g_0}$. Dans ce cas la formule (1.3.3) s'écrit

$$\dot{T}_\alpha(g_0) f(u) = \alpha(\varepsilon) f(u_{g_0}) \quad \text{pour} \quad ug_0 = \zeta\varepsilon u_{g_0}. \tag{1.3.5}$$

1.4. Critère d'inductivité. Soit G un groupe de Lie semi-simple simplement connexe. Soient L l'algèbre de Lie du groupe G, et

$$L = N^- + H + N^+ \tag{1.4.1}$$

la décomposition de Cartan de l'algèbre L qui correspond à la décomposition de Gauss (1.1.1); par conséquent, N^-, H, N^+ sont les algèbres de Lie des groupes Z^-, D, Z^+ respectivement. Désignons par r le rang du groupe D et choisissons dans H une base $h_k = = 2h'_{\alpha_k}/(h'_{\alpha_k}, h'_{\alpha_k})$, $k = 1, \ldots, r$, où les α_k sont les racines simples de l'algèbre L relativement à H. Alors chaque élément $h \in H$ s'écrit sous la forme

$$h = \sum_{k=1}^{r} t_k h_k, \tag{1.4.2}$$

et nous choisirons $\lambda_k = \exp t_k$ en guise de coordonnées dans le groupe D. Alors D est isomorphe au produit direct C_0^k et, par conséquent, chaque caractère $\alpha(\delta)$ sur D est de la forme

$$\alpha(\delta) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{p_k} \bar{\lambda}_k^{q_k} \quad \text{pour} \quad \delta = \exp h, \tag{1.4.3}$$

où p_k et q_k sont des nombres complexes tels que la différence $p_k - q_k$ est un nombre entier; cette dernière condition est nécessaire et suf-

fisante pour l'unicité de la fonction $\alpha(\delta)$ sur D. (1.4.3) permet d'écrire

$$\alpha(\delta) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} t_k p_k + \sum_{k=1}^{r} \bar{t}_k q_k\right) \quad \text{pour} \quad \delta = \exp h;$$

d'où l'on tire en vertu de (1.4.2)

$$\alpha(\delta) = \exp[(p, h) + (q, \bar{h})] \quad \text{pour} \quad \delta = \exp h, \qquad (1.4.4)$$

où p, q sont les vecteurs de H aux coordonnées p_k et q_k respectivement.

Soit maintenant T une représentation irréductible de dimension finie du groupe G dans V et soit $\pi = dT$ la différentielle de cette représentation. Alors π est une représentation irréductible de dimension finie de l'algèbre de Lie L dans V (voir le théorème dans 3.4, chapitre IX).

Soit v_0 un vecteur de poids supérieur de la représentation T, de sorte que

$$T(\delta) v_0 = \alpha(\delta) v_0 \quad \text{pour tous les} \quad \delta \in D, \qquad (1.4.5)$$

où $\alpha(\delta)$ est le poids supérieur de la représentation T, et

$$T(z) v_0 = v_0 \quad \text{pour tous les} \quad z \in Z^+. \qquad (1.4.6)$$

En passant de T à π et en prenant en considération (1.4.4) à (1.4.6), on trouve

$$\pi(h) v_0 = [(p, h) + (q, \bar{h})] v_0 \quad \text{pour tous les} \quad h \in H, \qquad (1.4.7)$$

$$\pi(n) v_0 = 0 \quad \text{pour tous les} \quad n \in N^+. \qquad (1.4.8)$$

En outre, le plus petit sous-espace de V invariant par $\pi(L)$ et contenant v_0 coïncide avec V, car π est irréductible. Par conséquent, on tire de (1.4.7) et (1.4.8) que v_0 est un vecteur de poids supérieur de la représentation π et $(p, h) + (q, \bar{h})$ est le poids supérieur de cette représentation. Mais alors (voir le théorème du § 12, chapitre X), pour chaque racine simple α de l'algèbre de Lie L relativement à H les nombres

$$p_\alpha = 2(p, \alpha)/(\alpha, \alpha), \qquad q_\alpha = 2(q, \alpha)/(\alpha, \alpha) \qquad (1.4.9)$$

doivent être des entiers non négatifs.

Réciproquement, supposons que les nombres (1.4.9) sont des entiers non négatifs pour chaque racine simple α. Il existe alors une représentation irréductible π de l'algèbre de Lie L dans un espace V de dimension finie à poids supérieur $(p, h) + (q, \bar{h})$ (voir III, de 8.6, chapitre XI). D'après II de 1.4, chapitre XI, cette représentation π est la différentielle d'une certaine représentation irréductible du groupe G dans V.

Soit $\alpha'(\delta)$ le poids supérieur de la représentation T. Alors $\alpha'(\delta)$ est inductif relativement à G en vertu du théorème 2 de 1.1 et l'on

a $\alpha'(\delta) = \exp((p, h) + (q, \bar{h})) = \alpha(\delta)$, i.e. $\alpha(\delta)$ est inductif relativement à G.

Nous avons démontré le

THÉORÈME 4. *Le caractère*

$$\alpha(\delta) = \exp[(p, h) + (q, \bar{h})], \quad h, p, q \in H,$$

du groupe D est inductif relativement à G si et seulement si tous les nombres

$$p_\alpha = 2(p, \alpha)/(\alpha, \alpha), \quad q_\alpha = 2(q, \alpha)/(\alpha, \alpha)$$

sont des entiers non négatifs pour chaque racine simple α.

REMARQUE. En réalité, si le caractère $\alpha(\delta)$ dans (1.4.4) est inductif relativement à G, les nombres p_α, q_α sont des entiers non négatifs pour une racine α *quelconque*. En effet, pour chaque racine donnée α, on peut ordonner le système des racines de telle sorte que α soit simple (voir IV et V § 11, chapitre X).

En réunissant les théorèmes 1 à 4, nous obtenons le

THÉORÈME 5. *Chaque représentation irréductible de dimension finie d'un groupe complexe semi-simple simplement connexe G se détermine par un système de nombres entiers non négatifs (sa signature) p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, où r est le rang du groupe G, et chaque système p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, détermine une représentation irréductible de dimension finie du groupe G. La représentation T qui correspond à la signature donnée p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, est déterminée par sa fonction génératrice*

$$\alpha(\zeta\delta z) = \alpha(\delta) = \exp[(p, h) + (q, \bar{h})], \ p, q, h \in H, \ \delta = \exp h,$$

où

$$2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = p_j, \ 2(q, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = q_j, \ j = 1, \ldots, r,$$

et les α_j sont les racines simples de l'algèbre de Lie L du groupe G relativement à la sous-algèbre de Cartan H de l'algèbre L.

L'espace F de la représentation est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(zg)$, $g \in G$, et les opérateurs $T(g)$ sont définis par la formule

$$T(g) f(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}) \ \text{pour} \ zg = k \cdot \overline{zg}, \quad \overline{zg} \in Z^+.$$

EXEMPLE. Soit $G = SL(n, \mathbf{C})$. Alors Z^-, Z^+ coïncident avec les groupes introduits au chapitre VI, tandis que D est le groupe des matrices diagonales

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

qui vérifient la condition $\lambda_1 \ldots \lambda_n = 1$. L'algèbre H est l'algèbre de toutes les matrices diagonales

$$h = \begin{Vmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{Vmatrix}$$

de trace nulle $h_1 + \ldots + h_n = 0$, tandis que les racines simples sont de la forme

$$\alpha_1 = h_1 - h_2, \ \alpha_2 = h_2 - h_3, \ \ldots, \ \alpha_{n-1} = h_{n-1} - h_n, \ r = n - 1.$$

Des calculs évidents montrent que $p_{\alpha_k} = p_k - p_{k+1}$, $q_{\alpha_k} = q_k - q_{k+1}$ (voir (10.3.9), chapitre X), par conséquent, pour qu'un caractère soit inductif relativement à $SL(n, \mathbf{C})$, il faut et il suffit que les nombres $p_1 - p_2, p_2 - p_3, \ldots, p_{n-1} - p_n, q_1 - q_2, q_2 - q_3, \ldots, q_{n-1} - q_n$ soient des entiers non négatifs. Nous aboutissons à la condition d'inductivité relativement au groupe $SL(n, \mathbf{C})$ qui avait été obtenue par une autre méthode dans les chapitres VI et VII.

Pour une autre démonstration des conditions d'inductivité du caractère, qui ne fait pas appel aux résultats classiques sur les représentations des algèbres de Lie semi-simples, voir D. Jélobenko [1].

1.5. Description de l'espace d'une représentation irréductible de dimension finie du groupe G. Considérons, par exemple, la représentation T_α du groupe G dans sa réalisation dans l'espace des fonctions sur le groupe Z^+. Comme nous l'avons déjà observé, l'espace F_α de la représentation est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions $\alpha(zg)$, $g \in G$. Néanmoins, cette approche de la description de l'espace F_α n'est pas assez effective. Citons aussi la description suivante de l'espace F_α, due à D. Jélobenko [1].

THÉORÈME 6. *Soient D_j, $\overline{D}_j$ les opérateurs analytique et anti-analytique infinitésimaux de translation à gauche sur Z, correspondant au vecteur de racine e_{α_j}, $j=1, \ldots, r$, où les α_j sont toutes les racines simples de l'algèbre de Lie L du groupe G. Alors F_α est constitué par toutes les solutions des systèmes d'équations*

$$D_j^{p_j+1} f(z) = 0, \quad \overline{D}_j^{q_j+1} f(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \qquad (1.5.1)$$

où

$$p_j = 2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j), \qquad q_j = 2(q, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j), \qquad (1.5.2)$$

$$\alpha(\delta) = \exp[(h, p) + (\overline{h}, q)], \quad \delta = \exp h. \qquad (1.5.3)$$

Pour la démonstration, voir D. Jélobenko [1], chapitre XVI.

§ 2. Représentations des groupes de Lie semi-simples réels

Soit $\tilde{G}$ un groupe de Lie semi-simple réel connexe. Supposons que le groupe $\tilde{G}$ est la forme réelle d'un certain groupe de Lie complexe semi-simple G *). Servons-nous du théorème 5 de 1.4. Il est évident qu'une représentation irréductible T de dimension finie du groupe G est analytique si et seulement si tous les nombres q_j, $j = 1, \ldots, r$, sont nuls. En appliquant IV de 8.2, chapitre XI, on obtient le

THÉORÈME. *Chaque représentation irréductible $\tilde{T}$ de dimension finie d'un groupe de Lie réel semi-simple connexe $\tilde{G}$, qui est la forme réelle d'un groupe de Lie complexe semi-simple G, se détermine par un système de nombres entiers non négatifs (sa signature) p_j, $j = 1, \ldots, r$, où r est le rang du groupe G, et chaque système détermine une représentation irréductible de dimension finie du groupe $\tilde{G}$. La représentation $\tilde{T}$ qui correspond à une signature donnée p_j, $j = 1, \ldots, r$, est déterminée par sa fonction génératrice $\alpha(\zeta \delta z) = \alpha(\delta) = \exp(p, h)$, $p, q, h \in H$, $\delta = \exp h$, où $2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = p_j$, $j = 1, \ldots, r$ (les α_j étant des racines simples de l'algèbre de Lie L du groupe G relativement à la sous-algèbre de Cartan H de l'algèbre de Lie L). L'espace F de la représentation $\tilde{T}$ est l'enveloppe linéaire de toutes les fonctions de la forme $\alpha(zg)$, $g \in G$, tandis que les opérateurs de la représentation $\tilde{T}$ sont définis par la formule*

$$\tilde{T}(\tilde{g}) f(z) = \alpha(z\tilde{g}) f(z, \tilde{\tilde{g}}) \quad \text{où} \quad \tilde{g} \in \tilde{G}, \quad z\tilde{g} = k \cdot z\tilde{\tilde{g}}, \quad z\tilde{\tilde{g}} \in Z^{+}.$$

EXEMPLE. Soit $\tilde{G}$ le groupe $SU(n)$ ou le groupe $SL(n, \mathbf{R})$. Alors le groupe $\tilde{G}$ est la forme réelle du groupe de Lie complexe semi-simple $G = SL(n, \mathbf{C})$. D'après le théorème que nous venons de démontrer, chaque représentation irréductible de dimension finie du groupe $\tilde{G}$ est la restriction au groupe $\tilde{G}$ d'une représentation analytique irréductible du groupe G, i.e. la représentation dont la signature est de la forme $(p_1, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$, où tous les nombres $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - p_n$ sont des entiers non négatifs.

*) Tout groupe de Lie réel semi-simple n'est pas une forme réelle d'un groupe de Lie complexe semi-simple. En particulier, le revêtement universel du groupe $SL(2, \mathbf{R})$ n'a pas d'enveloppe complexe. Pour plus de détail voir D. Jélobenko [1].

BIBLIOGRAPHIE

Monographies et manuels

BOURBAKI N.
[1] Algèbre, Hermann, Paris, 1965.
[2] Groupes et algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1968.
[3] Topologie générale, Hermann, Paris, 1961.

BURNSIDE W.
[1] The theory of groups of finite order, Cambridge, « Cambridge Univ. Press », 1911.

CHEVALLEY C.
[1] Theory of Lie groups, Hermann, Paris, 1955.

CHILOV G.
[1] Cours spécial d'analyse, « Mir », Moscou, 1975.

EYRING H., WALTER J., KIMBALL G.
[1] Quantum chemistry, 1946.

FIHTENGOLTZ G. (ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.)
[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I, II, III, « Наука », Москва, 1970, 1971.
(Cours d'analyse, v. I, II, III « Naouka », Moscou, 1970, 1971.)

FROBENIUS G. (ФРОБЕНИУС Г.)
[1] Теория характеров и представлений групп, Харьков, ОНТИ, 1937.

GANTMACHER F. (ГАНТМАХЕР Ф.)
[1] Теория матриц, « Наука », Москва, 1967.
(Théorie des matrices, « Naouka », Moscou, 1967.

GUELFAND I., MINLOS R., CHAPIRO Z. (ГЕЛЬФАНД И., МИНЛОС Р., ШАПИРО З.)
[1] Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, Москва, 1958.
(Représentations du groupe des rotations et du groupe de Lorenz, Fizmatguiz, Moscou, 1958.)

GUELFAND I., NAÏMARK M. (ГЕЛЬФАНД И., НАЙМАРК М.)
[1] Унитарные представления классических групп, Труды МИАН, Москва, 1950.
(Représentations unitaires des groupes classiques, « Troudy » de l'Institut mathématique de l'Académie des sciences, Moscou 1950.)

GUNNING R., ROSSI H.
[1] Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall inc., Englewood-Cliffs, N.J., 1965.

HALL M.
[1] The theory of groups, New York, 1959.

HAMERMESH M.
[1] Group theory and its applications to physical problems, London, 1964.

HELGASON S.
[1] Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.

JACOBSON N.
[1] Lie algebras, New York, 1962.

JÉLOBENKO D. (ЖЕЛОБЕНКО Д.)

[1] Компактные группы Ли и их представления, « Наука », Москва, 1970. (Groupes de Lie compacts et leurs représentations, « Naouka », Moscou, 1970.)
[2] Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965.
(Cours sur la théorie des groupes de Lie, Doubna, 1965.)
[3] Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, « Наука », Москва, 1974.
(Analyse harmonique sur les groupes de Lie complexes semi-simples, « Naouka », Moscou, 1974.)
KAPLANSKY I.
[1] Lie algebras and locally compact groups, Chicago, 1971.
KIRILLOV A.
[1] Eléments de la théorie des représentations, « Mir », Moscou, 1974.
KOKKEDEE J.
[1] The quark model, New York, 1969.
KOLMOGOROV A., FOMINE S.
[1] Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, « Mir », Moscou, 1974.
KUROSH A.
[1] Cours d'algèbre supérieure, « Mir », Moscou, 1974.
LIE S., ENGEL F.
[1] Theorie der Transformationgrouppen, Bd. 1, 2, 3, Leipzig, 1893.
LITTLEWOOD D.
[1] The theory of group caracters, Oxford, 1950.
LUBARSKI T. (ЛЮБАРСКИЙ Т.)
[1] Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, Москва, 1957. (Théorie des groupes et ses applications à la physique, Fizmatguiz, Moscou, 1957.)
MARKOUCHÉVITCH A. (МАРКУШЕВИЧ А.)
[1] Теория аналитических функций, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
(Théorie des fonctions analytiques, Gostekhizdat, Moscou-Léningrad, 1950.)
MONTGOMERY D., ZIPPIN L.
[1] Topological transformation groups, New York, Interscience Publ., 1955.
MURNAGHAN F.
[1] The theory of group representations, 1938.
NAÏMARK M. (НАЙМАРК М.)
[1] Нормированные кольца, « Наука », Москва, 1968.
(Anneaux normés, « Naouka », Moscou, 1968.)
[2] Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, Москва, 1958.
(Représentations linéaires du groupe de Lorenz, « Fizmatguiz », Moscou, 1958.)
PONTRIAGUINE L. (ПОНТРЯГИН Л.)
[1] Непрерывные группы, « Наука », Москва, 1974.
(Groupes continus, « Naouka », Moscou, 1974.)
SÉMINAIRE « SOPHUS LIE »
[1] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie, Paris, 1955.
SERRE J.-P.
[1] Lie algebras and Lie groups, W. A. Benjamin, New York, 1965.
[2] Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.
[3] Cours d'arithmétique, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
VARADARAJAN V.
[1] Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice-Hall inc., Englewood-Cliffs, 1974.

VILENKINE N.
[1] Специальные функции и теория представлений групп, « Наука », Москва, 1965.
(Fonctions spéciales et théorie des représentations des groupes, « Naouka », Moscou, 1965.)
WAERDEN B., Van der
[1] Moderne Algebra, 2nd ed., Berlin, 1940.
[2] Методы теории групп в квантовой механике, Харьков, ОНТИ, 1939.
WEIL A.
[1] Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Publ. de l'Institut de Mathématiques de Clermont-Ferrand, Paris, 1940.
WEYL H.
[1] The classical groups. Their invariants and representations, New York, 1939.
[2] The theory of groups and quantum mechanics, London, Dover Publ., 1931.

Articles de revues

ADO I. (АДО И.)
[1*] О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, Изв. физ.-матем. о-ва, Казань 7 (1934/35), 3-43.
(Sur la représentation des groupes continus finis à l'aide de substitutions linéaires, « Izvestia » de la société phys.-math. de Kazan 7 (1934/35), 3-43.)
BÉRÉZINE F. (БЕРЕЗИН Ф.)
[1*] Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли, Функциональный анализ и его приложения 1, № 2 (1967), 1-14.
(Quelques remarques sur l'enveloppe associative d'une algèbre de Lie. « Analyse fonct. et ses appl. » 1, nº 2 (1967), 1-14.)
BERNSTEIN I., GUELFAND I., GUELFAND S. (БЕРНШТЕЙН И., ГЕЛЬФАНД И., ГЕЛЬФАНД С.)
[1*] Структура представлений со старшим весом, Функциональный анализ и его приложения, 5, № 1 (1971), 1-9.
(Structure des représentations à poids supérieur. « Analyse fonct. et ses appl. » 5, nº 1, (1971), 1-9.)
CARTAN E.
[1*] Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, Nony, 1894.
[2*] Les groupes réels simples et continus, Ann. Sci. École Norm., Sup. 31 (1914), 263-355.
[3*] Les tenseurs irréductibles et les groupes simples et semi-simples, Bull. Sci. Math. 49 (1925), 130-152.
CARTIER P.
[1*] Sur la formule du caractère de Weyl, « Mathématique » 6, nº 5 (1962), 139-141.
DYNKINE E. (ДЫНКИН Е.)
[1*] Структура полупростых алгебр Ли, УМН 2, № 4 (1947), 59-127.
(Structure des algèbres de Lie semi-simples, « Ouspekhi mat. naouk » 2, nº 4 (1947), 59-127.)
[2*] О представлении ряда log ($e^x e^y$) для некоммутирующих x, y через коммутаторы, Матем. сб. 25 (1949), 155-162.
(Sur la représentation de la série log ($e^x e^y$) pour x, y non permutables en termes des commutateurs, Matem. sb. (1949), 155-162.)
DYNKINE E., ONICHTCHIK A. (ДЫНКИН Е., ОНИЩИК А.)
[1*] Компактные группы Ли в целом, УМН 10, № 4 (1955), 3-74.

(Groupes de Lie compacts, étude globale, « Ouspekhi mat. naouk » 10 n° 4 (1955), 3-74.)
GODEMENT R.
[1*] A theory of spherical functions, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 496-556.
GREEN J.
[1*] The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 237-289.
GUELFAND I., GRAEV M. (ГЕЛЬФАНД И., ГРАЕВ М.)
[1*] Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной группы и связанные с ними специальные функции, ИАН СССР сер. матем., 29, № 6 (1965), 1329-1365.
(Représentations irréductibles de dimension finie du groupe linéaire unitaire complet et fonctions spéciales correspondantes, « Izv. Acad. naouk » de l'U.R.S.S., sér. mat. 29, n° 6 (1965), 1329-1365.)
GUELFAND I. (ГЕЛЬФАНД И.)
[1*] Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. 26 (1950), 103-112.
(Centre de l'anneau de groupe infinitésimal, Matem. sb. 26 (1950), 103-112.
[2*] Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве, ДАН СССР, 25, (1939), 711-716.
(Sur les groupes d'opérateurs à un paramètre dans les espaces normés, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S., 25 (1939), 711-716.)
GUELFAND S. (ГЕЛЬФАНД С.)
[1*] Представления полной линейной группы над конечным полем, Матем. сб. 83, № 1 (1970), 15-41.
(Représentations du groupe linéaire complet sur un corps fini, Matem. sb. 83, n° 1 (1970), 15-41.
HAAR A.
[1*] Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. Math. 34 (1933), 147-169.
HARISH-CHANDRA
[1*] On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 28-96.
IWASAWA K.
[1*] On some types of topological groups, Ann. Math. 50 (1949), 507-558.
JÉLOBENKO D. (ЖЕЛОБЕНКО Д.)
[1*] Описание всех неприводимых (конечномерных) представлений произвольной связной группы Ли, ДАН СССР 139, № 6 (1961), 1291-1294.
(Description de toutes les représentations irréductibles (de dimension finie) d'un groupe de Lie connexe quelconque, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S., 139, n° 6 (1961), 1291-1294.)
[2*] Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений, УМН 17, № 1 (1962), 27-120.
(Groupes classiques. Analyse spectrale des représentations de dimension finie, « Ouspekhi mat. naouk », 17, n° 1 (1962), 27-120.)
[3*] К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли, Труды Моск. матем. о-ва 12 (1963), 53-98.
(Sur la théorie des représentations des groupes de Lie réels et complexes, « Troudy » de la Soc. math. de Moscou 12 (1963), 53-98.)
KLIMYK A. (КЛИМЫК А.)
[1*] О кратностях весов неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли, ДАН СССР 177, № 5, (1967), 1001-1004.
(Sur la multiplicité des poids des représentations d'un groupe de Lie complexe semi-simple, « Doklady Acad. naouk » de l.U.R.S.S., 177, n° 5 (1965), 1001-1004.)

KOSTANT B.
[1*] A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Amer. Math. Soc. 93, n° 1 (1959), 53-73.
KREIN M. (КРЕЙН М.)
[1*] Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры, ДАН СССР 69, № 6 (1969), 725-729.
(Principe de dualité pour un groupe bicompact et une algèbre de blocs carrée, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S. 69, n° 6 (1969), 725-729).
MACKEY G.
[1*] Infinite dimensional representations of groups, « Mathématique » 6, n° 6 (1962), 57-103.
MALTSEV A. (МАЛЬЦЕВ А.)
[1*] О разложении алгебры Ли в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры, ДАН СССР 36, № 2 (1942), 46-50.
(Sur la décomposition d'une algèbre de Lie en somme directe d'un radical et d'une sous-algèbre semi-simple, « Doklady Acad. naouk » de l'U.R.S.S. 36, n° 2, (1942), 46-50.)
MOLTCHANOV V. (МОЛЧАНОВ В.)
[1*] О матричных элементах неприводимых представлений симметрической группы, Вестник Московского Государственного университета, сер. мат. мех. 1 (1966), 52-57.
(Sur les éléments matriciaux des représentations irréductibles du groupe symétrique, Vestnik de l'Univ. de Moscou, sér . mat. méc., 1 (1966), 52-57.)
VON NEUMANN J.
[1*] Zum Haarischen Mass in topologischen Gruppen, Compos. Math. 1 n° 1 (1934), 106-114.
PETER F., WEYL H.
[1*] Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. 97 (1927), 737-755.
RACHEVSKI P. (РАШЕВСКИЙ П.)
[1*] О некоторых основных теоремах теории групп Ли, УМН 8, № 1, (1953).
(Sur quelques théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes de Lie, « Ouspekhi mat. naouk » 8, n° 1, (1953).)
SIROTA A., SOLODOVNIKOV A. (СИРОТА А., СОЛОДОВНИКОВ А.)
[1*] Некомпактные полупростые группы Ли, УМН 18, № 1 (1963), 87-144.
(Groupes de Lie semi-simples non compacts, « Ouspekhi mat. naouk » 18, n° 1 (1963), 87-144.)
SCHUR I.
[1*] Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linear Substitutionen, Sitz. Pr. Akad. Wiss. (1906), 164-184.
SCHWARTZ L.
[1*] Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C. R. Acad. Sci. 227 (1948), 424-426.
TANNAKA I.
[1*] Über Dualitätsatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Math. 53 (1938), 1-12.
WEYL H.
[1*] Theorie der Darstellungen kontinuierlicher halbeinfacher Grouppen durch lineare Transformationen, Math. Z. 23 (1925), 271-304 ; 24 (1926), 328-395, 789-791.
YOUNG A.
[1*] On the quantitative substitutional analysis, Proc. Lond. Math. Soc. 33 (1900), 97 ; 34 (1902), 361.

INDEX DES MATIÈRES

Imprimé en Union Soviétique

